Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2013, №2(112) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.9

ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ НЕЧІТКИХ РІЗНИЦЕВИХ СИСТЕМ

Е. В. Івохін

Резюме. Проведено аналіз та розробка нових конструктивних підходів для якісного аналізу розв'язків різницевих нечітких систем, вирішено ряд задач обробки нечітких даних спеціального вигляду, розроблено методи та алгоритми для роботи з нечіткою інформацією. Результати можуть бути використані для створення та супроводження систем підтримки прийняття управлінських рішень в умовах невизначеності.

Нечіткі системи як об'єкт дослідження

Швидкий розвиток математичної теорії керування останнім часом активно впливає на процеси застосування загальних підходів теорії управління для розробки математичних моделей соціальних і економічних систем. Специфіка останніх полягає в тому, що при виборі керуючих впливів необхідно передбачати можливі реакції керованих суб'єктів і використовувати такі механізми прийняття управлінських рішень, які б дозволяли максимально точно враховувати і узгоджувати інтереси керуючого органу і керованих суб'єктів. Іншою особливістю соціальних і економічних систем є неавтономність їх станів та керувань, що приводить до необхідності детального аналізу та дослідження поведінки систем.

Для проведення дослідження дуже важливо правильно формалізувати процеси, що відбуваються в об'єкті дослідження, застосовуючи, наприклад, підходи математичного моделювання. Одним з таких підходів, що дозволяє описати динаміку систем, є визначення еволюції станів системи шляхом задання початкових значень станів системи і рівнянь, що формалізують зміну координат з часом. Якщо досліджується поведінка складних нелінійних систем, що містять набір підсистем, то, як правило, використовують "приблизний" опис цих підсистем для спрощення математичного моделювання поведінки всієї системи. Розрахунок координат, які визначають стан складної нелінійної системи, принципово має неточності внаслідок приблизності обчислень, нестійкості системи і неможливості достатньо точного задання початкових даних і еволюційних рівнянь.

Для опису неточності математичної моделі найбільш розповсюдженим є стохастичний підхід. При цьому, для адекватного застосування стохастичних принципів при моделюванні систем необхідно, щоб величини, що спостерігаються, були результатом усереднення незалежних випадкових величин. Для практичних задач такий підхід є не зовсім природнім. Тому пропонується використовувати нечіткий підхід, при якому неточність функціонування моделі описується в термінах теорії нечітких множин Л. А. Заде [1].

У відповідності до ідеї Заде, нечітка підмножина заданої множини X розглядається як підмножина $\{(x, \mu(x)) : x \in X\}$ прямого добутку $X \times [0,1]$ з деякою функцією $\mu : X \to [0,1]$, що визначає ступінь належності елементів $x \in X$ до нечіткої підмножини.

Розглянемо динамічну систему, що описується набором фазових координат $x(t) \in R^n, t \in [0,T]$, де R^n — евклідів простір, T — деяке наперед задане додатне число, для якої задано еволюційне рівняння [2]:

$$\dot{x}(t) = F(x,t), \; t \in (0,T] \tag{1}$$

з початковим станом $x(0) = x_0$. Якщо F містить нечіткі параметри, то природно вважати і розв'язок $x(t)$ нечітким елементом R^n при фіксованому t. Таким чином, в заданний момент часу t нечіткий процес можна розглядати як множину, що залежить від параметра t, нечітких елементів $\{R, \mu(\cdot,t)\}$, де R — множина значень координати $x(t)$, а $\mu(z,t), \; z \in R^n$, — можливість рівності $x(t) = z$ в момент часу t. Однак множина всіх нечітких елементів ще не визначає процес як функцію часу, для цього потрібно ще описати можливість існування пар $x(t_1) = z_1$, $x(t_2) = z_2$ для будь-яких двох моментів часу t_1 і t_2; можливість існування трьох рівностей для трьох моментів часу t_1, t_2, t_3 і т.д. Нечіткий процес визначений, якщо задані нечіткі елементи

$$\{R, \mu(\cdot, t_1)\}, t_1 \in [0,T];$$
$$\{R \circ R, \mu(\cdot, t_1, \cdot, t_2)\}, t_1, t_2 \in [0,T]; \quad \ldots$$
$$\{R \circ R \circ ... \circ R, \mu(\cdot, t_1, \cdot, t_2, ..., \cdot, t_n)\}, t_1, t_2, ..., t_n \in [0,T];$$

де $t_1, t_2, ...$ — розглядаються як параметри, $\circ$ — операція композиції. Вважається, якщо $\mu(x,t) = \mu_0$, то імовірність того, що координата $x \in R^n$, дорівнює μ_0. Функція $\mu(x,t)$ задається розподілом значень нечіткого вектора $x(t)$, що визначає стани системи в моменти часу $t \in [0,T]$.

Нехай задано моменти часу $t_1 \le t_2 \le ... \le t_n \le t_{n+1}$. Тоді розподіл $\mu(x_{n+1}, t_{n+1} | x_1, t_1, ..., x_n, t_n)$ нечіткого елемента $x(t)$ в момент часу t_{n+1} за умови, що система в моменти часу $t_1, ..., t_n$ знаходилась в станах $x_1, ..., x_n$ відповідно, можна визначити у вигляді рівняння, яке задовольняє умові

$$\min(\mu(x_{n+1}, t_{n+1} | x_1, t_1, ..., x_n, t_n), \mu(x_1, t_1, ..., x_n, t_n)) = \tag{2}$$
$$= \mu(x_1, t_1, ..., x_n, t_n, x_{n+1}, t_{n+1})$$

Розв'язок рівняння (2), взагалі кажучи, може бути знайдений неоднозначно, однак будь-який розв'язок дозволяє за відомим розподілом $\mu(x_1, t_1, ..., x_n, t_n)$ обчислити значення величини розподілу у момент часу t_{n+1}.

Більшість реальних процесів можуть бути формалізовані у вигляді диференціальних рівнянь того або іншого виду, але застосування нових типів диференціальних рівнянь для вирішення конкретних задач потребує створення теоретичної основи для їх вивчення. В монографії Меренкова Ю. Н. [3] наведено результати досліджень стійкоподібних властивостей для диференціальних включень, нечітких і стохастичних диференціальних рівнянь. В якості основних властивостей розглядається стійкість за Ляпуновим й асимптотична стійкість інваріантних замкнених множин, а модель динамічної системи, що досліджується, подається системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \tag{3}$$

Зрозуміло, що права частина рівняння (3) у кожній точці (t, x) може мати множину $F(t, x)$ можливих значень. Тому задача формулюється як пошук розв'язків $x(t)$ диференціального включення:

$$\frac{dx}{dt} \in F(t, x). \tag{4}$$

Велика увага до диференціальних включень зв'язана, зокрема, з їх вдалим застосуванням у теорії керування і у дослідженні нечітких диференціальних рівнянь. В [3] узагальнено теореми про властивості розв'язків диференціальних включень з неперервною правою частиною. Деякі результати по дослідженню диференціальних включень наведено, наприклад, в [4–6].

Нехай $F(t, x) = \{f(t, x, b) : b \in B\}$, де B — непорожня множина значень параметра b, а підмножина B_α — більш вузька множина значень параметра b, яку можна отримати при накладанні додаткових вимог, що визначаються параметром $\alpha \in (0, 1]$ для уточнення об'єкта управління і для корегування його траєкторії. Природно вважати, що $A_\alpha \subset A_\beta$ при $\alpha > \beta$, тобто при збільшені витрат — невизначеність в траєкторії руху може тільки зменшуватись. Таким чином, можна говорити про появу нечіткої множини у рівнянні (4) — параметра b з носієм B і з рівнями значимості $B_\alpha,\ \alpha \in (0, 1]$. У цьому випадку, рівняння (4) зводиться до нечіткого диференціального рівняння:

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \tag{5}$$

яке також можна розглядати як сімейство диференціальних включень

$$\frac{dx}{dt} \in F_\alpha(t, x),\ \alpha \in (0, 1], \tag{6}$$

де $F_\alpha(t, x) = \{f(t, x, b) | b \in B_a\}$. Значення величини α (рівня значимості) при цьому можуть вибиратися за конкретними (реальними) критеріями. Зручність введення нечіткої множини: всі можливі невизначеності в умовах руху об'єкта поглинаються змістом рівняння (5) і можна відокремити задачу по уточненню цих невизначеностей від розв'язку конкретного рівняння (6).

Використання нечітких динамічних моделей

Стійкість є однією з найбільш важливих властивостей динамічних систем. У класичному випадку під стійкістю розуміють спроможність системи повертатися до положення рівноваги після закінчення дії сил, що вивели систему з цього положення. Оцінка стійкості розв'язків у класичному розумінні має бінарний характер: система має стійкі розв'язкі, або нестійкі, як правило, без визначення запасу стійкості. Для дослідження динаміки систем з невизначеністю характерними можуть бути оцінки стійкості типу "слабо стійка", "більш або менш стійка", "сильно стійка" і т.і.

Створення конструктивних підходів для моделювання динаміки та якісного аналізу поведінки нечітких систем можливе на основі множин Л. А. Заде [1,7,8]. Запропонована Л. А. Заде методика базується на використанні функцій належності. Ці функції дають суб'єктивне уявлення дослідника про особливість події, що досліджується, про характер обмежень і цілей дослідження. Використовуючи значення функції належності, можно формулювати принципи, що дозволяють аналізувати поведінку розв'язків систем. Таким чином, основна ідея цієї схеми дослідження полягає у створенні системи гіпотез, які записуються в термінах "суб'єктивної" належності і у подальшому формалізуються у вигляді функції належності деякій нечіткій множині.

Якщо система, що досліджується, представляється у вигляді сукупності підсистем, то аналіз поведінки системи можна провести по частинах. Розбиття часто необхідне, оскільки неможливо достатньо точно і компактно математично описати і дослідити всі різноманітні властивості повної системи. Правила розбиття визначаються конкретними цілями дослідження. Використання такого підходу приводить до необхідності врахування додаткового елементу системи — границь переходу між підсистемами. Крім цього, при аналізі кожної виділеної підсистеми потрібно враховувати її зв'язки з іншими частинами системи. У загальному випадку не існує засобів, щоб точно описати всі зв'язки підсистем. Але важливим є те, що інформація про границі переходів підсистем може бути виражена у поняттях, що мають нечіткий зміст.

У подальшому викладенні матеріалу дослідження нечіткі підмножини заданої множини X будемо називати "нечіткими множинами", а саму множину X — "універсальною множиною". Для позначення звичайних множин будемо використовувати великі літери, а нечітких множин — великі літери з хвилею.

Означення 1. ([1]) Нечіткою множиною $\tilde{A}$ універсальної множини X, називається сукупність пар $\tilde{A} = (x, \mu_{\tilde{A}}(x))|x \in X$, де $\mu_{\tilde{A}}(x) : X \to [0,1]$ — відображення множини X в одиничний відрізок [0,1], яке називається функцією належності нечіткої множини A.

Значення функції належності $\mu_{\tilde{A}}(x)$ для елемента $x \in X$ називається ступенем належності нечіткій множині. Інтерпретацією ступеня належності $\mu_{\tilde{A}}(x)$ є суб'єктивна міра того, наскільки елемент $x \in X$ відповідає поняттю, зміст якого формалізується нечіткою множиною A. Для порівняння, в класичній теорії множин належність елемента x деякій множині A можна записати в формалізованому вигляді: $x \in A$ або $x \notin A$.

Основною проблемою, що виникає при роботі з нечіткими множинами, є побудова функції належності для визначення нечіткої множини, яка полягає в тому, що "функція належності повинна бути задана поза самою теорією й, отже, її адекватність не може бути перевірена безпосередньо засобами теорії" [9].

Конкретний вид функцій належності визначається на основі різних додаткових припущень про властивості цих функцій з урахуванням специфіки задачі та характеристики наявної невизначеності. У багатьох практичних ситуаціях функція належності може бути оціненою, виходячи із часткової інформації про неї, тобто, значень, які вона приймає на скінченній множині "опорних" значень $x_1, ..., x_n$. У цьому випадку говорять, що вона є частково визначеною.

Ягер Р. Р. [10] для оцінки функцій належності використовує поняття множини рівня. Цей метод дозволяє визначити ступінь належності елементів до нечіткої підмножини A з урахуванням відомих сукупностей елементів множини X для фіксованих α — рівнів.

Серед групи методів побудови функції належності можна виділити прямі й непрямі [9, 11, 12]. У прямих методах явно задаються правила визначення функції належності (формулою, таблицею, прикладом). У непрямих методах функція належності вибирається так, щоб задовольняти деяким заздалегідь сформульованим умовам. Для кожної групи методів можлива побудова та уточнення функції належності на основі експертної інформації. При цьому експерти використовують формальні критерії, вибір яких, як правило, є суб'єктивним.

Незважаючи на існуючі проблеми, використання теорії нечітких множин дало ряд якісних практичних результатів. Серед них слід відзначити застосування нечіткої логіки як засобу формалізації процесів побудови висновків, що впроваджені в автоматизованих засобах підтримки прийняття рішень.

Базуючись на понятті нечіткої множини розроблена теорія, яка має назву "теорія можливостей" і яку розглядають як альтернативу класичній теорії імовірностей та математичної статистики. В монографії Пит'єва Ю. П. [13] показано, що теоретико-можливісні моделі дозволяють розв'язувати задачі аналізу й інтерпретації експерименту такі, наприклад, як задача оптимального оцінювання, прогнозування й т.і., не менш якісно, ніж істотно більш детальні, теоретико-імовірнісні моделі.

Багато робіт присвячено нечітким диференційним рівнянням та системам, визначено способи їх досліджень [4, 14, 15]. Для якісного аналізу розв'язків таких систем формулюються нові означення стійкості, критерії дослідження, що ґрунтуються на використанні спеціальних функцій Ляпунова або фундаментальних розв'язків системи. Однак слід відмітити, що усі запропоновані підходи мають один загальний недолік — якісний аналіз проводиться не напряму, а зводиться до дослідження стійкості класичних ("чітких") систем.

Нечіткі множини. Основні поняття та визначення

Розглянемо основні операції над нечіткими множинами. Традиційні операції доповнення, перетину та об'єднання множин у випадку нечітких множин визначаються таким чином:

– доповненням нечіткої множини $\tilde{A}$, що позначимо через $\tilde{A}^c$, є нечітка множина, для якої $\mu_{\tilde{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x),\ \forall x \in X$.

– перетином двох нечітких множин $\tilde{A}$ та $\tilde{B}$ називають нечітку множину $\tilde{C}$, для якої $\mu_{\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A}\bigcap\tilde{B}} = \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)),\ \forall x \in X$.

– об'єднанням нечітких множин $\tilde{A}$ та $\tilde{B}$ називають нечітку множину $\tilde{C}$, для якої $\mu_{\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A}\bigcup\tilde{B}} = \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)),\ \forall x \in X$.

– нечітку множину $\tilde{A}$ називають порожньою, якщо $\mu_{\tilde{A}}(x) \equiv 0,\ \forall x \in X$.

Множинами α –рівня (α –зрізи), $\alpha \in [0,1]$ нечіткої множини $\tilde{A}$ називають звичайні множини $A_\alpha = \left\{x \in X:\ \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\right\},\ \alpha \in [0,1]$.

Множину $\left\{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\right\}$ називають носієм нечіткої множини $\tilde{A}$ і позначають через supp Ã.

Для довільної нечіткої множини $\tilde{A}$ величина $h(\tilde{A}) = \max\limits_{x\in X} \mu(x)$, $h(\tilde{A}) \geq 0$, називається висотою нечіткої множини.

Для практичного використання множини рівня вважають компактними і, якщо універсальна множина X є лінійним простором, опуклими. Фактично, опуклість множини рівня нечіткої множини A_0 еквівалентна опуклості нечіткої множини.

Означення 2. Нечітка множина $\tilde{A}$ називається опуклою, якщо

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(y)) \tag{7}$$

для всіх $x, y \in X, \lambda \in [0,1]$.

Розглянемо у якості універсальної множини X скінченновимірний простір над полем дійсних чисел R^m, тобто $X = R^m$.

Нехай A та B – дві підмножини X і $\lambda \in R^1$. Додавання елементів множин A та B, а також множення на число λ визначаються у розумінні Мінковського:

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\},$$
$$\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}.$$

Припустимо, що x – деяка точка з X і A – непорожня множина. Відстань $d(x, A)$ від елемента x до A визначається у вигляді:

$$d(x,A) = \inf\{\|x - a\| : a \in A\},$$
$$d(x,A) \geq 0,$$
$$d(x,A) = 0,\ \forall x \in A,$$

де під $\|\cdot\|$ розуміється евклідова норма.

Відстань між непорожніми множинами A і B задається у вигляді [16]:

$$d_H(B,A) = \sup\{d(b,A) : b \in B\}. \tag{8}$$

Тоді, використовуючи (8), відстань між двома нечіткими множинами $\tilde{A}$ і $\tilde{B}$ універсальної множини X можна визначити у вигляді

$$d_H(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sup_{0 \le \alpha \le 1} d_H(A_\alpha, B_\alpha). \tag{9}$$

Відомо, що для довільних нечітких множин $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ справедливі співвідношення [3]:

1) $d_H(\tilde{A} + \tilde{C}, \tilde{B} + \tilde{C}) = d_H(\tilde{A}, \tilde{B})$;
2) $d_H(\tilde{A}, \tilde{B}) = d_H(\tilde{B}, \tilde{A})$;
3) $d_H(\lambda\tilde{A}, \lambda\tilde{B}) = \lambda d_H(\tilde{A}, \tilde{B}),\ \lambda \in R^1$;
4) $d_H(\tilde{A}, \tilde{B}) \le d_H(\tilde{A}, \tilde{C}) + d_H(\tilde{C}, \tilde{B})$.

Позначимо через E^n простір всіх нечітких множин в X. Визначення відстані (9) між нечіткими множинами задає в просторі E^n метрику, яка відома як метрика Хаусдорфа [16]. При цьому (E^n, d_H) є повним метричним простором.

Для нечіткої множини $\tilde{A}$ з E^n справедливі властивості [3]:

1) $\mu_{\tilde{A}}(x) \in [0, 1],\ \forall x \in X$;
2) A_0 обмежена множина в X;
3) $A_\alpha,\ \alpha \in [0, 1]$ – компактні множини в X;
4) $\tilde{A}$ – опукла множина в розумінні (7).

Зауважимо також, що, якщо $\tilde{A}$ – опукла множина і $x, y \in A_\alpha$ для деякого $\alpha \in (0, 1]$, то $\mu_{\tilde{A}}(x) \ge \alpha$, $\mu_{\tilde{A}}(y) \ge \alpha$, і, як наслідок, $\mu_{\tilde{A}}(\lambda x + (1 - \lambda)y) \ge$ $\ge \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(y)) \ge \alpha$ для довільного $\alpha \in [0, 1]$. Це означає, що точка $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A_\alpha$ і A_α є опуклою підмножиною універсальної множини X, $\alpha \in [0, 1]$.

Для довільної нечіткої множини $\tilde{A}$ має місце представлення через множини рівня [17]:

$$\tilde{A} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \tilde{A}_\alpha, \tag{10}$$

де $\tilde{A}_\alpha$ – нечітка множина з функцією належності $\mu_{\tilde{A}_\alpha}(x) = \alpha$, $x \in X$.

Означення 3. Нечітку множину $\tilde{A}^H$ назвемо нормованою по відношенню до нечіткої множини $\tilde{A}$, якщо для $\forall\, x \in X:\ \mu_{\tilde{A}^H}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \Big/ h(\tilde{A})$.

Очевидно, що частковим випадком нормованої нечіткої множини буде нечітка множина, для якої $h(\ \tilde{A}\ )$=1.

Означення 4. Нечітким відображенням $\tilde{R}$ з X у довільний скінченновимірний простір Y називається нечітка множина $\tilde{R}$ в $X \times Y$ з функцією належності

$$\mu_{\tilde{R}}(x, y):\ X \times Y \to [0, 1],\ x \in X, y \in Y. \tag{11}$$

Подальшим розвитком нечітких множин є невизначені нечіткі множини. Як було зазначено в роботі Орловського С. А. [18], рівні представлення нечіткості (неточності, невизначеності) можуть бути узагальнені за допомогою нечітких множин довільного степеня ієрархії.

Поняття невизначених нечітких множин, запропоноване Ю. П. Пит'євим [13], базується на неможливості точної оцінки рівня належності елементів $x \in X$ до множини $\tilde{A}$.

Означення 5. Невизначеною нечіткою множиною (ННМ) $\tilde{\tilde{A}}$ в X будемо називати множину $\left\{\left(x, \mu\left(x\right); \tau_{\tilde{\tilde{A}}}\left(x, \mu\left(x\right)\right)\right)\right\}$, в якій для кожного $x \in X$ значення функції $\tau_{\tilde{\tilde{A}}}\left(x, \mu\left(x\right)\right) \in [0, 1]$ визначає рівень достовірності того, що величина $\mu\left(x\right) \in [0, 1]$ задає ступінь включення x до нечіткої множини $\tilde{A}$.

Наприклад, якщо $\tau_{\tilde{\tilde{A}}}\left(x, \mu\left(x\right)\right) = 1$, то "цілком достовірно", що $\mu\left(x\right)$ задає ступінь належності елемента $x \in X$ нечіткій множині $\tilde{A}$. Якщо $\tau_{\tilde{\tilde{A}}}\left(x, \mu\left(x\right)\right) = 0,5$, тоді "невідомо", чи можна вважати, що $\mu\left(x\right)$ – рівень належності x до $\tilde{A}$, і, нарешті, якщо $\tau_{\tilde{\tilde{A}}}\left(x, \mu\left(x\right)\right) = 0$, "неправдоподібно", що $\mu\left(x\right)$ задає ступінь включення x до $\tilde{A}$.

Означення 6. Невизначена нечітка множина $\tilde{\tilde{A}}^*$ називається верхньою спряженою ННМ для заданої невизначеної нечіткої множини $\tilde{\tilde{A}}$, якщо $\forall x \in X,\ \mu(x) \in [0, 1], \left(x, \mu(x); \tau_{\tilde{\tilde{A}}^*}(x, \mu(x))\right) \in \tilde{\tilde{A}}$ виконується

$$\tau_{\tilde{\tilde{A}}^*}\left(x, \mu\right) = \sup_{\alpha \geq \mu} \tau_{\tilde{\tilde{A}}}\left(x, \alpha\right). \tag{12}$$

Означення 7. Невизначена нечітка множина $\tilde{\tilde{A}}^*$ називається нижньою спряженою ННМ для заданої невизначеної нечіткої множини $\tilde{\tilde{A}}$, якщо $\forall x \in X,\ \mu(x) \in [0, 1], \left(x, \mu(x); \tau_{\tilde{\tilde{A}}_*}(x, \mu(x))\right) \in \tilde{\tilde{A}}$ виконується

$$\tau_{\tilde{\tilde{A}}_*}\left(x, \mu\right) = \sup_{\alpha \leq \mu} \tau_{\tilde{\tilde{A}}}\left(x, \alpha\right). \tag{13}$$

Припустимо, що для невизначеної нечіткої множини $\tilde{\tilde{A}}$ виконується умова: $\neg\exists x : \left\{\left(x, \mu\left(x\right); \tau^1_{\tilde{\tilde{A}}}\left(x, \mu\left(x\right)\right)\right)\right\} \in \tilde{\tilde{A}}$, $\left\{\left(x, \mu\left(x\right); \tau^2_{\tilde{\tilde{A}}}\left(x, \mu\left(x\right)\right)\right)\right\} \in \tilde{\tilde{A}}$.

Тоді, виходячи з наведених вище визначень, нескладно зрозуміти, що для будь-якої невизначеної нечіткої множини $\tilde{\tilde{A}}$ можна отримати нечітку множину $\tilde{A}$ заданого рівня достовірності $\tau_{\tilde{\tilde{A}}}\left(x, \mu(x)\right) = \beta$. Будемо позначати такі множини $\bar{\tilde{A}}_\beta$:

$$\bar{\tilde{A}}_\beta = \left\{\left\{\left(x, \mu_{\tilde{A}}(x)\right)\right\} \in E^n : \tau_{\tilde{\tilde{A}}}\left(x, \mu_{\tilde{A}}(x)\right) \geq \beta\right\}. \tag{14}$$

За таких умов невизначена нечітка множина $\tilde{\tilde{A}}$ представляється у вигляді:

$$\tilde{\tilde{A}} = \bigcup_{\beta \in [0,1]} \tilde{\tilde{A}}_\beta, \tag{15}$$

де $\tilde{\tilde{A}}_\beta$ — невизначена нечітка множина з рівнем достовірності $\tau_{\tilde{\tilde{A}}}\left(x, \mu(x)\right) = \beta$, $x \in X$, $\mu(x) \in [0, 1]$, $(x, \mu(x)) \in E^n$.

Означення 8. Невизначену нечітку множину $\tilde{\tilde{V}}$ будемо називати β – регулярною, $\beta \in [0,1]$, якщо регулярною буде множина $\bar{\tilde{V}}_\beta$.

Означення 9. Невизначену нечітку множину $\tilde{\tilde{V}}$ будемо називати нормовано β–регулярною, $\beta \in [0,1]$, якщо нормовано регулярною буде множина $\bar{\tilde{V}}_\beta$.

Означення 10. Невизначену нечітку множину $\tilde{\tilde{V}}$ будемо називати регулярною, якщо для $\forall \beta \in [0,1]$ нечітка множина $\bar{\tilde{V}}_\beta$ буде нормовано регулярною, або, іншими словами, для $\forall \beta \in [0,1]$ множина $\tilde{\tilde{V}}$ є нормовано β–регулярною.

Іншим узагальненням поняття нечітких множин є складені нечіткі множини. Нехай задано сукупність нечітких множин $\tilde{A}_1$, ..., $\tilde{A}_m$, що визначені у відповідних універсальних множинах $X_1, \ldots, X_m$. Для простоти будемо вважати, що $X_i \subseteq R^1,\ i = \overline{1,m}$.

Розглянемо універсальну множину X у вигляді декартового добутку $X = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{m} X_i$. Сформуємо множину $\tilde{A}^m = \{(x^1, \mu_{\tilde{A}_1}(x^1)), (x^2, \mu_{\tilde{A}_2}(x^2)), ..., (x^m, \mu_{\tilde{A}_m}(x^m))\}$, де $x^i \in X_i,\ i = \overline{1,m}$.

Означення 11. Множину $\tilde{A}^m$ назвемо складеною нечіткою множиною в універсальній множині $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{m} X_i$.

Скінченний набір складених нечітких множин $\tilde{A}^m$ в множині $X = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{m} X_i$ позначимо $K(\tilde{A}^m)$, $|K(\tilde{A}^m)| = k$. По аналогії з нечіткими множинами введемо означення.

Означення 12. Множину $L_0^m = \{x^1 \in X_1, x^2 \in X_2, ..., x^m \in X_m : \mu_{\tilde{A}_1}(x^1) > 0, \mu_{\tilde{A}_2}(x^2) > 0, ..., \mu_{\tilde{A}_m}(x^m) > 0\}$, $L_0^m \subseteq X_1 \times X_2 \times ... \times X_m$, будемо називати носієм складеної нечіткої множини $\tilde{A}^m$.

Означення 13. Множину $L^m(\alpha) = \{x^1 \in X_1, x^2 \in X_2, ..., x^m \in X_m : \mu_{\tilde{A}_1}(x^1) \geq \alpha, \mu_{\tilde{A}_2}(x^2) \geq \alpha, ..., \mu_{\tilde{A}_m}(x^m) \geq \alpha\}$ назвемо множиною рівня $\alpha \in (0,1]$ складеної нечіткої множини $\tilde{A}^m$.

Тоді множини $L_{0_i} = \Big\{x \in X_i : \mu_{\tilde{A}_i}(x) > 0\Big\}$, $i = \overline{1,m}$, будуть носіями відповідних нечітких множин $\tilde{A}_1$, ... , $\tilde{A}_m$, множини $L_i(\alpha) = \Big\{x \in X_i : \mu_{\tilde{A}_i}(x) \geq \alpha\Big\}$, $i = \overline{1,m}$, — множинами рівня $\alpha \in (0,1]$ нечітких множин $\tilde{A}_i,\ i = \overline{1,m}$, і справедливі такі рівності:

$$L_0^m = L_{0_1} \times L_{0_2} \times ... \times L_{0_m},$$

$$L^m(\alpha) = L_1(\alpha) \times L_2(\alpha) \times ... \times L_m(\alpha).$$

Розглянемо дві довільні складені нечіткі множини

$$\tilde{U}^m = \{(x^1, \mu^U_{\tilde{A}_1}(x^1)), (x^2, \mu^U_{\tilde{A}_2}(x^2)), ..., (x^m, \mu^U_{\tilde{A}_m}(x^m))\},$$

$$\tilde{V}^m = \{(y^1, \mu^V_{\tilde{A}_1}(y^1)), (y^2, \mu^V_{\tilde{A}_2}(y^2)), ..., (y^m, \mu^V_{\tilde{A}_m}(y^m))\}.$$

Обчислимо величину $\gamma = \min\limits_{i=\overline{1,m}} \min\left\{\mu^U_{\tilde{A}_i}(x^i), \mu^V_{\tilde{A}_i}(y^i)\right\}$, яка є мінімальним значенням серед значень мір належності окремих елементів обох множин $\tilde{U}^m, \tilde{V}^m$. Це значення дозволяє побудувати дві множини рівня γ у вигляді звичайних множин $L^m_{\tilde{U}}(\gamma), L^m_{\tilde{V}}(\gamma)$, що визначають точки універсальної множини $X = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{m} X_i$, між якими може бути обчислена евклідова відстань $d = \left\| L^m_{\tilde{U}}(\gamma) - L^m_{\tilde{V}}(\gamma) \right\|$.

Означення 14. Нечітка множина точок за Уонгом $\tilde{D}(\tilde{A}^m) = \{(d, \gamma) : d = \left\| L^m_{\tilde{A}}(\gamma) \right\|, \gamma = \min\limits_{i=\overline{1,m}} \mu_{\tilde{A}_i}(x^i) \in (0, 1]\}$, де $\|\cdot\|$ - евклідова норма простору R^m, визначає метрику на множині $K(\tilde{A}^m)$.

Таким чином, кожна складена нечітка множина $\tilde{A}^m$ «вимірюється» за допомогою нечіткої величини $\tilde{D}(\tilde{A}^m)$, а для знаходження нечіткої відстані $\rho(\tilde{U}^m, \tilde{V}^m)$ між довільними складеними нечіткими множинами $\tilde{U}^m, \tilde{V}^m$ буде використовуватися нечітка величина

$$\rho(\tilde{U}^m, \tilde{V}^m) = \{(d, \gamma) : d = \left\| L^m_{\tilde{U}}(\gamma) - L^m_{\tilde{V}}(\gamma) \right\|, \tag{16}$$

$$\gamma = \min_{Z \in \{U,V\}, i=\overline{1,m}} \mu^Z_{\tilde{A}_i}(x^i)\},$$

де $L^m_{\tilde{U}}(\gamma)$, $L^m_{\tilde{V}}(\gamma)$ — множини рівня $\gamma \in (0, 1]$ складених нечітких множин $\tilde{U}^m, \tilde{V}^m$ відповідно.

Порівняння відстаней між двома довільними парами складених нечітких множин проводиться за допомогою нечіткого відношення переваги [18, 19]. Розширемо цей підхід на випадок складених нечітких множин.

Нехай $\tilde{\rho}_1 = \rho(\tilde{U}^m_1, \tilde{V}^m_1), \tilde{\rho}_2 = \rho(\tilde{U}^m_2, \tilde{V}^m_2)$ — нечіткі відстані між складеними нечіткими множинами $\tilde{U}^m_1, \tilde{V}^m_1$ та $\tilde{U}^m_2, \tilde{V}^m_2$ відповідно. Визначимо ту нечітку відстань з двох заданих, яка є меншою у розумінні нечіткого відношення переваги "$<$" $g(a, b)$ [18], за яким для довільних нечітких елементів $a \in \tilde{A}, b \in \tilde{B}$ за умови $\mu_g(a, b) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(a), \mu_{\tilde{B}}(b), \mu_{\tilde{A}\times\tilde{B}}(a, b)\} > 0$ задається співвідношення $a < b$ із ступенем $g(a, b) = \mu_g(a, b)$.

За його допомогою можна порівняти відстані $\tilde{\rho}_1 = \rho(\tilde{U}^m_1, \tilde{V}^m_1)$ та $\tilde{\rho}_2 = \rho(\tilde{U}^m_2, \tilde{V}^m_2)$: вираз $g(\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2)$ визначає ступінь того, наскільки $\tilde{\rho}_1$ «менше», ніж $\tilde{\rho}_2$. Це також надає можливість визначити "найближчий" до заданої складеної нечіткої множини $\tilde{Z}^0$ елемент $\tilde{Z}^*$, де $\tilde{Z}^*$ — складена нечітка множина, значення функцій належності якої для кожного $x^i \in X_i$, $i = \overline{1, m}$, визначаються з співвідношень

$$\mu^{Z^*}_{\tilde{A}_i}(x_i) = \min_{x \in X_i}(1 - \mu_T(x_i, x)) = 1 - \max_{x \in X_i} \mu_T(x_i, x), \ i = \overline{1, m}, \tag{17}$$

де через T позначено нечітке відношення строгої переваги, що відповідає $g(a,b)$, $a,b \in X_i$, $i = \overline{1,m}$,

$$\mu_T(a,b) = \begin{cases} 0, & \mu_g(a,b) < \mu_g(b,a)\ , \\ \mu_g(a,b) - \mu_g(b,a), & \text{інакше.} \end{cases} \tag{18}$$

Деякі задачі дослідження динаміки нечітких систем

Розглянемо задачу моделювання динаміки нечітких різницевих динамічних систем. Задамо множину $T = \{0,1,2,...\}$, що визначає дискретні моменти часу, покладемо $X = R^n$.

Припустимо, що загальна модель нечіткої різницевої системи має вигляд

$$\tilde{X}_{k+1} = \mathrm{R}_k \circ \tilde{X}_k, k = 0,1,2,..., \tag{19}$$

де $\tilde{X}(t_0) = \tilde{X}_0 \in E^n$ — компактна множина початкових станів, $\tilde{X}(t_k) = \tilde{X}_k$, — нечіткі множини в $X = R^n$ можливих станів системи в моменти часу $t_k \in T$, що визначають розв'язки системи, $\mathrm{R}(t_k) = \mathrm{R}_k$ — відображення з X в X, що визначають переходи системи, $k = 0,1,2,...$, "$\circ$" — операція композиції.

Означення 15. Траєкторією системи (19) назвемо послідовність $\{x(t_k) = x_k \in X_k = \mathrm{supp}\tilde{X}_k \subset X\}, k = 0,1,2,...$, для елементів якої справедливі співвідношення

$$x_{k+1} = \mathrm{R}_k \circ x_k, k = 0,1,2,... \,. \tag{20}$$

Нескладно помітити, що будь-який розв'язок системи (19) складається з множини траєкторій.

Означення 16. Траєкторію системи (19) $\{\bar{x}_k\}, k = 0,1,2,...$ будемо називати регулярною (РТС), якщо для її елементів справедлива умова

$$\mu_k = \mu(\bar{x}_k) = 1, k = 0,1,2,... \,. \tag{21}$$

Отримано висновок, що нечітка різницева система (19) за умов неперервності операторів $\mathrm{R}_k, k = 0,1,2,...$ завжди має розв'язок, який, взагалі кажучи, може бути неєдиним для початкових даних $\tilde{X}_0$.

Як частковий випадок розглянуто динаміку нечіткої різницевої системи (19) з n станами. Перепишемо систему у вигляді моделі динаміки змін функцій належності:

$$\mu_{k+1}(x) = \mathrm{A}_k \circ \mu_k(x), k = 0,1,2,..., \tag{22}$$

де $\mathrm{A}_k, k = 0,1,2,...$ — оператори, що визначають зміну значень функцій належності, $\mu_k(x) = (\mu_k(x_1),...,\mu_k(x_n))^T = \mu_{\tilde{X}_k}(x)$,
$\mu_{k+1}(x) = (\mu_{k+1}(x_1),...,\mu_{k+1}(x_n))^T = \mu_{\tilde{X}_{k+1}}(x)$ — вектор-функції належності нечітких множин $\tilde{X}(t)$ в моменти часу t_k, t_{k+1} відповідно.

У співвідношеннях (22) оператори $\mathrm{A}_k, k = 0,1,2,...$, вважаються однорідними адитивними операторами з матрицями $A_k, k = 0,1,2,...$, для яких

$$\mathrm{A}_k \circ (\lambda \mu_k) = \lambda \mathrm{A}_k \circ \mu_k, k = 0,1,2,..., \tag{23}$$

де $\lambda > 0$ — довільне число, що обирається з урахуванням обмеження $\lambda\mu_k(x) \le 1,\ x \in X, k = 0,1,2,...$, а для визначення результату операції композиції "$\circ$" використовуються спеціальні алгоритми.

Для нечіткої різницевої системи виду $\tilde{X}_{k+1} = \tilde{X}_k + f(\tilde{X}_k), k = 0,1,2,...$, де $f(\cdot)$ є неперервним на X, апріорі невідомим оператором, який визначає нечіткість переходів в різницевій системі, сформульовані і доведені твердження "неперервності" розв'язків нечітких систем.

Твердження 1. *Припустимо, що для* $\forall k = 0,1,2,...$

$$d_H(f(\tilde{X}_k^1), f(\tilde{X}_k^2)) \le g(d_H(\tilde{X}_k^1, \tilde{X}_k^2)), \tag{24}$$

де $g(\cdot)$ *— неперервна додатна функція на* R_+^1.

Позначимо через $r_k(w_0), k = 0,1,2,...$ *— максимальний розв'язок скалярного різницевого рівняння* $w_{k+1} = w_k + g(w_k), w_0 \ge 0, k = 0,1,2,...$.

Тоді для кожного $k = 0,1,2,...$ *справедливі нерівності*

$$d_H(\tilde{X}_k^1, \tilde{X}_k^2) \le r_k(w_0), \quad d_H(\tilde{X}_0^1, \tilde{X}_0^2) \le w_0.$$

Встановлено, що для системи (22) неперервність розв'язків дискретних систем визначається відповідними властивостями функції належності $\mu(x)$, що, в свою чергу, гарантується неперервністю операторів $\mathrm{A}_k, k = 0,1,2,...$.

Для реалізації операції композиції в нечіткій дискретній системі (22) запропоновано три схеми на основі дій з матрицями $A_k, k = 0,1,2,...$ ([20]).

Наступним питанням дослідження є уточнення моделей нечітких різницевих систем з урахуванням експертної інформації. Формалізуємо процес зміни функції належності нечітких множин у вигляді рівняння

$$\mu_{k+1}(x) = A_k \circ \mu_k(x) - B_k \circ (l - \tau_k(x)), \tag{25}$$

де $\tau_k(x), k = 0,1,2,...$ — вектори показників достовірності того, що x належить $\tilde{X}_k$ з мірою належності $\mu_k(x)$, $\tau_k = (\tau_{kj})_{j=\overline{1,n}}$, $0 \le \tau_{kj} \le 1$, B_k, $k = 0,1,2,...$, — матриці розміру $n \times n$, $x \in \operatorname{supp} \tilde{X}_k = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $l = (1,1,...,1)^T$ — вектор розміру n.

Обчислення величин управляючих впливів $\tau_k, k = 0,1,2,...$ в (25) здійснюються на основі рекурентної процедури розрахунку коефіцієнтів компетентності:

$$g_i^{kp} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^k \tau_{kj}^{p-1}\ ,\ i = \overline{1,n}, \quad \lambda_k^p = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^k g_i^{kp},\ p = 1,2,...m, \tag{26}$$

$$\tau_{kj}^p = \frac{1}{\lambda_k^p}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^k g_i^{kp},\ j = \overline{1,n}, \quad \sum_{j=1}^{n} \tau_{kj}^p = 1,$$

де a_{ij}^k — елементи матриць A_k, $k = 0,1,2,...,$ $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, τ_{kj}^p — рівні компетентності експертів, $k = 0,1,2,...,$ $j = \overline{1,n}$, g_i^{kp} — групові оцінки i-того стану, $k = 0,1,2,...,$ $i = \overline{1,n}$, λ_k^p — додаткові величини, p — номер ітерації.

Для дослідження стійкоподібних властивостей нечітких систем проведений якісній аналіз (див.[20]) загальної нечіткої різницевої моделі(19). Розглянуто різні випадки нечітких станів $\tilde{X}_k, k = 0, 1, 2, \ldots$.

1) Модель (19) має регулярну траєкторію $\{\bar{x}_k\}_{k=0,1,2,\ldots}$, $\bar{x}_k \in \operatorname{supp} \tilde{X}_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Означення 17. РТС (19) $\{\bar{x}_k\},\ k = 0, 1, 2, \ldots$ називається стійкою за Ляпуновим, якщо $\forall \bar{T} > 0,\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0\ \ \exists \delta(\varepsilon, \eta, \bar{T}) > 0,\ \ \gamma(\varepsilon, \eta, \bar{T}) > 0$ такі, що для довільної траєкторії $\{x_k\}, k = 0, 1, 2, \ldots,$ системи (19), початкові умови якої задовольняють нерівності

$$||\bar{x}_0 - x_0|| < \delta, \quad |\mu(x_0) - 1| < \gamma, \tag{27}$$

$\forall k : t_k \geq \bar{T}$ справедливі нерівності

$$||\bar{x}_k - x_k|| < \varepsilon, \quad |\mu(x_k) - 1| < \eta, \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{28}$$

Означення 18. РТС (19) $\{\bar{x}_k\},\ k = 0, 1, 2, \ldots$ називається асимптотично стійкою, якщо вона є стійкою і для будь-якої траєкторії $\{x_k\},\ k = 0, 1, 2, \ldots,$

$$\lim_{k\to\infty}||x_k - \bar{x}_k|| = 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots,\ \lim_{k\to\infty} \mu(x_k) = 1,\ k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{29}$$

Означення 19. РТС (19) $\{\bar{x}_k\},\ k = 0, 1, 2, \ldots$ називається стійкою (асимптотично стійкою) за степенем належності, якщо $\forall \bar{T} > 0,\ \ \forall \eta > 0,$ $\exists \gamma(\eta, \bar{T}) > 0$ таке, що для будь-якої траєкторії $\{x_k\}, k = 0, 1, 2, \ldots,$ системи (19), початкові умови якої задовольняють нерівності

$$|\mu(x_0) - 1| < \gamma, \tag{30}$$

$\forall k : t_k \geq \bar{T}$ справедливі нерівності

$$|\mu(x_k) - 1| < \eta,\ k = 0, 1, 2, \ldots\ (\lim_{k\to\infty}\mu(x_k) = 1,\ k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{31}$$

Теорема 1. *Якщо система (19) має регулярну траєкторію* $\{\bar{x}_k\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ *та існують функції* $V : X \to [0, 1]$ *та* $G : [0, 1] \to [0, 1]$ *такі, що для будь-якої траєкторії системи (19)* $\{x_k\}, k = 0, 1, 2, \ldots,$ *виконуються наступні нерівності:*

$$V_k = V(x_k) \geq 0,\ \ V(\bar{x}_k) = 0,\ \ \Delta V_k = V_{k+1} - V_k \leq 0, \tag{32}$$

$$G_k = G(\mu(x_k)) \geq 0,\ \ G(\bar{\mu}(x_k)) = G(1) = 0,\ \ \Delta G_k = G_{k+1} - G_k \leq (<)\, 0,$$

$k = 0, 1, 2, \ldots,$ *то РТС є стійкою (асимптотично стійкою) за Ляпуновим.*

Теорема 2. *Якщо система (19) має регулярну траєкторію* $\{\bar{x}_k\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ *та існує функція* $G : [0, 1] \to [0, 1]$ *така, що для будь-якої траєкторії системи (19)* $\{x_k\}, k = 0, 1, 2, \ldots,$ *виконуються наступні нерівності:*

$$G_k = G(\mu(x_k)) \geq 0,\ \ G(\bar{\mu}(x_k)) = G(1) = 0,\ \ \Delta G_k = G_{k+1} - G_k \leq (<) 0, \tag{33}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots,$ *то РТС є стійкою (асимптотично стійкою) за степенем належності.*

2) Припустимо, що система (19) не має регулярної траєкторії. Це означає, що для будь-якої траєкторії $\{x_k\}, x_k \in \text{supp}\ \tilde{X}_k,\ k=0,1,2,...$, системи (19) існує момент часу $t_m\ \in T$, що виконується нерівність $\mu(x_m)<1$. За таких умов розглянемо два випадки.
а) Нехай множина $Y_0 \subseteq X_0 = \text{supp}\ \tilde{X}_0 \in X$ містить множину початкових станів усіх траєкторій, для яких існує такий момент часу $t_k \in T$, що $\mu(x_k)=1$.

Означення 20. Нечітка множина $\tilde{Y}_0 = \{(y,\mu(y)) : y \in Y_0\}$ називається стійкою за Ляпуновим, якщо для будь-якої траєкторії $\{x_k\},\ k=0,1,2,...$, $x_0 \notin Y_0$, системи (19) $\forall \bar{T}>0,\ \forall\varepsilon>0,\ \forall\eta>0,\ \exists\delta(\varepsilon,\eta,\bar{T})>0,\ \gamma(\varepsilon,\eta,\bar{T})>0$, початкові умови якої задовольняють нерівностям

$$d(x_0,Y_0)<\delta, \quad |\mu(x_0)-1|<\gamma, \tag{34}$$

$\forall k : t_k \geq \bar{T}$ справедливі нерівності

$$d(x_k,Y_0)<\varepsilon,\ |\mu(x_k)-1|<\eta, \quad k=0,1,2,..., \tag{35}$$

де $d(\cdot,\cdot)$ — відстань від точки до множини.

Означення 21. Нечітка множина $\tilde{Y}_0 = \{(y,\mu(y)) : y \in Y_0\}$ називається асимптотично стійкою за Ляпуновим, якщо вона є стійкою за Ляпуновим і для довільної траєкторії $\{x_k\}, k=0,1,2,...$, системи (19) справедливі умови

$$\lim\nolimits_{k\to\infty} d(x_k,Y_0)=0,\ k=0,1,2,...,\ \lim\nolimits_{k\to\infty}\mu(x_k)=1,\ k=0,1,2,...\ . \tag{36}$$

Означення 22. Нечітка множина $\tilde{Y}_0 = \{(y,\mu(y)) : y \in Y_0\}$ називається стійкою (асимптотично стійкою) за степенем належності, якщо для будь-якої траєкторії $\{x_k\},\ k=0,1,2,...,\ x_0 \notin Y_0$, системи (19) $\forall\bar{T}>0$, $\forall\eta>0,\ \exists\gamma(\eta,\bar{T})>0$, початкові умови якої задовольняють нерівності

$$|\mu(x_0)-1|<\gamma, \tag{37}$$

$\forall k : t_k \geq \bar{T}$ справедливі співвідношення

$$|\mu(x_k)-1|<\eta, \quad k=0,1,2,...,\ (\lim\nolimits_{k\to\infty}\mu(x_k)=1,\ k=0,1,2,...). \tag{38}$$

Справедливі такі твердження.

Теорема 3. *Якщо система (19) не має регулярної траєкторії і для нечіткої множини початкових станів траєкторій* $\tilde{Y}_0$ *існують функції* $V : X \to [0,1]$ *та* $G : [0,1] \to [0,1]$ *такі, що для будь-якої траєкторії системи (19)* $\{x_k\},\ k=0,1,2,...,\ x_0 \notin Y_0 = supp\,\tilde{Y}_0$, *виконуються нерівності*

$$\begin{aligned} &V(x_k)=0, x_k \in \partial Y,\ \ V_k=V(x_k)\geq 0,\ \ \Delta V_k=V_{k+1}-V_k \leq 0,\\ &G_k=G(\mu(x_k))\geq 0,\ \ \Delta G_k=G_{k+1}-G_k \leq (<)\,0, \end{aligned} \tag{39}$$

$k=0,1,2,...$, *то нечітка множина* $\tilde{Y}_0$ *є стійкою (асимптотично стійкою) за Ляпуновим.*

Теорема 4. *Якщо система (19) не має регулярної траєкторії і для нечіткої множини* $\tilde{Y}_0$ *початкових станів траєкторій існує функція* G :

$[0,1] \to [0,1]$ *така, що для будь-якої траєкторії системи (19)* $\{x_k\}$, $k = 0,1,2,...,$ $x_0 \notin Y_0 = supp\ \tilde{Y}_0$ *виконуються нерівності*

$$G_k = G(\mu(x_k)) \geq 0,\ \Delta G_k = G_{k+1} - G_k < 0, \tag{40}$$

$k = 0,1,2,...,$ *то* $\tilde{Y}_0$ *— стійка (асимптотично стійка) за степенем належності нечітка множина.*

б) Припустимо, що неможливо виділити множину Y_0. В цьому випадку аналізують стійкість нечіткої початкової множини за рівнем належності.

Позначимо через $\tilde{X}_k^0 = \{(x, \mu_k^0(x)) : x \in X\}, k = 0,1,2,...$ розв'язок системи (19) з початковими умовами $\tilde{X}^0 = \{(x, \mu_0(x)) : x \in X\}$, де $\mu_0^0(x) = \mu_0(x),\ x \in X$.

Означення 23. Нечітка множина $\tilde{X}^0 = \{(x, \mu_0(x)) : x \in X\}$ називається стійкою (асимптотично стійкою) за степенем належності, якщо $\forall \bar{T} > 0$, $\forall \eta > 0,\ \exists \gamma(\eta, \bar{T}) > 0$ для довільного розв'язку $\tilde{X}_k^1 = \{(x, \mu_k^1(x)) : x \in X\}$, $k = 0,1,2,...,$ системи (19), початкове значення якого задовольняє умові

$$\max\nolimits_{x \in X} |\mu_0^0(x) - \mu_0^1(x)| < \gamma \tag{41}$$

$\forall k : t_k \geq \bar{T}$ справедливі співвідношення

$$\max\nolimits_{x \in X} |\mu_k^0(x) - \mu_k^1(x)| < \eta,\ k = 0,1,2,..., \tag{42}$$

$$(\lim\nolimits_{k \to \infty} \max\nolimits_{x \in X} |\mu_k^0(x) - \mu_k^1(x)| = 0,\ k = 0,1,2,...).$$

Теорема 5. *Якщо для нечіткої множини* $\tilde{X}^0$ *початкових станів нечіткої дискретної системи (19) існує функція* $G : [0,1] \to [0,1]$, $G(\mu_k(x)) = \max_{x \in X} |\mu_k^0(x) - \mu_k(x)|,\ k = 0,1,2,...$ *така, що для будь-якого розв'язку системи (19)* $\tilde{X}_k^1,\ k = 0,1,2,...,$ $\mu_0^1(x) \neq \mu_0^0(x),\ x \in X$ *виконуються нерівності*

$$G_k = G(\mu_k^1(x)) \geq 0,\ x \in X,\ \ \Delta G_k = G_{k+1} - G_k \leq (<)\ 0, \tag{43}$$

$k = 0,1,2,...,$ *то нечітка множина* $\tilde{X}_0$ *— стійка (асимптотично стійка) за степенем належності.*

Вирішено задачу спостереження початкового стану в невизначених нечітких динамічних системах [21]. Вважається, що об'єкт спостереження описується різницевою невизначеною нечіткою системою

$$\tilde{\tilde{X}}_{k+1} = \mathrm{R}_k \circ \tilde{\tilde{X}}_k,\ k = 0,1,2,..., \tag{44}$$

де $\tilde{\tilde{X}}(t_o) = \tilde{\tilde{X}}_0$ — невизначена нечітка множина початкових станів; $\tilde{\tilde{X}}(t_k) = \tilde{\tilde{X}}_k,\ k = 0,1,2,...,$ — невизначені нечіткі множини можливих станів системи в моменти часу $t_k \in T$, $\mathrm{R}(t_k) = \mathrm{R}_k,\ k = 0,1,2,...$ — деякі невизначені нечіткі відображення, що визначають переходи системи.

Нехай для заданого рівня достовірності $\beta \in [0,1]$ множини $\bar{\tilde{X}}_k^\beta$, $k = 0,1,2,...,$ є нормовано регулярними нечіткими множинами.

Означення 24. Під траєкторією, що реалізується на рівні достовірності $\beta \in [0,1]$, будемо розуміти послідовність нечітких множин $\bar{\tilde{X}}_k^\beta$, $k=0,1,2,...$, для елементів яких

$$x_k^\beta \in \mathrm{supp}\bar{\tilde{X}}_k^\beta,\ k=0,1,2,..., \quad \beta \in [0,1],$$

$\forall k=0,1,2,...\ \exists$ єдиний елемент $\bar{x}_k^\beta : \mu(\bar{x}_k^\beta)=1,\ k=0,1,2,...$.

Інформація про реалізовані стани системи (44) задається у вигляді послідовності невизначених нечітких множин $\tilde{\tilde{Y}}_k,\ k=0,1,2,...$, які будемо представляти за рівнями достовірності у вигляді

$$\tilde{\tilde{Y}}_k = \bigcup_{\beta\in[0,1]} \bar{\tilde{Y}}_k^\beta,\ k=0,1,2,..., \tag{45}$$

де $\bar{\tilde{Y}}_k^\beta$, $k=0,1,2,...$, — нечіткі множини з рівнем достовірності $\tau(x,\mu(x))=\beta,\ \beta\in[0,1]$.

Нехай нечіткі множини $\bar{\tilde{Y}}_k^{\beta*},\ k=0,1,2,...,\beta\in[0,1]$ задають деякий вихід, що реалізувався. Розв'язком задачі спостереження на рівні достовірності $\beta\in[0,1]$ будемо називати нечітку множину $\bar{\tilde{X}}_0^{\beta*}$, $\beta\in[0,1]$ початкових станів, сумісних із заданим виходом, у яких множини можливих виходів "близькі" до $\bar{\tilde{Y}}_k^{\beta*},\ k=0,1,2,...,\beta\in[0,1]$ в деякому розумінні.

Позначимо

$$S_k^{\beta*} = \{\bar{\tilde{X}}_k^\beta \in E^n : \mu_{\tilde{C}_k}\ (x_k^\beta, y_k^{\beta*}) > 0, x_k^\beta \in \mathrm{supp}\ \bar{\tilde{X}}_k^\beta,$$
$$y_k^{\beta*} \in \mathrm{supp}\ \bar{\tilde{Y}}_k^{\beta*}\},\ k=0,1,2,...,\beta\in[0,1],$$

де $\tilde{C}_k, k=0,1,2,...$ — задані нечіткі відображення.

Скорегованою траєкторію системи на рівні достовірності $\beta\in[0,1]$ називають нечіткі множини $\tilde{Z}_0^\beta = \bar{\tilde{X}}_0^\beta,\ \tilde{Z}_k^\beta = \bar{\tilde{X}}_k^\beta \cap S_k^{\beta*},\ k=1,2,...$.

Початковий стан $\bar{\tilde{X}}_0^\beta$ на рівні достовірності $\beta\in[0,1]$ сумісний із заданим виходом $\bar{\tilde{Y}}_k^{\beta*},\ k=0,1,2,...$, якщо $\tilde{Z}_k^\beta \neq\emptyset,\ k=0,1,2,...$. Множину всіх початкових станів на рівні достовірності $\beta\in[0,1]$, сумісних з $\bar{\tilde{Y}}_k^{\beta*}$, $k=0,1,2,...,\ \beta\in[0,1]$, позначимо як $E_{\beta S}^n$. Якщо для заданого початкового стану $\bar{\tilde{X}}_0^\beta,\ \beta\in[0,1]$, сумісного із заданим виходом $\bar{\tilde{Y}}_k^{\beta*},\ k=0,1,2,...$, $\beta\in[0,1]$, скореговані множини $\tilde{Z}_k^\beta, k=0,1,2,...$, є нормовано регулярними нечіткими множинами, то множину таких початкових станів позначимо $E_{\beta R}^n$.

Лема 1. *Для $\forall\beta\in[0,1]$ кожний нормовано регулярний нечіткий початковий стан системи (44) сумісний з заданим виходом*

$$E_{\beta R}^n \subseteq E_{\beta S}^n. \tag{46}$$

Лема 2. *Якщо $\bar{\tilde{X}}_0^\beta$ — нормовано регулярний нечіткий початковий стан $\forall\beta\in[0,1]$, то $\mu_{\tilde{C}_k}(\bar{\tilde{X}}_k^\beta,\bar{\tilde{Y}}_k^{\beta*}) > 0$ для всіх $k=0,1,2,...,\ \beta\in[0,1]$, $\bar{\tilde{X}}_k^\beta$, $k=0,1,2,...$ — траєкторія системи (44), що реалізується на рівні достовірності $\beta\in[0,1]$ з початковим станом $\bar{\tilde{X}}_0^\beta$.*

Твердження 2. *Для довільного виходу $\tilde{\bar{Y}}_k^{\beta *}$, $k = 0, 1, 2, ...,$ $\beta \in [0, 1]$ з рівнем достовірності $\beta \in [0, 1]$, для якого*

$$y_k^\beta \in supp \tilde{\bar{Y}}_k^{\beta *},\ \tilde{\bar{Y}}_k^{\beta *} = \tilde{C}_{k-1} \circ \tilde{\bar{Y}}_{k-1}^{\beta *},\ k = 1, 2, ...,\ \beta = [0, 1],$$

існує відповідного рівня достовірності траєкторія системи (44) з нормовано регулярним початковим станом, яка сумісна із заданим виходом.

Запропоновано методику якісного аналізу динаміки нечітких систем великої розмірності [22].

Розглянемо нечітку динамічну систему S, множина станів якої описується сукупністю нечітких множин $\tilde{A}_S = \{(x, \mu_S(x)),\ x \in X\}$. Припустимо, що в системі виділено дві підсистеми S_1, S_2, стани яких також мають бути представлені у вигляді нечітких множин $\tilde{A}_{S_1} = \{(x^1, \mu_{S_1}(x^1)),\ x^1 \in X_1\}$ та $\tilde{A}_{S_2} = \{(x^2, \mu_{S_2}(x^2)),\ x^2 \in X_2\}$ універсальних множин X_1, X_2 відповідно, $X_1 \cup X_2 = X$.

Для визначення функцій належності $\mu_{S_1}(x^1) : X_1 \to [0, 1]$ та $\mu_{S_2}(x^2) : X_2 \to [0, 1]$ нечітких множин $\tilde{A}_{S_1}$ та $\tilde{A}_{S_2}$ будемо ототожнювати $\mu_{S_1}(x^1)$, $\mu_{S_2}(x^2)$ з корисністю підсистем S_1, S_2. Представимо величини міри належності $\mu_S(x)$ у вигляді

$$\mu_S(x^1) = [\mu_{S_1}(x^1)]^\alpha,\ x^1 \in X_1,\ \mu_S(x^2) = [\mu_{S_2}(x^2)]^\beta,\ x^2 \in X_2,\ \alpha, \beta \geq 0. \quad (47)$$

Знаходження величин α, β проводиться на основі методики прийняття рішення в багатокритеріальній ситуації з урахуванням важливості критеріїв.

Процедура декомпозиції нечітких систем дозволила розглянути задачу якісного аналізу динаміки багатовимірних нечітких систем вигляду (19).

Припустимо, що система складається з двох підсистем. При цьому система (19) буде мати вигляд

$$\tilde{X}_{k+1}^{(1)} = R_k^{(1)} \circ \tilde{X}_k^{(1)} + F_k^{(1)} \circ \tilde{X}_k^{(2)}, \quad (48)$$

$$\tilde{X}_{k+1}^{(2)} = R_k^{(2)} \circ \tilde{X}_k^{(2)} + F_k^{(2)} \circ \tilde{X}_k^{(1)},$$

де $R_k^{(1)}$, $R_k^{(2)}$ — нечіткі відображення з X_i в X_i, $i = 1, 2$, відповідно, що визначають переходи станів підсистем, $k = 0, 1, 2, ...,$ а величини $F_k^{(1)} \circ$ $\circ\ \tilde{X}_k^{(2)} = f_k^{(1)}(\tilde{X}_k^{(2)})$, $F_k^{(2)} \circ \tilde{X}_k^{(1)} = f_k^{(2)}(\tilde{X}_k^{(1)})$, $k = 0, 1, 2, ...,$ — визначають взаємний вплив підсистем.

Нехай ізольовані підсистеми є стійкими (асимптотично стійкими) за степенем належності. Це означає, що нечіткі множини $\tilde{\bar{X}}_k^{(1)} = \{(x^1, \bar{\mu}_k^{(1)}(x^1)) : x^1 \in X_1\}$ та $\tilde{\bar{X}}_k^{(2)} = \{(x^2, \bar{\mu}_k^{(2)}(x^2)) : x^2 \in X_2\}$, $k = 0, 1, 2, ...,$ визначають стійкі (асимптотично стійкі) розв'язки підсистем

$$\tilde{\bar{X}}_{k+1}^{(1)} = R_k^{(1)} \circ \tilde{\bar{X}}_k^{(1)}, \tilde{\bar{X}}_{k+1}^{(2)} = R_k^{(2)} \circ \tilde{\bar{X}}_k^{(2)} \quad (49)$$

з початковими значеннями $\tilde{\bar{X}}_0^{(1)} = \{(x^1, \mu_0^{(1)}(x^1)) : x^1 \in X_1\}$, $\tilde{\bar{X}}_0^{(2)} =$ $= \{(x^2, \mu_0^{(2)}(x^2)) : x^2 \in X_2\}$.

Твердження 3. *Припустимо, що* $\forall k = 0, 1, 2, ...,$

$$d_H(\tilde{\tilde{X}}^{(i)}_{k+1}, f^{(i)}_k(\tilde{X}^{(3-i)}_k)) \leq g^{(i)}(d_H(\tilde{\tilde{X}}^{(i)}_k, \tilde{X}^{(i)}_k)), \qquad (50)$$

де $g^{(i)}(w^{(i)}_k)$*,* $i = 1, 2,$ $k = 0, 1, 2, ...,$ *– неперервні додатні функції на* R^1_+.

Позначимо через $r^{(i)}_k(w^{(i)}_0)$*,* $k = 0, 1, 2, ...,$ $i = 1, 2,$ *— максимальні розв'язки скалярних різницевих рівнянь*

$$w^{(i)}_{k+1} = \lambda^{(i)}_k w^{(i)}_k + g^{(i)}(w^{(i)}_k),\ w^{(i)}_0 \geq 0,\ 0 < \lambda^{(i)}_k \leq 1,\ k = 0, 1, 2, ...,\ i = 1, 2. \qquad (51)$$

Тоді для кожного $i = 1, 2,$ $k = 0, 1, 2, ...,$ *маємо*

$$d_H(\tilde{\tilde{X}}^{(i)}_{k+1}, f^{(i)}_k(\tilde{X}^{(3-i)}_k)) \leq r^{(i)}_k(w^{(i)}_0), \quad d_H(\tilde{\tilde{X}}^{(i)}_1, f^{(i)}_0(\tilde{X}^{(3-i)}_0)) \leq w^{(i)}_0. \qquad (52)$$

Задачі прийняття рішень в умовах невизначеності

Сучасні інформаційні системи досить часто є сховищами неточних (нечітких) даних, обробка яких потребує спеціальних підходів. Для накопичення та представлення таких даних активно розвивається технологія нечітких баз даних та нечітких запитів до сховищ даних, яка будується на використанні нечітких множин і нечітких відношень з підтримкою формул нечіткої логіки [23].

Обробка неточно заданої інформації з метою отримання конкретного результату або висновку вимагає вирішення багатьох задач, однією з яких є кластеризація (об'єднання даних у відносно однорідні групи-кластери). Більшість з існуючих підходів для кластеризації є евристичними методами, що базуються на певних алгоритмах дій дослідника і не вимагають складних статистичних розрахунків. Однак, їх використання у випадку нечіткої інформації суттєво ускладнюється або взагалі стає неможливим через специфічне представлення нечіткості.

Розробка конструктивного алгоритму проведення кластеризації нечітких даних, представлених сукупністю складених нечітких множин з $K(\tilde{A}^m)$, включає в себе формалізацію способів пошуку кластерного центру множини та реалізацію процедури групування нечітких даних в межах заданої кількості кластерів з використанням нечіткого відношення переваги для порівняння відповідних відстаней (див.[24]).

В задачах прийняття рішень реальні дані часто мають неточний, нечіткий характер, що потребує розробки спеціальних математичних моделей, які дозволять адекватно відображати ситуацію, та методів для обробки даних. Тому, важливими з практичної точки зору є задачі використання математичних методів та алгоритмів для підтримки прийняття рішень в умовах невизначеності. Методику вибору рішень за умов представлення вихідних даних у вигляді сукупності складених нечітких множин наведено в [25].

Обслуговування інформаційних потреб базується на широкому застосуванні баз даних (БД). Запити до БД формулюються у вигляді чітких вимог до необхідних даних. Чіткі вимоги дозволяють отримувати конкретні результати пошуку в БД. Однак в запитах, що формулює користувач, часто присутні неточності та невизначеності.

Запропоновано розширення та узагальнення поняття нечітких баз даних. Для довільної чіткої бази даних може бути побудоване нечітке представлення (нечітка БД, НБД), в якому інформація про характеристики (поля) об'єктів проблемної області подаються сукупністю пар атрибутів: в першому — конкретні значення атритута з таблиці чіткої бази даних, в другому — значення відповідності даних першого стовпця деякому правилу (нечіткому поняттю). Детальний опис створення нечітких баз даних на основі складених нечітких множин наведено в [26].

Таким чином, в рамках дослідження проведено аналіз та розробка нових конструктивних підходів для якісного аналізу розв'язків різницевих нечітких систем, вирішено ряд задач обробки нечітких даних спеціального вигляду, розроблено методи та алгоритми для роботи з нечіткою інформацією, що може бути використано у процесах створення та супроводження систем підтримки прийняття управлінських рішень в умовах невизначеності.

Література

1. Zadeh L. A. Fuzzy sets / L. A. Zadeh. // Information and Control. — 1965. — № 8. — P. 338–353.
2. Согласованное управление активными системами / А. А. Ашимов, В. Н. Бурков, Б. А. Джапаров, В. В. Кондратьев — М.: Наука, 1986. — 284 с.
3. Меренков Ю. Н. Устойчивоподобные свойства дифференциальных включений, нечетких и стохастических дифференциальных уравнений / Ю. Н. Меренков. — М.: Ун-т Дружбы народов, 2000. — 123 с.
4. Lakshmikantham V. Theory of fuzzy differential equations and inclusions / V. Lakshmikantham, R. N. Mohapatra — London, New York: Taylor & Francis, 2003. — 178 p.
5. Lakshmikantham V. Uncertain and fuzzy differential equations / V. Lakshmikantham // Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах. — 2000. — Т. 6. — Вып. 2(12). — С. 29–46.
6. Пушков С. Т. Об общей теории нечетких систем: глобальное состояние и нечеткая глобальная реакция нечеткой системы/ С. Т. Пушков //Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2001. — №5. — С. 105–109.
7. Заде Л. А. Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решения / Л. А. Заде. // Математика сегодня. — М.: Знание, 1974. — С. 4–49.
8. Заде Л. А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л. А. Заде — М.: Мир, 1976. – 175 с.
9. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта: [зб. наук. праць / наук. ред. Д. А. Поспелов]. — М.: Наука, 1986. — 254 с.
10. Ягер Р. Р. Множества уровня для оценки принадлежности нечетких подмножеств/ Р. Р. Ягер. // Нечеткие множества и теория возможностей: сб. науч. работ. — М: Радио и связь, 1986. — С. 71–78.

11. Норвич А. М. Построение функций принадлежности/ А. М. Норвич, И. Б. Турксен // Нечеткие множества и теория возможностей: сб. науч. работ. — М: Радио и связь, 1986. — С. 64–71.
12. Борисов А. Н. Модели принятия решений на основе лингвистической переменной/ А. Н. Борисов и др. — Рига: Зинатне, 1982. — 256 с.
13. Пытьев Ю. П. Возможность. Элементы теории и применения / Ю. П. Пытьев — М.: Эдаториал УРСС, 2000. — 128 с.
14. Le Van Huen. A note on the asymptotic stability of fuzzy differential equations/ Le Van Huen. // Ukrainian Mathematical Journal. — 2005. — V. 57. — № 7. — P. 904–911.
15. Jeong J. U. Stability of periodic solution for fuzzy differential equations/ J. U. Jeong. // Journal of Applied Mathematics and Computing. — 2003. — V. 13. — № 1–2. — P. 217–222.
16. Hausdorff F. Set Theory / F. Haesdorff. — New York: Chelsea, 1957. — 154 p.
17. Кудинов Ю. Н. Нечеткие системы управления / Ю. Н. Кудинов. //Изв. РАН. Техническая кибернетика. — 1990. — № 5. — С. 196–206.
18. Орловский С. А. Проблемы принятия решения при нечеткой исходной информации / С. А. Орловский — М.: Наука, 1981. — 206 с.
19. Астровский А. И., Корженевич С. К. Применение теории нечётких множеств для исследования задач апостериорного оценивания в линейных дискретных системах / А. И. Астровский, С. К. Корженевич // Дифференциальные уравнения. — 1995. — Т. 31. — № 6. — С. 1678–1682.
20. Івохін Є. В. Якісне дослідження динаміки нечітких дискретних систем / Є. В. Івохін, С. О. Волчков // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2005. — № 4. — С. 94–105.
21. Івохін Є. В. Про стійкоподібні властивості розв'язків нечітких різницевих систем / Є. В. Івохін // Вісник Київського університету. Серія: Кібернетика. — 2006. — № 7. — С. 23–31.
22. Івохін Є. В. Дослідження стійкості лінійних різницевих систем великої розмірності / Є. В. Івохін, Д. О. Вадньов // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2009. — № 2. — С. 28–34.
23. Круглов В. В. Искусственные нейронные сети. Теория и практика / В. В. Круглов, В. В. Борисов. — М.: Горячая линия-Телеком, 2001. — 382 с.
24. Івохін Є. В. Один метод кластеризації складених нечітких множин / Є. В. Івохін, К. О. Косинський // Журнал обчислювальної та прикл. математики. — 2007. — № 2. — С. 54–58.
25. Івохін Є. В. Один алгоритм прийняття рішень в ситуації з нечіткими вихідними даними / Є. В. Івохін, Л. Т. Аджубей, С. О. Бабанін // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. — 2009. — Вип. 1. — С. 102–105.
26. Івохін Є. В. Про підхід до реалізації нечітких баз даних / Є. В. Івохін, К. О. Косинський // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. — 2008. — Вип. 2. — С. 83–87.

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна.

Надійшла 10.02.2013