Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2013, № 2 (112) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.6

ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНА ДИХОТОМІЯ ТА ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯННЯ ШРЬОДІНГЕРА

О. О. Покутний

Резюме. Отримано необхідну та достатню умови існування обмежених на всій осі розв'язків слабконелінійного рівняння Шрьодінгера в припущенні, що однорідне рівняння є експоненціально-дихотомічним на півосях. Використовуючи узагальнено-обернений оператор Гріна побудовано обмежені розв'язки.

Вступ

Багато робіт присвячено дослідженню взаємозв'язків між поняттям експоненціальної дихотомії на всій осі та обмеженими розв'язками відповідного диференціального рівняння як в скінченно- так і нескінченновимірних просторах. Це питання має свою історію, якій вже понад 50 років. Серед рівнянь, що мають таку властивість, останнім часом все більш актуальними стають диференціальні рівняння, що є експоненціально-дихотомічними на півосях. Крайові задачі для лінійних диференціальних рівнянь, що є експоненціально-дихотомічними на півосях в просторах Банаха з обмеженим оператором в лінійній частині розглядалися в [1]. Для лінійних й слабконелінійних диференціальних рівнянь в просторах Банаха з необмеженим оператором в лінійній частині така теорія побудована в [2]. Дана робота присвячена отриманню необхідних та достатніх умов існування обмежених на всій осі розв'язків крайових задач для лінійного й слабконелінійного рівняння Шрьодінгера в просторі Гільберта за умов, коли відповідне однорідне рівняння є експоненціально-дихотомічним на півосях.

1. Лінійний випадок. Постановка задачі

Розглянемо таке диференціальне рівняння Шрьодінгера [3]

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -iH(t)\varphi(t) + f(t), t \in J \tag{1}$$

в просторі Гільберта H, де для кожного $t \in J \subset \mathbb{R}$, необмежений оператор $H(t)$ має вигляд $H(t) = H_0 + V(t)$; тут $H_0 = H_0^*$ необмежений самоспряжений оператор з областю визначення $D = D(H_0) \subset H$; відображення $t \to V(t)$ — сильно неперервне. Визначимо як в [3] операторнозначну функцію

$$\tilde{V}(t) = e^{itH_0}V(t)e^{-itH_0}.$$

В цьому випадку для $\tilde{V}(t)$ справедливе представлення Дайсона [3, с.311] і можна визначити пропагатор $\tilde{U}(t,s)$. Якщо $U(t,s) = e^{-itH_0}\tilde{U}(t,s)e^{isH_0}$, то $\psi_s(t) = U(t,s)\psi$ — слабкий розв'язок (1) з умовою $\psi_s(s) = \psi$ в тому сенсі, що для довільного $\eta \in D(H_0)$ функція $(\eta, \psi_s(t))$ є диференційовною й

$$\frac{d}{dt}(\eta, \psi_s(t)) = -i(H_0\eta, \psi_s(t)) - i(V(t)\eta, \psi_s(t)),\ t \in J.$$

Дана частина присвячена отриманню необхідних й достатніх умов існування слабких обмежених розв'язків неоднорідного рівняння (1) з

$f \in BC(J,H) = \{f : J \to H;$ функція f неперервна та обмежена$\}$. Тут обмеженість розуміється в тому сенсі, що $|||f||| = sup_{t\in J}||f(t)|| < \infty$. Для простоти викладення будемо припускати, що D щільна в H. Оператор $U(t,s)$ лінійний обмежений оператор для фіксованих t, s й через те що множина D щільна в H, то його можна розширити на весь простір H за неперервністю, що й припускається в подальшому. Розширення еволюційного оператора на весь простір позначатиметься таким же чином.

1.2. Обмежені розв'язки.

В подальшому ми будемо використовувати поняття експоненціальної дихотомії в сенсі [4]. Окремий інтерес представляє аналіз експоненціальної дихотомії на півосях $\mathbb{R}_s^- = (-\infty, s]$ та $\mathbb{R}_s^+ = [s; \infty)$. В цьому випадку проекторнозначні функції визначені на півосях будуть позначатися $P_-(t)$, для всіх $t \geq s$, та $P_+(t)$, для всіх $t < s$, з константами M_1, α_1 та M_2, α_2, відповідно (α_1, α_2 — коефіцієнти ентропії чи Ляпунова на півосях). Більшість тверджень, представлених нижче, можна отримати таким же чином як в [2]. Основний результат цієї частини можна подати у наступному вигляді.

Лема 1. *Нехай $\{U(t,s), t \geq s \in \mathbb{R}\}$ родина сильно неперервних еволюційних операторів асоційованих з рівнянням (1). Припустимо, що виконано умови :*

1. Оператор $U(t,s)$ допускає експоненціальну дихотомію на півосях $\mathbb{R}_0^+$ та $\mathbb{R}_0^-$ з проекторнозначними оператор-функціями $P_+(t)$ та $P_-(t)$, відповідно.

2. Оператор $D = P_+(0) - (I - P_-(0))$ має псевдообернений оператор за Муром-Пенроузом.

Тоді справедливі такі твердження.

1. Існують слабкі розв'язки рівняння (1) обмежені на всій осі тоді й тільки тоді, коли вектор-функція $f \in BC(\mathbb{R}, H)$ задовольняє умову

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)f(t)dt = 0, \tag{2}$$

де $H(t) = \mathcal{P}_{N(D^*)}P_-(0)U(0,t)$.

2. При виконанні умови (2), слабкі розв'язки (1) обмежені на всій осі мають вигляд

$$\varphi_0(t,c) = U(t,0)P_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}c + (G[f])(t,0)\forall c \in H, \tag{3}$$

де

$$(G[f])(t,s) = \begin{cases} \int_s^t U(t,\tau)P_+(\tau)f(\tau)d\tau - \int_t^{+\infty} U(t,\tau)(I-P_+(\tau))f(\tau)d\tau + \\ +U(t,s)P_+(s)D^+[\int_s^\infty U(s,\tau)(I-P_+(\tau))f(\tau)d\tau + \\ +\int_{-\infty}^s U(s,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau], \ \ t \geq s, \\ \int_{-\infty}^t U(t,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau - \int_t^s U(t,\tau)(I-P_-(\tau))f(\tau)d\tau + \\ +U(t,s)(I-P_-(s))D^+[\int_s^\infty U(s,\tau)(I-P_+(\tau))f(\tau)d\tau + \\ +\int_{-\infty}^s U(s,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau], \ \ s \geq t \end{cases}$$

узагальнений оператор Гріна задачі відшукання обмежених на всій осі розв'язків

$$(G[f])(0+,0) - (G[f])(0-,0) = -\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)f(t)dt;$$

$$\mathcal{L}(G[f])(t,0) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

та

$$(\mathcal{L}x)(t) = \frac{dx}{dt} - iH(t)x(t),$$

D^+ *— псевдообернений за Муром-Пенроузом оператор до оператора* D*;* $\mathcal{P}_{N(D)} = I - D^+D$ *та* $\mathcal{P}_{N(D^*)} = I - DD^+$ *проектори* [5] *на ядро та коядро оператора* D.

Зауваження 1. *Аналогічна теорема буде справджуватись у тому випадку, коли еволюційні оператори* $U(t,s)$ *допускають експоненціальну дихотомію на півосях* $\mathbb{R}_s^+$ *та* $\mathbb{R}_s^-$.

Далі ми покажемо, що умову 2 теореми 1 можна прибрати й рівняння (1) буде завжди розв'язним в певному сенсі. З доведення теореми 1 (див. теорему 1 з [2]) випливає, що рівняння (1) має обмежені розв'язки тоді й тільки тоді, коли операторне рівняння

$$D\xi = g, \tag{4}$$

$$g = \int_{-\infty}^0 U(0,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau + \int_0^{+\infty} U(0,\tau)(I-P_+(\tau))f(\tau)d\tau$$

є розв'язним та їх кількість залежить від розмірності $N(D)$.

Будемо виділяти три типи розв'язків.

1)Класичні узагальнені розв'язки.

Розглянемо випадок, коли оператор D нормально-розв'язний, тобто $R(D) = \overline{R(D)}$. Тоді [5], як відомо $g \in R(D)$ тоді й тільки тоді, коли $\mathcal{P}_{N(D^*)}g = 0$. В цьому випадку існує псевдообернений за Муром-Пенроузом оператор D^+ та множина розв'язків рівняння (4) може бути представлена у вигляді [5]

$\xi = D^+g + \mathcal{P}_{N(D)}c, \forall c \in H.$

2) Сильні узагальнені розв'язки.

Розглянемо випадок, коли $R(D) \neq \overline{R(D)}$. Покажемо, що оператор D може бути розширеним до оператора $\overline{D}$ (що діє вже у віповідному розширеному просторі) таким чином, що $R(\overline{D})$ замкнена.

Через те що оператор D обмежений, то справедливі такі розклади H в ортогональні суми

$$H = N(D) \oplus X, \quad H = \overline{R(D)} \oplus Y$$

з $X = N(D)^{\perp}$ та $Y = \overline{R(D)}^{\perp}$. Нехай $E = H/N(D)$ фактор простір простору H за ядром $N(D)$ та $\mathcal{P}_{\overline{R(D)}}$ — ортопроектор, що проектує весь простір на $\overline{R(D)}$. Тоді оператор

$$\mathcal{D} = \mathcal{P}_{\overline{R(D)}} D j^{-1} p : X \to R(D) \subset \overline{R(D)}$$

буде лінійним, неперервним та ін'єктивним (тут $p : X \to E$ неперервна бієкція, а проекція $j : H \to E$ є такою, що трійка (H, E, j) є локально тривіальним розшаруванням з типовим шаром $\mathcal{P}_{N(L)} H$). У цьому випадку [6, с.26,29] ми можемо визначити сильний узагальнений розв'язок рівняння

$$\mathcal{D}\xi = g, \xi \in X.$$

Поповнимо простір X за нормою $||\xi||_{\overline{X}} = ||\mathcal{D}\xi||_F$, де $F = \overline{R(D)}$ [6]. Тоді розширений оператор

$$\overline{\mathcal{D}} : \overline{X} \to \overline{R(D)}, X \subset \overline{X}$$

буде здійснювати гомеоморфізм між $\overline{X}$ та $\overline{R(D)}$, а оператор $\overline{D} = \overline{\mathcal{D}} \mathcal{P}_{\overline{X}} : \overline{H} \to H$ буде нормально-розв'язним (тут $\overline{H} = N(D) \oplus \overline{X}, R(\overline{D}) = \overline{R(D)}$). В силу конструкції сильного узагальненого розв'язку [6] рівняння

$$\overline{D}\, \overline{\xi} = g$$

має єдиний розв'язок, який позначатимемо $\overline{D}^{+} g$ й називатимемо сильним узагальненим розв'язком (4). Тоді множина всіх розв'язків рівняння (4) матиме вигляд

$$\xi = \overline{D}^{+} g + \mathcal{P}_{N(D)} c, \forall c \in H.$$

3) Узагальнені псевдорозв'язки.

Розглянемо випадок, коли $g \notin \overline{R(D)}$. Ця умова для елемента g рівносильна умові $\mathcal{P}_{N(D^*)} g \neq 0$. У цьому випадку існують елементи з $\overline{H}$, що мінімізують норму $||\overline{D}\xi - g||_{\overline{H}}$ для $\xi \in \overline{H}$,

$$\xi = \overline{D}^{+} g + \mathcal{P}_{N(D)} c, \forall c \in H.$$

Ці елементи будемо називати узагальненими псевдорозв'язками рівняння (4).

Зауваження 2. *Слід підкреслити, що в кожному з розглянутих випадків вигляд обмежених розв'язків (4) не змінюється. Якщо позначити через $\overline{(G[f])(t,0)}$ відповідне розширення узагальненого оператора Гріна $(G[f])(t,0)$, то в лемі 1 розв'язки рівняння (1) будуть існувати завжди в одному з сенсів 1)–3) й при цьому матимуть вигляд*

$$\varphi_0(t, c) = U(t, 0) P_+(0) \mathcal{P}_{N(D)} c + \overline{(G[f])(t, 0)} \quad \forall c \in H$$

для кожного з випадків.

Зауваження 3. *Поєднання результатів теореми 1 та конструкцій 1)–3) говорить про те, що з умов експоненціальної дихотомії на півосях випливає існування обмежених на всій осі розв'язків рівняння (1).*

2. Основний результат (нелінійний випадок).

2.1. Постановка задачі та основний результат.

В просторі Гільберта H, розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -iH(t)\varphi(t) + \varepsilon Z(\varphi, t, \varepsilon) + f(t). \tag{5}$$

Ми шукаємо обмежений розв'язок $\varphi(t, \varepsilon)$ рівняння (5), що обертається в один з розв'язків породжуючого рівняння (1) при $\varepsilon = 0$.

Для знаходження необхідної умови на оператор-функцію $Z(\varphi, t, \varepsilon)$ будемо накладати обмеження за сукупністю змінних в околі породжуючого розв'язку $\varphi_0(t)$

$$Z(\cdot, \cdot, \cdot) \in C[||\varphi - \varphi_0|| \leq q] \times BC(\mathbb{R}, H) \times C[0, \varepsilon_0],$$

де q — деяка додатня стала.

Покажемо, що ця проблема може бути розв'язана з використанням операторного рівняння для породжуючих констант

$$F(c) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)Z(\varphi_0(t, c), t, 0)dt = 0. \tag{6}$$

Теорема 2 *(необхідна умова). Припустимо, що рівняння (1) допускає експоненціальну дихотомію на півосях $\mathbb{R}_0^+$ та $\mathbb{R}_0^-$ з проекторнозначними оператор-функціями $P_+(t)$ та $P_-(t)$ відповідно, а нелінійне рівняння (5) має обмежений розв'язок $\varphi(\cdot, \varepsilon)$, який обертається в один із розв'язків породжуючого рівняння (1) з константою $c = c^0$, $\varphi(t, 0) = \varphi_0(t, c^0)$ при $\varepsilon = 0$. Тоді ця константа повинна задовольняти рівняння для породжуючих констант (6).*

Доведення цієї теореми проводиться так як в [2, Теорема 1].

Для знаходження достатньої умови існування обмежених розв'язків (1) будемо додатково припускати, що оператор-функція $Z(\varphi, t, \varepsilon)$ строго диференційовна в околі породжуючого розв'язку ($Z(\cdot, t, \varepsilon) \in C^1[||\varphi - \varphi_0|| \leq q]$).

Ця проблема може бути розв'язана з використанням оператора

$$B_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)A_1(t)U(t, 0)P_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}dt : H \to H,$$

де $A_1(t) = Z^1(v, t, \varepsilon)|_{v=\varphi_0, \varepsilon=0}$ (похідна в сенсі Фреше).

Теорема 3 *(достатня умова). Нехай рівняння (1) допускає експоненціальну дихотомію на півосях $\mathbb{R}_0^+$ та $\mathbb{R}_0^-$ з проекторнозначними функціями $P_+(t)$ та $P_-(t)$, відповідно. Припустимо, що оператор B_0 задовольняє умови :*

1. *B_0 – має псевдообернений оператор за Муром-Пенроузом*;
2. $\mathcal{P}_{N(B_0^*)}\mathcal{P}_{N(D^*)}P_-(0) = 0.$

Тоді, для довільного елемента $c = c^0 \in H$, що задовольняє рівняння для породжуючих констант (6), існує обмежений на всій осі розв'язок. Цей розв'язок може бути знайдений за допомогою ітераційного процесу

$$\overline{y}_{k+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon G[Z(\varphi_0(\tau, c^0 + y_k, \tau, \varepsilon))](t,0),$$
$$c_k = -B_0^+ \int_{-\infty}^{+\infty} H(\tau)\{A_1(\tau)\overline{y}_k(\tau,\varepsilon) + \mathcal{R}(y_k(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\}d\tau,$$
$$\mathcal{R}(y_k(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = Z(\varphi_0(t,c^0) + y_k(t,\varepsilon),t,\varepsilon) - Z(\varphi_0(t,c^0),t,0) - A_1(t)y_k(t,\varepsilon),$$
$$\mathcal{R}(0,t,0) = 0, \qquad \mathcal{R}_x^{(1)}(0,t,0) = 0,$$
$$y_{k+1}(t,\varepsilon) = U(t,0)P_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}c_k + \overline{y}_{k+1}(t,0,\varepsilon),$$
$$\varphi_k(t,\varepsilon) = \varphi_0(t,c^0) + y_k(t,\varepsilon), \quad k = 0,1,2,..., \quad y_0(t,\varepsilon) = 0,$$
$$\varphi(t,\varepsilon) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(t,\varepsilon).$$

2.2. Зв'язок між необхідною та достатньою умовами.

Спочатку сформулюємо таке твердження.

Наслідок. *Нехай функціонал $F(c)$ має похідну Фреше $F^{(1)}(c)$ для кожного елемента c^0 простору Гільберта H, що задовольняє рівняння для породжуючих констант (6). Якщо $F^1(c)$ має обмежений обернений оператор, то рівняння (5) має єдиний обмежений розв'язок на всій осі для кожного c^0.*

Зауваження 4. *Якщо припущення наслідка виконуються, то оператори B_0 та $F^{(1)}(c^0)$ будуть збігатися. Через те що оператор $F^{(1)}(c)$ оборотний, то умова 1 теореми 3 для оператора B_0 виконується автоматично. В цьому випадку, рівняння (5) має єдиний обмежений розв'язок для кожного $c^0 \in H$. Отже, умова оборотності для оператора $F^1(c)$ пов'язує необхідну й достатню умови. У скінченновимірному випадку умова оборотності оператора $F^{(1)}(c)$ еквівалентна умові простоти кореня c^0 рівняння для породжуючих амплітуд* [5].

Таким чином ми отримали модифікацію метода Ляпунова-Шмідта. Слід також підкреслити, що теореми 2 та 3 дають нам умови наявності можливої складної поведінки (5) [7].

Зауваження 5. *Застосовуючи розвинену вищу теорію для еволюційних рівнянь, що мають властивість експоненціальної дихотомії на півосях, можна вивчати крайові задачі.*

Сформулюємо відповідну постановку задачі. В просторі Гільберта H розглядається така крайова задача

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -iH(t)\varphi(t) + \varepsilon Z(\varphi,t,\varepsilon) + f(t), \tag{7}$$

$$Q\varphi(\cdot) = \alpha + \varepsilon J(\varphi(t),t,\varepsilon). \tag{8}$$

Для рівняння (7) умови, які накладаються на вектор-функцію $f(t)$ та оператор-функцію $Z(\varphi(t),t,\varepsilon)$ такі ж самі, як і для рівняння (5). Оператор Q є лінійним та обмеженим, що діє з простору Гільберта H в простір Гільберта H_1, α — довільний елемент простору H_1, оператор-функція $J(\varphi(t), t, \varepsilon)$ задовльняє аналогічним умовам, що й $Z(\varphi(t), t, \varepsilon)$. Для такої задачі можна отримати необхідні й достатні умови існування обмежених на всій осі розв'язків, що є аналогічними до встановлених вище.

Література

1. Boichuk A.A., Pokutnyi O.A. Dichotomy and boundary value problems on the whole line. — Proceedings, 5th Chaotic Modeling and Simulation International Conference, 12–15 June 2012, Athens Greece. — P. 81–89.
2. Pokutnyi A.A. Bounded solutions of linear and weakly nonlinear differential equations in a Banach space with unbounded operator in the linear part. Differential equations (in Russian) — 2012 — V. 48, № 6 — P. 803–813.
3. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики : в 4 т. — М.: Мир, 1978. — Т. 2: Гармонический анализ. Самосопряженность. — 1978. — 395 с.
4. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985. — 376 с.
5. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary Value Problems. — VSP, Utrecht-Boston, 2004. — 317 p.
6. Ляшко С.И., Номировский Д.А., Петунин Ю.И., Семенов В.В. Двадцатая проблема Гильберта. Обобщенные решения операторных уравнений. — М.: Диалектика, 2009. — 185 с.
7. Chueshov I.D. Introduction to the theory of infinite-dimensional dissipative systems. Acta, 2002. — 416 p.
8. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967. — 464 с.
9. Функциональный анализ. СМБ / под ред. С.Г. Крейна. — М.: Наука, 1972. — 544 с.
10. B. A. Biletskyi, A. A. Boichuk, A. A. Pokutnyi. Periodic Problems of Difference Equations and Ergodic Theory. Abstract and Applied Analysis, 2011, Article ID 928587, 12 pages, http://www.hindawi.com/journals/aaa/2011/928587/.
11. Иосида К. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967. — 624 с.

Лабораторія крайових задач теорії диференціальних рівнянь, Інститут математики, вул. Терещенківська, 3, Київ-4, 01601, Україна.

Надійшла 29.09.2012