Журнал обчислювальної та прикладної математики | **2013, № 2 (112)** | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.9

ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ ОПЕРАТОРНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С МАКСИМАЛЬНЫМИ МОНОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

В. В. Семенов[1]

Резюме. Предложен параллельный алгоритм резольвентной декомпозиции для решения операторных включений с максимальными монотонными операторами, действующими в гильбертовом пространстве. Доказана теорема о слабой в среднем сходимости алгоритма.

Ключевые слова: операторное влючение, максимальный монотонный оператор, резольвента, декомпозиция, среднее по Чезаро, слабая сходимость.

При решении сложных задач моделирования и оптимизации важное значение имеют различные декомпозиционные подходы, позволяющие сводить решение исходной задачи к решению последовательности задач более простой структуры [1, 2, 3]. Одной из актуальных проблем, связанных с необходимостью привлечения идей декомпозиции, является эффективное решение сетевых задач выделения ресурсов (Network Resource Allocation) [4].

В работе предложена и изучена параллельная схема декомпозиции операторного включения с оператором, представимым в виде конечной суммы "простых" операторов. Предложенный ниже алгоритм 1 — результат наивного "распараллеливания" метода из [5]. Работа непосредственно примыкает к ранее опубликованным статьям [6, 7, 8]. Все необходимые сведения из нелинейного анализа приведены в [9, 10].

Всюду далее H — действительное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и порожденной нормой $\|\cdot\|$. Рассмотрим операторное включение

$$0 \in A_1x + A_2x + \ldots + A_mx, \tag{1}$$

где $A_i : H \to 2^H$ — максимальный монотонный оператор.

Для оператора $A : H \to 2^H$ будем использовать следующие обозначения: $D(A) = \{x \in H :\ Ax \neq \emptyset\}$, $R(A) = \{y \in H :\ \exists x \in D(A)\ y \in Ax\}$, $A^{-1}0 = \{x \in H :\ 0 \in Ax\}$ $(0 \in R(A) \Leftrightarrow A^{-1}0 \neq \emptyset)$.

Напомним, что резольвентой оператора $A : H \to 2^H$ называют оператор $J_A = (I + A)^{-1} : H \to 2^H$. Известно, что в случае максимальной монотонности оператора A резольвента J_A является однозначным, всюду заданным

[1]Исследование выполнено при финансовой помощи ГФФИ Украины (проект GP/F49/061) и Верховной Рады Украины (Именная стипендия ВР Украины для молодых ученых в 2013 году).

и твердо нерастягивающим (firmly nonexpansive) оператором, а множество $A^{-1}0$ — замкнутым и выпуклым (возможно пустым) [10].

Для решения включения (1) используем декомпозиционную схему следующего вида.

Алгоритм 1.

1) *Задаем* $\{\lambda_n\} \subseteq (0, +\infty)$, $x_1 \in H$; $n := 1$.
2) *Находим элементы:*

$$x_{i,n} = J_{\lambda_n A_i} x_n, \ \ i = \overline{1, m}.$$

3) *Полагаем*

$$x_{n+1} = \frac{1}{m} x_{1,n} + \frac{1}{m} x_{2,n} + ... + \frac{1}{m} x_{m,n},$$

$n := n + 1$, *переходим на шаг 2.*

Замечание 1. В работе [5] была изучена сходимость последовательной схемы $x_{n+1} = (J_{\lambda_n A_1} \circ J_{\lambda_n A_2} \circ ... \circ J_{\lambda_n A_m}) x_n$.

Замечание 2. Варианты алгоритма 1 изучены в работах [1, 4, 6, 7, 8, 11].

Замечание 3. Для задачи выпуклого программирования

$$f(x) \to \min, \ \ x \in \bigcap_{i=1}^{m-1} C_i,$$

алгоритм 1 приобретает вид

$$x_{n+1} = \left(\frac{1}{m} \operatorname{prox}_{\lambda_n f} + \frac{1}{m} P_{C_1} + ... + \frac{1}{m} P_{C_{m-1}} \right) x_n,$$

где prox_g — проксимальный оператор Моро, ассоциированный с полунепрерывной снизу собственной выпуклой функцией g, P_C — оператор метрического проектирования на замкнутое выпуклое множество C.

При доказательстве основного результата будем использовать следующие известные утверждения.

Лемма 1 ([9])**.** *Пусть* $A : H \to 2^H$ *— максимальный монотонный оператор,* x, $u \in H$. *Тогда*

$$(u - v, x - y) \geq 0 \ \ \forall y \in D(A) \ \forall v \in Ay \ \ \Rightarrow \ \ x \in D(A), \ u \in Ax.$$

Лемма 2. *Пусть неотрицательные последовательности* (a_n), (b_n), *таковы, что* $a_{n+1} \leq a_n + b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$. *Тогда существует* $\lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$.

Лемма 3 ([5])**.** *Пусть* H *— гильбертово пространство;* $F \subseteq H$ *— непустое замкнутое выпуклое множество;* (x_n) *— последовательность элементов* H *и* $\bar{x}_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k}$, *где* (λ_n) *— последовательность положительных чисел, такая, что* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = +\infty$. *Предположим, что: 1) предел произвольной слабо сходящейся подпоследовательности* $(\bar{x}_{n_k})$ *лежит в* F; *2) для произвольного* $y \in F$ *существует* $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y\| \in \mathbb{R}$. *Тогда последовательность* $(\bar{x}_n)$ *слабо сходится к некоторому элементу* $\bar{x} \in F$.

Асимптотическое поведение последовательности элементов

$$\bar{x}_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k},$$

где (x_n) — порожденная алгоритмом 1 последовательность, описывается следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть $A_i : H \to 2^H$ — максимальные монотонные операторы, $A = \sum_{i=1}^{m} A_i$ — максимальный монотонный оператор. Предположим, что последовательность положительных чисел (λ_n) удовлетворяет условия*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = +\infty \ , \ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < +\infty \ .$$

Тогда справедливы утверждения:

1) *если $0 \in R\,(A_1 + \ldots + A_m)$, то последовательность средних по Чезаро $(\bar{x}_n)$ слабо сходится к решению включения (1);*
2) *если $0 \notin R\,(A_1 + \ldots + A_m)$, то $\|\bar{x}_n\| \to +\infty$.*

Доказательство. Поскольку $x_{i,n} = J_{\lambda_n A_i} x_n$, то $\frac{x_n - x_{i,n}}{\lambda_n} = u_{i,n} \in A_i x_{i,n}$. Для произвольного элемента $x \in D\,(A)$ и $u_i \in A_i x$ благодаря монотонности оператора A_i имеем

$$\left(\frac{x_n - x_{i,n}}{\lambda_n} - u_i, x_{i,n} - x \right) = (u_{i,n} - u_i, x_{i,n} - x) \geq 0, \ \ 1 \leq i \leq m \, .$$

Откуда

$$(x_n - x_{i,n}, x_{i,n} - x) \geq \lambda_n \,(u_i, x_{i,n} - x)\,, \ \ 1 \leq i \leq m \, .$$

Учитывая элементарное алгебраическое тождество

$$2\,(x_n - x_{i,n}, x_{i,n} - x) = \|x_n - x\|^2 - \|x_{i,n} - x\|^2 - \|x_n - x_{i,n}\|^2$$

последние неравенства можно записать следующим образом

$$\begin{aligned} \|x_n - x\|^2 - \|x_{i,n} - x\|^2 &\geq \|x_n - x_{i,n}\|^2 + 2\lambda_n \,(u_i, x_{i,n} - x) = \\ &= \|x_n - x_{i,n}\|^2 + 2\lambda_n \,(u_i, x_{i,n} - x_n) + 2\lambda_n \,(u_i, x_n - x)\,, \ \ 1 \leq i \leq m \, . \quad (2) \end{aligned}$$

Из (2) следует

$$\|x_n - x\|^2 - \|x_{i,n} - x\|^2 \ \geq \ -\lambda_n^2 \,\|u_i\|^2 + 2\lambda_n \,(u_i, x_n - x)\,, \ \ 1 \ \leq \ i \ \leq \ m \, . \quad (3)$$

Здесь мы использовали оценки

$$\|x_n - x_{i,n}\|^2 + 2\lambda_n \,(u_i, x_{i,n} - x_n) \geq -\lambda_n^2 \,\|u_i\|^2\,, \ \ 1 \leq i \leq m \, .$$

Складывая умноженные на $\frac{1}{m}$ неравенства (3) и учитывая, что

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x\|^2 = \left\| \frac{x_{1,n} - x}{m} + \ldots + \frac{x_{m,n} - x}{m} \right\|^2 &\leq \\ &\leq \frac{1}{m} \,\|x_{1,n} - x\|^2 + \ldots + \frac{1}{m} \,\|x_{m,n} - x\|^2 \ , \end{aligned}$$

получим

$$\|x_n - x\|^2 - \|x_{n+1} - x\|^2 \geq -\frac{\lambda_n^2}{m} \sum_{i=1}^{m} \|u_i\|^2 + \frac{2}{m} (u, \lambda_n x_n - \lambda_n x), \qquad (4)$$

где $u = \sum_{i=1}^{m} u_i \in \sum_{i=1}^{m} A_i x = Ax$. Суммируя (4) по n от 1 до $N \in \mathbb{N}$ получим

$$\|x_1 - x\|^2 - \|x_{N+1} - x\|^2 \geq -\frac{1}{m} \left(\sum_{n=1}^{N} \lambda_n^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{m} \|u_i\|^2 \right) + \\ + \frac{2}{m} \left(u, \sum_{n=1}^{N} \lambda_n x_n - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n x \right). \qquad (5)$$

Поделив (5) на сумму $\sum_{n=1}^{N} \lambda_n$, приходим к неравенству

$$\frac{\|x_1 - x\|^2 - \|x_{N+1} - x\|^2}{\sum_{n=1}^{N} \lambda_n} \geq -\frac{1}{m} \left(\frac{\sum_{n=1}^{N} \lambda_n^2}{\sum_{n=1}^{N} \lambda_n} \right) \left(\sum_{i=1}^{m} \|u_i\|^2 \right) + \\ + \frac{2}{m} (u, \bar{x}_N - x). \qquad (6)$$

Предположим, что последовательность $(\bar{x}_N)$ имеет слабо сходящуюся к некоторому элементу $\bar{x} \in H$ подпоследовательность $(\bar{x}_{N_k})$. Записав (6) для $\bar{x}_{N_k}$ и совершив предельный переход при $k \to \infty$, получим

$$(u, \bar{x} - x) \leq 0 \quad \forall x \in D(A)\ \forall u \in Ax,$$

что, в силу максимальной монотонности оператора A, равносильно включению $0 \in A\bar{x}$, то есть, $\bar{x} \in A^{-1}0$.

Предположим, что $0 \in R(A)$. Положим в неравенстве (4) $x = \hat{x} \in A^{-1}0$ и $u = \sum_{i=1}^{m} u_i = 0$, $u_i \in A_i \hat{x}$. Получим

$$\|x_{n+1} - \hat{x}\|^2 \leq \|x_n - \hat{x}\|^2 + \frac{\lambda_n^2}{m} \sum_{i=1}^{m} \|u_i\|^2. \qquad (7)$$

Из неравенства (7), условия суммируемости $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < +\infty$ и леммы 2 следует существование $\lim_{n\to\infty} \|x_n - \hat{x}\| \in \mathbb{R}$.

Таким образом, в случае $0 \in R(A)$ для сгенерированной алгоритмом последовательности (x_n) и для множества $F = A^{-1}0$ выполнены условия леммы 3. Следовательно, последовательность $(\bar{x}_n)$ слабо сходится к некоторому элементу $\bar{x} \in A^{-1}0$.

Предположим, что $0 \notin R(A)$. Тогда $\|\bar{x}_n\| \to +\infty$. Действительно, иначе последовательность $(\bar{x}_n)$ имеет слабую предельную точку $\bar{x} \in H$, которая, как было показано ранее, принадлежит множеству $A^{-1}0$. $\square$

В завершение сформулируем вопрос, навеяный недавними работами [12, 13, 14, 15, 16]. Пусть A_1, A_2 — два максимальных монотонных оператора действующих из пространства H в 2^H, причем оператор $A_1 + A_2$ также максимальный монотонный. Предположим, что $A^{-1}0 \neq \emptyset$ и рассмотрим задачу поиска элементов $x \in H$ таких, что

$$0 \in N_{A_1^{-1}0}x + A_2x, \tag{8}$$

где $N_C x$ — нормальный конус к выпуклому множеству $C \subseteq H$ в точке $x \in H$, т. е.

$$N_C x = \begin{cases} \{z \in H: \ (z, y - x) \leq 0 \ \ \forall y \in C\}, & \text{если } x \in C, \\ \emptyset, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Замечание 4. В [13, 14, 15] при определенных условиях доказана сходимость итерационных схем вида $x_{n+1} = J_{(A_1+\alpha_n A_2)}x_n$, $\alpha_n > 0$.

Для решения задачи (8) предлагается декомпозиционная схема с параллельной организацией вычисления резольвент.

Алгоритм 2.

1) *Задаем* $\{\lambda_n\} \subseteq (0, +\infty)$, $\alpha_n \searrow 0$, $x_1 \in H$; $n := 1$.
2) *Находим элементы:*

$$y_n = J_{\lambda_n A_1}x_n, \ \ z_n = J_{\alpha_n \lambda_n A_2}x_n.$$

3) *Полагаем*

$$x_{n+1} = \frac{y_n + z_n}{2},$$

$n := n + 1$, *переходим на шаг 2.*

Замечание 5. Для 2-уровневой задачи выпуклого программирования [15, 16]

$$f_2(x) \to \min, \ \ x \in \operatorname{argmin} f_1,$$

алгоритм 2 приобретает вид

$$x_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\operatorname{prox}_{\lambda_n f_1} + \frac{1}{2}\operatorname{prox}_{\alpha_n \lambda_n f_2}\right)x_n.$$

Вопрос: каков характер сходимости алгоритма 2?

Литература

1. Бенсусан А. Методы декомпозиции, децентрализации, координации и их приложения / А. Бенсусан, Ж.-Л. Лионс, Р. Темам // Методы вычислительной математики. — Новосибирск: Наука, 1975. — С. 144–274.
2. Ермольев Ю. М. О некоторых подходах к развитию параллельных методов оптимизации / Ю. М. Ермольев, В. С. Михалевич, Н. Д. Чепурной // Кибернетика. — 1987. — № 5. — С. 3–10.
3. Марчук Г. И. Методы расщепления / Г. И. Марчук. — Москва: Наука, 1988. — 264 с.
4. Iiduka H. Decentralized Algorithm for Centralized Variational Inequalities in Network Resource Allocation / H. Iiduka // J. Optim. Theory Appl. — 2011. — 151. — P. 525–540.

5. Passty G. B. Ergodic Convergence to a Zero of the Sum of Monotone Operators in Hilbert Spaces / G. B. Passty // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1979. — 72. — P. 383–390.
6. Semenov V. V. On the Parallel Proximal Decomposition Method for Solving the Problems of Convex Optimization / V. V. Semenov // Journal of Automation and Information Sciences. — 2010. — V. 42, № 4. — P. 14–18.
7. Денисов С. В. Параллельная схема декомпозиции для поиска седловой точки и равновесия Нэша / С. В. Денисов // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2010. — № 3 (102). — С. 40–48.
8. Семенов В. В. Параллельная декомпозиция вариационных неравенств с монотонными операторами / В. В. Семенов // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2012. — № 2 (108). — С. 53–58.
9. Обен Ж.-П. Прикладной нелинейный анализ / Ж.-П. Обен, И. Экланд. — Москва: Мир, 1988. — 510 с.
10. Bauschke H. H. Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces / H. H. Bauschke, P. L. Combettes. — Springer, 2011. — 408 + xvi p.
11. Войтова Т. А. Методи регуляризації та декомпозиції варіаційних задач / Т. А. Войтова, Ю. В. Маліцький, В. В. Семенов // Праці міжнародної молодіжної математичної школи ”Питання оптимізації обчислень (ПОО–XXXVII)” — Київ: Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, 2011. — С. 30–31.
12. Семенов В. В. О сходимости методов решения двухуровневых вариационных неравенств с монотонными операторами / В. В. Семенов // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2010. — № 1 (100). — С. 121–129.
13. Войтова Т. А. Метод решения двухэтапных операторных включений / Т. А. Войтова, В. В. Семенов // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2010. — № 3 (102). — С. 34–39.
14. Денисов С. В. Проксимальний алгоритм для дворівневих варіаційних нерівностей: сильна збіжність / С. В. Денисов, В. В. Семенов // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2011. — № 3 (106). — С. 27-32.
15. Семенов В. В. Збіжність проксимального алгоритму для задачі дворівневої опуклої мінімізації / В. В. Семенов // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2012. — № 4 (110). — С. 100–111.
16. Войтова Т. А. Альтернуючий проксимальний алгоритм для задачі дворівневої опуклої мінімізації / Т. А. Войтова, С. В. Денисов, В. В. Семенов // Доповіді НАН України. — 2012. — № 2. — С. 56–62.

Факультет кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, ул. Владимирская, 64, Киев, 01601, Украина.

Поступила 22.03.2013