Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2013, №2(112) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.83

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СТАБИЛЬНЫХ РАЗМЕЩЕНИЙ

С. И. Доценко

Резюме. В статье дан краткий обзор математических результатов, которые легли в основу нобелевской премии по экономике за 2012 год. Рассматривается понятие некоммерческого рынка, на котором устанавливаются устойчивые паросочетания. Рассмотрен алгоритм Гейла-Шепли построения устойчивых паросочетаний и его применение в таких сферах, как принятие абитуриентов в учебные заведения и трансплантация органов.

1. Введение

В 2012 году Нобелевская премия по экономике была присуждена американским ученым Алвину Роту и Лойду Шепли за "Теорию стабильных размещений и практику формирования рынков". Необычность данной работы заключается в том, что она исследует так называемые некоммерческие рынки, на которых участвующие в них агенты борются за собственные интересы, но при этом на рассматриваемых рынках отсутствуют деньги. Математическим аппаратом данной работы являются такие разделы прикладной математики, как исследование операций и теория игр.

Классические задачи исследования операций, например, такие как задача о назначениях, задача о p-медиане, задача о ранце, задача коммивояжера, транспортные и сетевые задачи имеют своей целью максимизацию прибыли либо минимизацию расходов, т.е. в той или иной степени оперируют деньгами.

Однако, некоторые задачи распределения имеют некоммерческую природу. Такими задачами являются, например:
— романтические знакомства и браки;
— поступление учеников в учебные заведения (школы, вузы);
— трансплантация органов.

Исследования некоммерческих рынков начались в 1962 году и первый результат, впоследствии получивший название алгоритма Гейла-Шепли нахождения устойчивых паросочетаний, был опубликован в [1].

Пусть есть две группы агентов (например, мужчины и женщины) и каждый агент хочет найти себе пару из другой группы.

Для каждого агента задается строгий список предпочтения (список агентов в порядке убывания, с кем бы он хотел образовать пару больше, чем оставаться один). Список агентов противоположной группы может быть неполным.

Назовем паросочетанием (matching) двудольный граф, заданный на множестве агентов. Каждая вершина имеет степень 0 или 1 (разрешены только моногамные связи) либо можно быть ни с кем не связанным.

Пример 1. Пусть есть четверо мужчин: Коля, Петя, Вася, Миша и четыре женщины: Ира, Аня, Яна, Ева. Список предпочтений на данных множествах задается следующей таблицей:

Коля — (Ира, Аня, Яна)	Ира — (Вася, Коля)
Петя — (Яна, Ева)	Аня — (Коля, Петя, Миша)
Вася — (Яна, Ира)	Яна — (Коля, Миша, Петя, Вася)
Миша — (Аня, Ева, Яна)	Ева — (Петя, Миша)

Определение 1. Пара $(m(i)\,w(j))$ называется блокирующей, если оба агента предпочитают данный союз своим текущим связям.

Например, рассмотрим паросочетание Коля-Яна, Миша-Аня, Петя-Ева, Вася-Ира.

Пара Коля-Аня блокирующая, поскольку Коля может бросить Яну, а Аня — Мишу и образовать пару Коля-Аня. В результате оба улучшают свое положение.

Паросочетание называется устойчивым, если:

1) никто не связан с агентом, не входящим в свой список предпочтений;
2) множество связей не содержит блокирующих пар.

В [1] было доказано, что для любого набора списков предпочтения существует устойчивое паросочетание.

Устойчивых паросочетаний может быть одно или несколько, и одно из них гарантированно находится алгоритмом Шепли (deferred acceptance algorithm).

Суть алгоритма состоит в следующем.

1) Каждый мужчина делает предложение женщине, стоящей во главе его списка.
2) Если женщине было сделано одно предложение, она соглашается, если этот мужчина есть в ее списке (возможно, соглашается временно, т.е. говорит "может быть"). Если женщине было сделано несколько предложений, то она выбирает наиболее предпочтительного мужчину ("может быть"), остальных отвергает ("нет").
3) В следующем туре отвергнутые мужчины вычеркивают отвергнувших их женщин из своих списков и делают предложение следующей кандидатуре. Мужчины, помолвленные в предыдущем туре, делают предложение той же женщине. Женщины, получившие несколько предложений, вновь выбирают наилучшее и отвергают остальные.

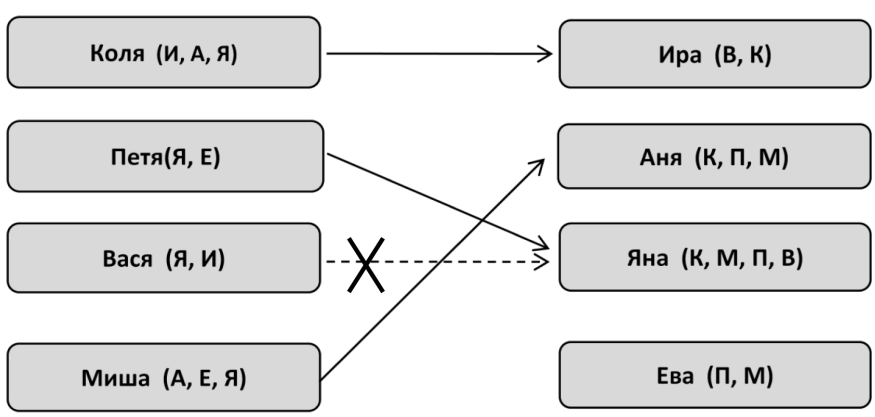
4) И т.д. до тех пор, пока все мужчины либо не будут иметь стабильные помолвки, либо не дойдут до конца списка.

Очевидно, что данный алгоритм всегда конечен. Действительно, на каждом шаге происходит продвижение по крайней мере одного из агентов по списку предпочтения. Отсутствие продвижения всех агентов означает достижение конца алгоритма. На каждом шаге каждому мужчине приписывается не более одной женщины и каждой женщине приписывается не более одного мужчины (из их списков предпочтения), т.е. имеет место некоторое допустимое паросочетание. Таким образом, за конечное число шагов будет найдено некоторое паросочетание. Покажем, что оно является стабильным. Доказательство проведем от противного.

Для данного паросочетания обозначим партнеров мужчин через $\mu(m)$, а партнеров женщин через $\mu(w)$. Предположим, что существует блокирующая пара (m, w), так что $w \succ_m \mu(m)$ и $m \succ_w \mu(w)$. Но по построению, если w более предпочтительна, чем $\mu(m)$, то w должна быть приписана m раньше, чем $\mu(m)$. Поскольку $\mu(m) \neq w$, то это означает, что m был отвергнут женщиной w, причем $\mu(w)$ был для нее более предпочтительным, чем m, $\mu(w) \succ_w (m)$. Поскольку отношения предпочтения ацикличны и транзитивны, то (m, w) не является блокирующей парой.

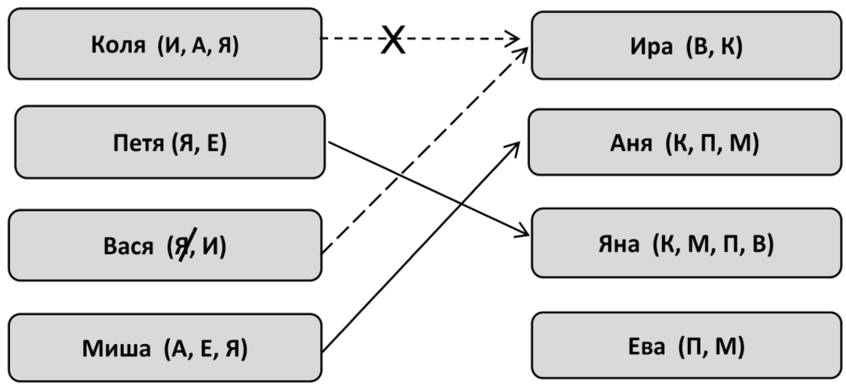
Рассмотрим применение алгоритма Гейла-Шепли к примеру 1.

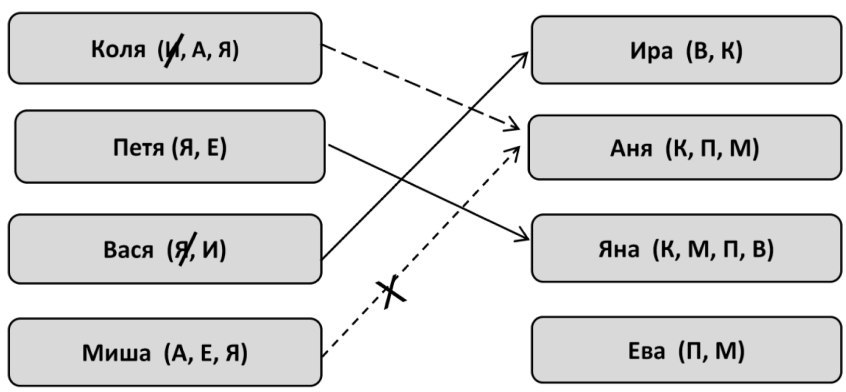
В первом туре Ира принимает Колю, Аня принимает Мишу, Яна принимает Петю и отвергает Васю. Вася вычеркивает Яну из списка.



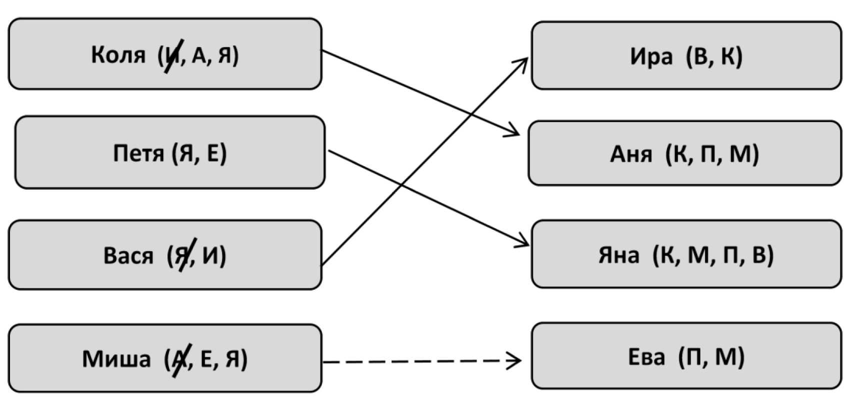
Во втором туре делается три повторных предложения из предыдущего тура. Вася делает предложение Ире, она соглашается и отвергает Колю. Коля вычеркивает Иру из списка.

В третьем туре делается три повторных предложения из предыдущего тура. Коля делает предложение Ане, она соглашается и отвергает Мишу. Миша вычеркивает Аню из списка.





В четвертом туре делается три повторных предложения из предыдущего тура. Миша делает предложение Еве, она соглашается. В результате достигнуты устойчивые связи.



Результатом применения алгоритма Гейла-Шепли для примера 1 является паросочетание Коля-Аня, Петя-Яна, Вася-Ира, Миша-Ева. В данном паросочетании нет блокирующих пар.

Свойства устойчивых паросочетаний описываются следующими тремя теоремами:

Теорема 1. *Порядок предложений не влияет на нахождение стабильного паросочетания.*

Теорема 2. *Построенное паросочетание из всех возможных стабильных паросочетаний является наилучшим для каждого мужчины и наихудшим для каждой женщины.*

Описанный алгоритм и полученное в результате его применения паросочетание называется Man-optimal (Мужской).

Теорема 3. *Во всех стабильных паросочетаниях множество одиноких агентов не меняется.*

Проиллюстрируем теорему 2. Для списка предпочтений примера 1 применим "Женский" алгоритм (т.е. женщины делают предложение первыми). В результате получим другое паросочетание Коля-Аня, Петя-Ева, Вася-Ира, Миша-Яна (тоже стабильное).

Сравнительная таблица рангов партнеров агентов для Man-optimal и Woman-optimal алгоритмов имеет вид:

Man-optimal		**Woman-optimal**	
Коля –2	Ира –1	Коля –3	Ира –1
Петя –1	Аня –1	Петя –2	Аня –1
Вася –2	Яна –3	Вася –2	Яна –2
Миша –3	Ева –2	Миша –3	Ева –1

Объектом дальнейших исследований данной модели была возможность манипулирования путем сообщения неправдивых сведений о своих предпочтениях ([2], [3]).

Может быть, в отдельных случаях выгодно обманывать остальных (т.е. заявлять список предпочтения, отличный от истинного?) Ответ — Да, иногда выгодно. Обман может быть двух типов — перестановка кандидатов в списке предпочтения или вычеркивание из списка.

Покажем, как работает механизм обмана на первом примере. Пусть реализуется мужской алгоритм, а Яна вычеркнула из своего списка предпочтения Петю и Васю.

Man–optimal, правда		**Man–optimal, Яна соврала**	
Коля –2	Ира –1	Коля –3	Ира –1
Петя –1	Аня –1	Петя –2	Аня –1
Вася –2	Яна –3	Вася –2	Яна –1
Миша –3	Ева –2	Миша –3	Ева –3

Таким образом, Яна, соврав, улучшила свой выбор (при этом ухудшив выбор Евы, Пети и Коли).

Рассмотрим пример обмана путем перестановки кандидатов в списке. Пусть для пяти мужчин и четырех женщин изначально заявлены такие списки предпочтений:

Коля — (Ира, Аня, Яна, Ева) Петя — (Ева, Аня, Яна, Ира) Вася — (Ева, Яна, Ира, Аня) Миша — (Ира, Ева, Яна, Аня) Саша — (Ира, Аня, Ева)	Ира — (Петя, Вася, Коля, Миша, Саша) Аня — (Вася, Коля, Петя, Миша, Саша) Яна — (Саша, Миша, Коля, Петя, Вася) Ева — (Коля, Миша, Саша, Петя, Вася)

и пусть реализуется мужской алгоритм.

Рассмотрим два случая. Пусть в первом случае все подали правдивые списки предпочтения. Пусть во втором случае Ира соврала, переставила кандидатов в списке, и представила список (Петя, Вася, Миша, Саша, Коля), а все остальные представили правдивые списки.

Сравнительные результаты применения мужского варианта алгоритма Гейла-Шепли и ранги агентов для обоих случаев приведены в следующей таблице.

Правдивые списки		**Ира соврала**	
Коля (И, А, Я, Е) — Ира (П, В ,К, М, С) Петя (Е, А, Я, И) — Аня (В, К, П, М, С) Вася (Е, Я, И, А) — Яна (М, К, П, В) Миша (И, Е, Я, А) — Ева (К, М,С, П, В) Саша (И, А, Е)		Коля (И, А, Я, Е) — Аня (В, К, П, М, С) Петя (Е, А, Я, И) — Яна (М, К, П, В) Вася (Е, Я, И, А) — Ира (П, В ,К, М, С) Миша (И, Е, Я, А) — Ева (К, М,С, П, В)	
Ранг агентов			
Коля — 1	Ира — 3	Коля — 2	Ира — 2
Петя — 2	Аня — 3	Петя — 3	Аня — 2
Вася — 2	Яна — 4	Вася — 3	Яна — 4
Миша — 2	Ева — 2	Миша — 2	Ева — 2
Саша — 3		Саша — 3	

Таким образом, Ира, соврав, получила партнера более предпочтительного, чем в случае, если бы она сказала правду.

В [3], [4] были сформулированы и доказаны теоремы "о механизмах вранья":

1) В общем случае не существует алгоритма нахождения устойчивого паросочетания, для которого правдивое составление списков является доминирующей стратегией.
2) Если списки предпочтений строгие и на множестве предпочтений устойчивое паросочетание неединственно, то по крайней мере одному агенту выгодно соврать, при условии, что остальные будут правдивыми.
3) Если реализуется "Man-optimal" алгоритм, то для мужчин говорить правду является доминирующей стратегией.

2.Обобщение задачи двустороннего выбора

Оказывается, что требование двудольности графа (или, другими словами, гетеросексуальности агентов) является принципиальным, иначе может не существовать устойчивого паросочетания

В [5] были приведены контрпримеры, показывающие, что если предпочтения задаются на одном либо на трех множествах агентов, то устойчивых размещений (при которых отсутствуют блокирующие пары) может не существовать.

Отсутствие устойчивого распределения для одного множества агентов иллюстрируется следующим простым примером — расселение по комнатам. Пусть 4 человека надо поселить по 2 в комнату, учитывая их предпочтения.

Коля (Петя, Вася, Миша)
Петя (Вася, Коля, Миша)
Вася (Коля, Петя, Миша)
Миша (Коля, Петя, Вася)

При расселении Коля-Петя, Вася-Миша возражают Петя и Вася
При расселении Коля-Вася, Петя-Миша возражают Коля и Петя
При расселении Коля-Миша, Петя-Вася возражают Коля и Вася.

Рассмотрим пример отсутствия устойчивого сочетания для трех множеств агентов (так называемых 3-сочетания). Пусть имеется три множества людей: мужчины N_m, женщины N_w и дети N_c, причем $|N_m| = |N_w| = |N_c|$. 3-сочетанием называется разбиение множества всех людей на группы по три человека, причем в каждую группу входит мужчина, женщина и ребенок. Каждый человек может иметь предпочтения относительно пар, которые могут входить в 3-сочетания, т.е. мужчины имеют предпочтения на множестве $N_w \times N_c$, женщины — на $N_m \times N_c$, а дети — на $N_m \times N_w$. Говорят, что тройка m, w, c блокирует 3-сочетание ν, если m предпочитает (w, c) паре $\nu(m)$, w предпочитает (m, c) паре $\nu(w)$, а с предпочитает (m, w) паре $\nu(c)$, т.е. $9w, c) \succ_m \nu(m), (m, c) \succ_w \nu(w), (m, c) \succ_c \nu(c)$.

Рассмотрим множества, состоящие из трех мужчин, трех женщин и трех детей, имеющих следующие предпочтения:
$P(m_1) : (w_1, c_3), (w_2, c_3), (w_1, c_1); P(m_2) : (w_2, c_3), (w_2, c_2), (w_3, c_3);$
$P(m_3) : (w_3, c_3); P(w_1) : (m_1, c_1); P(w_2) : (m_2, c_2);$
$P(w_3) : (m_2, c_3), (m_2, c_3); P(c_1) : (m_1, w_1); P(c_2) : (m_2, w_2);$
$P(c_3) : (m_1, w_3), (m_2, w_3), (m_1, w_2), (m_3, w_3).$

Здесь нет ни одного устойчивого 3-сочетания. Покажем это. Все 3-сочетания, которые дают m_1 (соответственно m_2 и m_3 "семью", более предпочтительную, чем (m_1, w_1, c_1) (соответственно (m_2, w_2, c_2)) неустойчивы. Действительно, любое 3-сочетание, содержащее (m_1, w_1, c_3) или (m_2, w_2, c_3) блокируется тройкой (m_3, w_3, c_3), а любое 3-сочетание, содержащее (m_1, w_2, c_3) — тройкой (m_2, w_3, c_3).

Любое 3-сочетание, которое не содержит (m_1, w_1, c_1) (соответственно (m_2, w_2, c_2)) блокируется либо (m_1, w_1, c_1) (соответственно (m_2, w_2, c_2)), либо неустойчиво, как показано выше. Наконец, (m_1, w_2, c_3) блокирует любое 3-сочетание, которое содержит (m_1, w_1, c_1) или (m_2, w_2, c_2).

Таким образом, все возможные 3-сочетания неустойчивы.

Оказывается. что в то время как требование бинарности сочетаний является принципиальным (выше были контрпримеры, демонстрирующие возможную неустойчивость 1- и 3-сочетаний), требование моногамности принципиальным не является.

В дальнейших исследованиях рассматривались задачи, в которых одна из групп может быть полигамной (студенты-ВУЗы). Каждый студент учится в одном ВУЗе, в каждом ВУЗе учится много студентов. При этом алгоритм Гейла-Шепли модифицируется, но принципиально не меняется ([6]–[9]).

В настоящее время модифицированный алгоритм Гейла-Шепли применяется при наборе учеников в школы и ВУЗы в Нью-Йорке, Бостоне, Будапеште, Сингапуре, а также при распределении выпускников мед. вузов в больницы в США. При этом процедура зачисления абитуриентов осуществляется следующим образом. И организации, и абитуриенты составляют списки предпочтения. Их централизованно обрабатывают организации (Clearinghouses). Эти организации подчинены национальной программе распределения абитуриентов — National Residence Matching Program (NRMP). При зачислении абитуриентов ранее реализовывался Man-optimal алгоритм.

Организации выступали в роли (полигамных) мужчин, а абитуриенты — в роли женщин.

Впоследствии возникли возражения, что алгоритм действует в интересах организаций, за счет интересов абитуриентов. Эти возражения были учтены, и стали внедряться алгоритмы, в большей степени учитывающие интересы абитуриентов.

Для школ раньше (до 2005 г.) действовал "Бостонский алгоритм" — принять как можно больше абитуриентов так, чтобы было удовлетворено их первое пожелание (из списка предпочтения), затем — второе и т.д ([10], [11]).

При таком алгоритме абитуриенты могут манипулировать списками предпочтения. Более слабым абитуриентам нужно высказывать не истинные, а "реалистичные" пожелания.

В настоящее время реализуется модифицированный Man-optimal алгоритм, где абитуриенты выступают в роли мужчин, но действуют дополнительные оговорки в пользу организаций, а в ряде случаев реализуется классический Man-optimal алгоритм для абитуриентов.

Частным случаем теории паросочетаний являются так называемые задачи одностороннего выбора и обмена. Такие задачи рассматриваются в случаях, когда одна из групп является неодушевленными предметами и им все равно, кто ими будет владеть. Например, таковыми являются отношения жители-дома, коллекционеры-картины, больные-трансплантаты.

Шепли и Скарф в 1974 году в [12] предложили housing market model.

В данной работе были исследованы рынки распределения и обмена, на которых нет денег.

Пусть имеется n человек и n домов и каждый человек владеет одним домом. Он составляет строгий список предпочтения всех n домов, включая свой собственный. Каждый человек хочет выменять другой дом, стоящий как можно выше в списке предпочтения.

Критерий стабильного распределения имеет вид: никакое подмножество людей не может образовать блокирующую коалицию.

В [12], [13] был рассмотрен алгоритм обмена домами, получивший название Top Trading Cycles algorithm — TTC. Суть алгоритма очень простая — вначале строится граф обмена домами, затем для построенного графа выполняется такая последовательность действий:

1) Каждый агент указывает на агента, чей дом ему нравится больше всех. В построенном ориентированном графе обязательно есть цикл или петля.
2) Производим обмен домами в найденном цикле (или петле).
3) Удаляем из рассмотрения агентов и дома, которые участвовали в циклическом обмене и переходим к п. 1.

Если у агентов нет прав на дом (например, комнаты общежития, n людей, n комнат), то в этом случае применяется Random Serial Dictatorship (RSD) алгоритм. Этот алгоритм также очень простой.

Вначале агенты случайным образом упорядочиваются (согласно равномерного дискретного распределения, т.е. все $n!$ возможных перестановок равновероятны). Затем первый агент получает свой наиболее желанный дом, второй — наиболее желанный из оставшихся и т.д.

Альтернативным алгоритмом является так называемый Core from Random Endowments (CRE) алгоритм. В данном алгоритме вначале случайным образом приписываются дома агентам (из равновероятного распределения), а затем применяется алгоритм TTC.

В [14] было показано, что для любой задачи распределения домов без прав агентов алгоритмы RSD и CRE порождают одну и ту же лотерею и, следовательно, являются эквивалентными.

В случае, если у одних агентов есть права на дом, а у других — нет, то применяется так называемый YRMH-IGYT алгоритм (you request my house, I get your turn).

Агенты случайным образом упорядочиваются (равномерное распределение).

Сначала на рынке только свободные дома.

1) Если есть владельцы домов, у которых свой дом стоит первым в списке, то такие владельцы и дома удаляются из рассмотрения.
2) Первый человек в очереди называет свою лучшую альтернативу.

Если этот дом доступный на рынке, то он выбирает этот дом. При этом, если у него был свой дом, но он выбрал другой, то его дом становится "свободным".

Если этот дом занят, то агенты переупорядочиваются так, что владелец занятого дома становится вперед (и делает запрос).

В результате образуется цикл, аналогичный алгоритму TTC.

Эти алгоритмы нашли применение в трансплантологии почек в США. Поскольку закон США о трансплантации от 1984 г. запрещает куплю, продажу и другие коммерческие операции с донорскими почками, то существует всего два источника, из которых больные могут получить необходимые им органы: изъятие у умерших на операционном столе либо пожертвование родственниками больных.

Количество почек, полученных из первого источника, в несколько раз меньше, чем число нуждающихся в них. В то же время почка, которую готовы пожертвовать родственники, может не подходить больному вследствие несовместимости по группе крови или другим медицинским показателям. Оказывается, что рассмотренные выше алгоритмы обмена идеально подходят для частичного сглаживания возникающих проблем. В [15]–[18] был разработан модифицированный алгоритм обмена, аналогичный TTC, использующий список ожидания.

По данному алгоритму донор может пожертвовать почку, если она подходит кому-либо из списка ожидания, в обмен на то, что их родственник получает приоритет в списке ожидания, и ему в первую очередь будет предоставлена почка, полученная из первого или второго источника.

В настоящее время данный алгоритм успешно применяется на практике в клиниках США.

Литература

1. Gale D. College admissions and the stability of marriage / D. Gale, L. S. Shapley // American Mathematical Monthly. — 1962. — V. 69. — P. 9–15.
2. Gärdenfors P. Match making: assignments based on bilateral preferences / P. Gärdenfors // Behavioral Science. — 1975. — V. 20. — P. 166–173.
3. The economics of matching: Stability and incentives / A. E. Roth, // Mathematics of Operations Research. — 1982 — V. 7. — P. 617–628.
4. Two-sided Matching: A Study in Game-theoretic Modeling and Analysis / A. E. Roth // Sotomayor M..Econometric Society Monograph Series. — Cambridge: Cambridge University Press. — 1990.
5. Алексеев Ф. Бинарные отношения, графы и коллективные решения / Ф. Алексеев, Э. Хабина, Д. Шварц. — Москва: Издательский дом ГУ ВШЭ, 2006. — 300 с.
6. Abdulkadiro A. School choice: A mechanism design approach. / A. Abdulkadiro, T. Sönmez // American Economic Review. — 2003. — V. 93. — P. 729–747.
7. Abdulkadiroglu A. The New York City high school match. / A. Abdulkadiroglu, P. A. Pathak, A. E. Roth // American Economic Review — 2005. — V. 95. — P. 364–367.
8. Balinski M. A tale of two mechanisms: student placement / M. Balinski, T. Sönmez // Journal of Economic Theory. — 1999.- V. 84. — P. 73–94.
9. Chen Y. School choice: An experimental study / Y. Chen, T. Sönmez // Journal of Economic Theory. — 2006. — V. 127. — P. 2002–2031.
10. Abdulkadiroglu A. The Boston public school match / A. Abdulkadiroglu, P. A. Pathak, A. E. Roth, T. Sönmez // American Economic Review. — 2005, — V. 95. — P. 368–371.

11. Ergin H. Games of school choice under the Boston mechanism / H. Ergin, T. Sönmez.// Journal of Public Economics. — 2006. — V. 90. — P. 215–237.
12. Shapley L. On cores and indivisibility / L. Shapley, S. Herbert // Journal of Mathematical Economics. — 1974, — V. 1(1). — P. 23–37.
13. Roth A. E. Incentive compatibility in a market with indivisibilities / A. E. Roth // Economics Letters. — 1982. — V. 9. — P. 127–132.
14. Abdulkadiroglu A. House allocation with existing tenants / A. Abdulkadiroglu, T. Sönmez // Journal of Economic Theory. — 1999. — V. 88. — P. 233–260.
15. Roth A. E. Kidney exchange / A. E. Roth, T. Sönmez , M. U. Ünver // Quarterly Journal of Economics. — 2004. — V. 119 . — P. 457–488.
16. Roth, A.E. A kidney exchange clearinghouse in New England / A. E. Roth, T. Sönmez, M. U. Ünver // American Economic Review- 2005. — V. 95. — P. 376–380.
17. Roth, A.E. Pairwise kidney exchange / A. E. Roth, , T. Sönmez, M.U. Ünver // Journal of Economic Theory — 2005. — V. 125. — P. 151–88.
18. Roth A. E. Efficient kidney exchange: Coincidence of wants in markets with compatibility-based preferences / A. E. Roth, T. Sönmez, M. U. Ünver // American Economic Review. — 2007. — V. 97. — P. 828–851.

Факультет кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, ул. Владимирская, 64, Киев, 01601, Украина.

Поступила 15.02.2013