Журнал обчислювальної та прикладної математики | **2013, №2(112)** | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.85

РАЗМЕЩЕНИЕ ОБЪЕКТОВ В КОНТЕЙНЕРЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ФОРМЫ С КРУГОВЫМИ СТЕЛЛАЖАМИ С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ ПОВЕДЕНИЯ

А. А. Коваленко, А. В. Панкратов, Т. Е. Романова

Резюме. Рассматривается задача оптимальной упаковки цилиндров и параллелепипедов в параболический контейнер с круговыми стеллажами с учетом минимально допустимых расстояний и ограничений поведения механической системы (динамическое равновесие, моменты инерции, устойчивость). Строится математическая модель с использованием метода phi-функций Стояна. Предлагается алгоритм решения задачи. Приводится тестовый пример.

Введение

Оптимизационные 3D-задачи размещения [1] имеют широкий спектр применения при исследовании актуальных проблем биологии, медицины, материаловедения, в нанотехнологиях, робототехнике, энергетике, машиностроении и т.д. Особый интерес представляют задачи упаковки, возникающие при проектировании кораблей, экранированных машин, платформ с буровой установкой, космических кораблей и спутников.

Этот класс задач относится к NP-сложным. Поэтому для решения задач используются как правило эвристические методы. В основе предлагаемых алгоритмов: теоретический анализ, тестовая задача с оптимальными решениями, инженерное применение. Однако алгоритм теоретического анализа является достаточно трудоемким, алгоритм инженерного применения — еще более сложный для ряда случаев, поэтому чаще всего проводят оценку при помощи тестовой задачи. Речь идет о максимизации коэффициента заполнения цилиндрического контейнера конгруэнтными цилиндрами равной высоты. В одной из последних монографий [2] предложены современные подходы к решению задач упаковки в космической технике "space engineering". В основе — MILP-алгоритмы, для применения которых используется аппроксимация размещаемых 3D-объектов ориентированными параллелепипедами. В этой книге приводится также постановка задачи размещения неориентированных объектов в параболический контейнер. Приводится математическая модель задачи с использованием phi-функций Стояна [3]. Phi-функции позволяют описывать математические модели задач упаковки в виде задач нелинейной оптимизации с целью применения для их решения методов локальной и глобальной оптимизации. В современных публикациях, посвященных 3D-задачам упаковки с использованием phi-функций, рассматриваются эффективные методы решения задач размещения цилиндров, параллелепипедов, шаров и сфероцилиндров в цилиндре и параллелепипеде минимальной высоты [4] .

В данной работе предлагается математическая модель и метод решения 3D-задачи оптимальной упаковки цилиндров и параллелепипедов в параболический контейнер с круговыми стеллажами (pallet cradle) с учетом минимально допустимых расстояний и ограничений поведения механической системы (динамическое равновесие, моменты инерции, устойчивость).

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу размещения в следующей постановке. Пусть Ω — контейнер (например, модульный отсек ракеты), заданный в системе координат $OXYZ$ следующим образом: $\Omega = Q \cap G$, где $Q = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z + x^2 + y^2 - a \leq 0\right\}$, $G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -z \leq 0\right\}$. Контейнер Ω разделен круговыми слеллажами $S_k, k = 1, 2, ..., m$ на отсеки: Ω^1, Ω^2,…, Ω^m, при этом S_1 — основание контейнера Ω. Для простоты изложения, полагаем $m = 3$. Расстояние между S_1 и S_2 определяется как t_1, а между S_2 и S_3 — t_2. Следовательно, S_1, S_2 и S_3 — это круги радиусами $r_1 = \sqrt{a}$, $r_1 = \sqrt{a - t_1}$ и $r_1 = \sqrt{a - t_1 - t_2}$, соответственно. Обозначим $a - t_1 - t_2$ через t_3 (рис.1а).

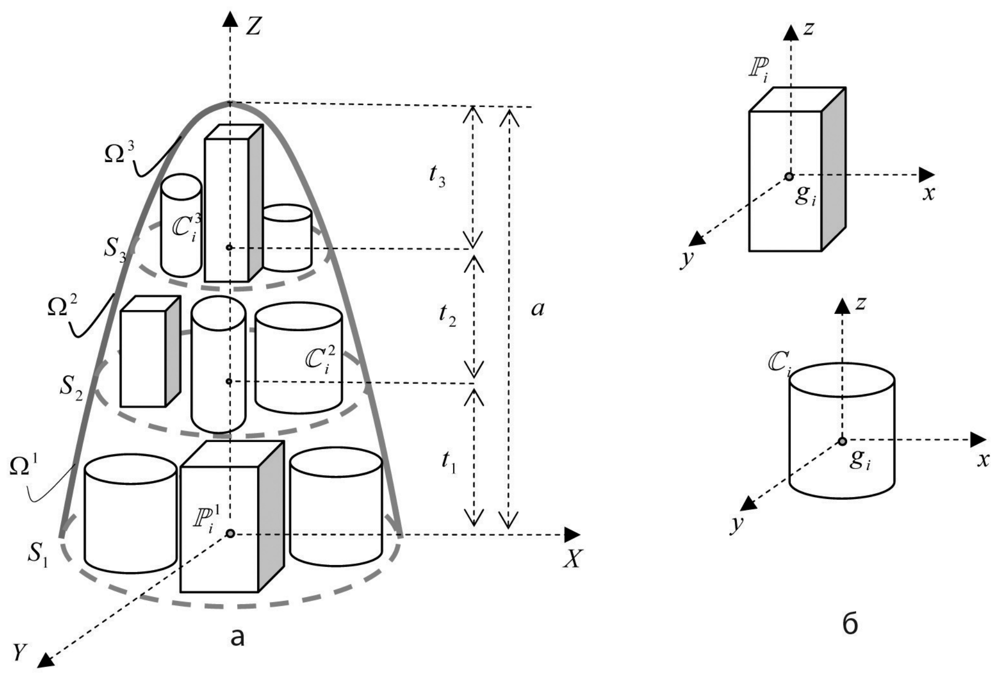

Рис. 1. а) Система Ω_M, б) элементы множества M: $\mathbb{C}_i$ и $\mathbb{P}_i$

Имеется множество M элементов (например, модулей), состоящее из цилиндров $\mathbb{C}_i$, $i \in I_1 = \{1, 2, ..., n_1\}$ с метрическими характеристиками (r_i, h_i) и параллелепипедов $\mathbb{P}_i$, $i \in I_2 = \{n_1 + 1, ..., n_1 + n_2 = n\}$ с метрическими характеристиками (w_i, l_i, h_i) (рис. 1б), при этом $h^k \leq t^k$, $h^k = \max\{h_i^k, i \in I^k\}$. Каждый элемент $\mathbb{C}_i$ задан в собственной системе координат $O'x'y'z'$, а каждый элемент $\mathbb{P}_i$ — в $O''x''y''z''$.

Контейнер Ω с упакованными в нем элементами множества M — механическая система, в дальнейшем, — система Ω_M.

Осуществим разбиение элементов множества M на группы $M^k = \{\mathbb{C}_i, i \in I_1^k, \mathbb{P}_i, i \in I_2^k\}$, где

$I_1^1 = \{1, 2, ..., n_1^1\}$, $I_2^1 = \{n_1 + 1, n_1 + 2, ..., n_2^1\}$ — индексные подмножества цилиндров и параллелепипедов, размещаемых на полке S_1,

$I_1^2 = \{n_1^1 + 1, n_1^1 + 2, ..., n_1^2\}$, $I_2^2 = \{n_2^1 + 1, n_2^1 + 2, ..., n_2^2\}$ — индексные подмножества цилиндров и параллелепипедов, размещаемых на полке S_2,

$I_1^3 = \{n_1^2 + 1, n_1^2 + 2, ..., n_1^3\}$, $I_2^3 = \{n_2^2 + 1, n_2^2 + 2, ..., n_2^3\}$ — индексные подмножества цилиндров и параллелепипедов, размещаемых на полке S_3, $n_1^3 = n_1$, $n_2^3 = n$.

Заданы минимально допустимые расстояния σ_{ij} и σ_i между каждой парой элементов $M_i^k \in M^k$ и $M_j^k \in M^k$, $i, j \in I^k = \{I_1^k \bigcup I_2^k\}$, $i \neq j$, а также между каждым элементом $M_i^k \in M^k$, $i \in I^k$ и боковой поверхностью отсека Ω^k, соответственно.

Расположение цилиндров $\mathbb{C}_i$ на полках Sk внутри отсеков Ω^k определяется параметрами размещения $u_i = (v_i, h_i)$, $i \in I_1^1$, $u_i = (v_i, t_1 + h_i)$, $i \in I_1^2$, и $u_i = (v_i, t_1 + t_2 + h_i)$, $i \in I_1^3$, где $v_i = (x_i, y_i)$. По аналогии, определим параметры размещения $\mathbb{P}_i$ следующим образом: $u_i = (v_i, \alpha_i, h_i)$, $i \in I_2^1$, $u_i = (v_i, \alpha_i, t_1 + h_i)$, $i \in I_2^2$, и $u_i = (v_i, \alpha_i, t_1 + t_2 + h_i)$, $i \in I_2^3$, где $v_i = (x_i, y_i)$, α_i — угол поворота $\mathbb{P}_i$ вокруг оси $O_i''z$.

Таким образом, вектор $u = (u_1, u_2, ..., u_n) \in \mathbb{R}^{3n_1+4n_2}$ определяет в $\mathbb{R}^3$ однозначно размещение элементов множества M. Поскольку z_i, является константой для каждого элемента $M_i^k \in M^k$, $i \in I^k$, то вектор переменных $v = (v_1, v_2, ..., v_n) \in \mathbb{R}^\xi$, $\xi = 2n_1 + 3n_2$.

Каждый элемент множества M представляет собой однородое тело массой m_i, $i \in I_n$. Центр масс g_i элемента $\mathbb{C}_i$ $(\mathbb{P}_i)$ совпадает с центром его симметрии в точке O_i' (O_i'') , т.е. $g_i = (0, 0, 0)$ (Рис. 1б).

Пусть $s{=}(x_s, y_s, z_s){\in}\Omega$ центр масс контейнера Ω, а $g{=}(x_g, y_g, z_g){\in}\Omega_M$ центр масс множества M, координаты которого находятся по формулам

$$x_g = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i},\ y_g = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i},$$

$$z_g = \frac{\sum_{i=1}^{n_1^1} m_i h_i/2}{\sum_{i=1}^{n} m_i} + \frac{\sum_{i=n_1+1}^{n_2^1} m_i h_i/2}{\sum_{i=1}^{n} m_i} + \frac{\sum_{i=n_1^1+1}^{n_1^2} m_i(t_1 + h_i/2)}{\sum_{i=1}^{n} m_i} + \tag{1}$$
$$+\frac{\sum_{i=n_2^1+1}^{n_2^2} m_i(t_1 + h_i/2)}{\sum_{i=1}^{n} m_i} + \frac{\sum_{i=n_1^2+1}^{n_1^3} m_i(t_1 + t_2 + h_i/2)}{\sum_{i=1}^{n} m_i} +$$
$$+\frac{\sum_{i=n_2^2+1}^{n_2^3} m_i(t_1 + t_2 + h_i/2)}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

Задача. Разместить элементы множества M на полках $S_k, k = 1, 2, 3$ внутри отсеков $\Omega^k, k = 1, 2, 3$, с учетом минимально допустимых расстояний и ограничений поведения системы Ω_M так, чтобы расстояние d между центром тяжести g множества M и заданным центром тяжести $s \in \Omega$ достигало своего минимального значения.

2. Математическая модель и метод решения задачи

Математическая модель поставленной задачи имеет вид

$$F(v^*) = \min_{v \in W \in R^{\xi}} F(v)\ , \tag{2}$$

$$F(v) = (x_g - x_s)^2 + (y_g - y_s)^2 + (z_g - z_s)^2, \tag{3}$$

$$W = \{v \in R^{\xi} : \Upsilon(v) \geq 0, G_1(v) \geq 0, G_2(v) \geq 0\}, \tag{4}$$

где x_g, y_g, z_g определены соотношениями (1),

$\Upsilon(u) \geq 0$ — ограничение на размещение элементов множества Mв контейнере Ω:

$$\Upsilon(v) = \min\{\widetilde{\Phi}_{ij}^{\mathbb{CC}} - \sigma_{ij}, i < j \in I_1^k, \widetilde{\Phi}_{ij}^{\mathbb{PP}} - \sigma_{ij}, i < j \in I_2^k,$$
$$\widetilde{\Phi}_{ij}^{\mathbb{CP}} - \sigma_{ij}, i \in I_1^k, j \in I_2^k, \widetilde{\Phi}_{i}^{\mathbb{C}} - \sigma_{i}, i \in I_1^k, \widetilde{\Phi}_{i}^{\mathbb{P}} - \sigma_{i}, i \in I_2^k, k = 1, 2, 3\}, \tag{5}$$

$\widetilde{\Phi}_{ij}^{\mathbb{CC}}$ — нормализованная *phi*-функция для цилиндров $\mathbb{C}_i$ и $\mathbb{C}_j$,

$\widetilde{\Phi}_{ij}^{\mathbb{PP}}$ — нормализованная *phi*-функция для параллелепипедов $\mathbb{P}_i$ и $\mathbb{P}_j$,

$\widetilde{\Phi}_{ij}^{\mathbb{CP}}$ — нормализованная *phi*-функция для цилиндра $\mathbb{C}_i$ и параллелепипеда $\mathbb{P}_j$,

$\widetilde{\Phi}_{i}^{\mathbb{C}}$ — нормализованная *phi* -функция для цилиндра $\mathbb{C}_i$ и Ω^*,

$\widetilde{\Phi}_{i}^{\mathbb{P}}$ — нормализованная *phi*-функция для параллелепипеда $\mathbb{P}_i$ и Ω^*;

$G_1(v) \geq 0, G_2(v) \geq 0$ — ограничения поведения системы Ω_M [5], где

$$G_1(v) = \min\{g_{11}(v), g_{12}(v), g_{13}(v)\}, \tag{6}$$

$$G_2(v) = \min\{g_{21}(v), g_{22}(v), g_{23}(v)\}, \tag{7}$$

$g_{11}(v), g_{12}(v), g_{13}(v)$ — ограничения моментов инерции системы Ω_M,

$$g_{11}(v) = -|J_x| + \Delta J_x, g_{12}(v) = -|J_y| + \Delta J_y, g_{13}(v) = -|J_z| + \Delta J_z, \tag{8}$$

$g_{21}(v), g_{22}(v), g_{23}(v)$ — ограничения равновесия системы Ω_M,

$$g_{21}(v) = -|\varphi_x| + \Delta\varphi_x, g_{22}(v) = -|\varphi_y| + \Delta\varphi_y, g_{23}(v) = -|\varphi_z| + \Delta\varphi_z, \tag{9}$$

$$J_x = \sum_{i=1}^{n_1} J'_{x_i} + \sum_{i=n_1+1}^{n} (J''_{x_i}\cos^2\alpha_i + J''_{y_i}\sin^2\alpha_i) + \sum_{i=1}^{n_1^1} m_i(y_i^2 + (h_i/2)^2) +$$
$$+ \sum_{i=n_1+1}^{n_2^1} m_i(y_i^2 + (h_i/2)^2) + \sum_{i=n_1^1+1}^{n_1^2} m_i(y_i^2 + (t_1 + h_i/2)^2) +$$
$$+ \sum_{i=n_2^1+1}^{n_2^2} m_i(y_i^2 + (t_1 + h_i/2)^2) + \sum_{i=n_1^2+1}^{n_1^3} m_i(y_i^2 + (t_1 + t_2 + h_i/2)^2) +$$
$$+ \sum_{i=n_2^2+1}^{n_2^3} m_i(y_i^2 + (t_1 + t_2 + h_i/2)^2) - (y_g^2 + z_g^2)\sum_{i=1}^{n} m_i;$$

$$J_y = \sum_{i=1}^{n_1} J'_{y_i} + \sum_{i=n_1+1}^{n} (J''_{x_i}\cos^2\alpha_i + J''_{y_i}\sin^2\alpha_i) + \sum_{i=1}^{n_1^1} m_i(x_i^2 + (h_i/2)^2) + \tag{10}$$
$$+ \sum_{i=n_1+1}^{n_2^1} m_i(x_i^2 + (h_i/2)^2) + \sum_{i=n_1^1+1}^{n_1^2} m_i(x_i^2 + (t_1 + h_i/2)^2) +$$
$$+ \sum_{i=n_2^1+1}^{n_2^2} m_i(x_i^2 + (t_1 + h_i/2)^2) + \sum_{i=n_1^2+1}^{n_1^3} m_i(x_i^2 + (t_1 + t_2 + h_i/2)^2) +$$
$$+ \sum_{i=n_2^2+1}^{n_2^3} m_i(x_i^2 + (t_1 + t_2 + h_i/2)^2) - (x_g^2 + z_g^2)\sum_{i=1}^{n} m_i;$$

$$J_z = \sum_{i=1}^{n_1} J'_{z_i} + \sum_{i=n_1+1}^{n} J''_{z_i} + \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + y_i^2) - (x_g^2 + y_g^2)\sum_{i=1}^{n} m_i;$$

$J'_{x_i}, J'_{y_i}, J'_{z_i}$ — моменты инерции элементов $\mathbb{C}_i$ в системе координат $O'x'y'z'$:

$$J'_{x_i} = J'_{y_i} = \frac{1}{12} m_i(3r_i^2 + h_i), J'_{z_i} = \frac{1}{2} m_i r_i^2, \tag{11}$$

J''_{x_i}, J''_{y_i}, J''_{z_i} — моменты инерции элементов $\mathbb{P}_i$ в собственной системе координат $O''x''y''z''$:

$$J''_{x_i} = \frac{1}{12}m_i(w_i^2 + h_i^2), J''_{y_i} = \frac{1}{12}m_i(l_i^2 + h_i^2), J''_{z_i} = \frac{1}{12}m_i(l_i^2 + w_i^2); \tag{12}$$

ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z — углы между главной центральной осью механической системы и осями системы координат $OXYZ$:

$$\begin{gathered} \phi_x = \frac{1}{2}arctg\left(\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}\right), \varphi_y = \frac{1}{2}arctg\left(\frac{2J_{xz}}{J_z - J_x}\right), \\ \varphi_z = \frac{1}{2}arctg\left(\frac{2J_{yz}}{J_z - J_y}\right), \end{gathered} \tag{13}$$

$\Delta\varphi_x, \Delta\varphi_y, \Delta\varphi_z$ — допустимые отклонения $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$;

J_{xy}, J_{xz}, J_{yz} — центробежные моменты инерции системы по отношению к основной системе координат $OXYZ$, которые определяются следующими соотношениями:

$$\begin{gathered} J_{xy} = \frac{J_U - J_V}{2}\sin 2\alpha_i + \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i - x_g y_g \sum_{i=1}^{n} m_i; \\ J_{xz} = \sum_{i=1}^{n_1^1} m_i x_i h_i/2 + \sum_{i=n_1+1}^{n_2^1} m_i x_i h_i/2 + \sum_{i=n_1^1+1}^{n_1^2} m_i x_i (t_1 + h_i/2) + \\ + \sum_{i=n_2^1+1}^{n_2^2} m_i x_i (t_1 + h_i/2) + \sum_{i=n_1^2+1}^{n_1^3} m_i x_i (t_1 + t_2 + h_i/2) + \\ + \sum_{i=n_2^2+1}^{n_2^3} m_i x_i (t_1 + t_2 + h_i/2) - x_g z_g \sum_{i=1}^{n} m_i; \\ J_{yz} = \sum_{i=1}^{n_1^1} m_i y_i h_i/2 + \sum_{i=n_1+1}^{n_2^1} m_i y_i h_i/2 + \sum_{i=n_1^1+1}^{n_1^2} m_i y_i (t_1 + h_i/2) + \\ + \sum_{i=n_2^1+1}^{n_2^2} m_i y_i (t_1 + h_i/2) + \sum_{i=n_1^2+1}^{n_1^3} m_i y_i (t_1 + t_2 + h_i/2) + \\ + \sum_{i=n_2^2+1}^{n_2^3} m_i y_i (t_1 + t_2 + h_i/2) - y_g z_g \sum_{i=1}^{n} m_i; \end{gathered} \tag{14}$$

J_U, J_V — моменты инерции относительно главных осей U и V инерции системы, соответственно,

$$
\begin{gathered}
J_U = \sum_{i=1}^{n_1} J'_{x_i} + \sum_{i=n_1+1}^{n} J''_{x_i} + \sum_{i=1}^{n_1^1} m_i(y_i^2 + (h_i/2)^2) + \\
+ \sum_{i=n_1+1}^{n_2^1} m_i(y_i^2 + (h_i/2)^2) + \sum_{i=n_1^1+1}^{n_1^2} m_i(y_i^2 + (t_1 + h_i/2)^2) + \\
+ \sum_{i=n_2^1+1}^{n_2^2} m_i(y_i^2 + (t_1 + h_i/2)^2) + \sum_{i=n_1^2+1}^{n_1^3} m_i(y_i^2 + (t_1 + t_2 + h_i/2)^2) + \\
+ \sum_{i=n_2^2+1}^{n_2^3} m_i(y_i^2 + (t_1 + t_2 + h_i/2)^2); \\
J_V = \sum_{i=1}^{n_1} J'_{y_i} + \sum_{i=n_1+1}^{n} J''_{y_i} + \sum_{i=1}^{n_1^1} m_i(x_i^2 + (h_i/2)^2) + \\
+ \sum_{i=n_1+1}^{n_2^1} m_i(x_i^2 + (h_i/2)^2) + \sum_{i=n_1^1+1}^{n_1^2} m_i(x_i^2 + (t_1 + h_i/2)^2) + \\
+ \sum_{i=n_2^1+1}^{n_2^2} m_i(x_i^2 + (t_1 + h_i/2)^2) + \sum_{i=n_1^2+1}^{n_1^3} m_i(x_i^2 + (t_1 + t_2 + h_i/2)^2) + \\
+ \sum_{i=n_2^2+1}^{n_2^3} m_i(x_i^2 + (t_1 + t_2 + h_i/2)^2).
\end{gathered}
\tag{15}
$$

Учитывая особенности рассматриваемой задачи, нормализованные *phi*-функции, приведенные в (5), могут быть заменены нормализованными *phi*-функциями для 2D-объектов следующим способом:

$\widetilde{\Phi}_{ij}^{\mathbb{CC}} \Rightarrow \widetilde{\Phi}_{ij}^{CC}$ $\widetilde{\Phi}_{ij}^{\mathbb{PP}} \Rightarrow \widetilde{\Phi}_{ij}^{RR}, \widetilde{\Phi}_{ij}^{\mathbb{CP}} \Rightarrow \widetilde{\Phi}_{ij}^{CR}, i, j \in I_k, i \neq k$, где $\widetilde{\Phi}_{ij}^{CC}$ — нормализованная *phi*-функция для двух кругов C_i и C_j , $\widetilde{\Phi}_{ij}^{RR}$ — нормализованная *phi*-функция для двух вращающихся прямоугольников R_i и R_j, $\widetilde{\Phi}_{ij}^{CR}$– нормализованная *phi*-функция для круга C_i и вращающегося прямоугольника R_j. Метрические характеристики C_i и R_i определяются как (r_i) и (w_i, l_i) соответственно.

$\widetilde{\Phi}_i^{\mathbb{C}} \Rightarrow \widetilde{\Phi}_i^{S_{ki}^* C}$, $i \in I_1^k$, где $\widetilde{\Phi}_i^{S_{ki}^* C}$ — нормализованная *phi*-функция для C_i и $S_{ki}^* = R^2 \backslash int S_{ki}$,

S_{ki}, $k = 1, 2, 3,$ — круги радиуса $r_{1i} = \sqrt{a - h_i}$, $r_{2i} = \sqrt{a - t_1 - h_i}$, $r_{3i} = \sqrt{a - t_1 - t_2 - h_i}$.

$\widetilde{\Phi}_i^{\mathbb{P}} \Rightarrow \widetilde{\Phi}_i^{S_{ki}^* C}$, $i \in I_2^k$, где $\widetilde{\Phi}_i^{S_{ki}^* R}$ — нормализованная *phi*-функция для вращающегося прямоугольника R_i и S_{ki}^*.

Таким образом, ограничения на размещение объектов в контейнере Ω преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned}\Upsilon(u) = \min\{\widetilde{\Phi}^{CC}_{ij} - \sigma_{ij}, i < j \in I^k_1, \widetilde{\Phi}^{RR}_{ij} - \sigma_{ij}, i < j \in I^k_2, \widetilde{\Phi}^{CR}_{ij} - \sigma_{ij},\\ i \in I^k_1, j \in I^k_2, \widetilde{\Phi}^{S^*_{ki}C}_i - \sigma_i, i \in I^k_1, \widetilde{\Phi}^{S^*_{ki}R}_i - \sigma_i, i \in I^k_2, k = 1, 2, 3\}.\end{aligned} \tag{16}$$

В терминах псевдонормализованных *phi*-функций [3] область допустимых решений, описанная (16), может быть определена так:

$$\begin{aligned}\Upsilon(u) = \min\{\widehat{\Phi}^{CC}_{ij}, i < j \in I^k_1, \widehat{\Phi}^{RR}_{ij}, i < j \in I^k_2,\\ \widehat{\Phi}^{CR}_{ij}, i \in I^k_1, j \in I^k_2, \widehat{\Phi}^{S^*_{ki}C}_i, i \in I^k_1, \widehat{\Phi}^{S^*_{ki}R}_i, i \in I^k_2, k = 1, 2, 3\},\end{aligned} \tag{17}$$

где $\widehat{\Phi}$ — псевдонормализованная *phi*-функция.

В силу особенностей области допустимых решений [6]

$$W = W_1 \bigcup ... \bigcup W_k \bigcup ... \bigcup W_\eta. \tag{18}$$

С учетом выражений (17) и (18) задача (2)–(15) может быть сведена к задаче

$$\begin{aligned}F(v^*) = \min\{F(v^{k*}), k = 1, 2, ..., \eta\},\\ F(v^{k*}) = \min_{u \in W_k \subset R^\xi} F(v).\end{aligned} \tag{19}$$

Предлагаемый метод решения задачи (19) реализует ускоренный перебор систем неравенств, соответствующих вершинам дерева решений. С целью отсечения бесперспективных вершин дерева решений используется набор правил, основанных на учете верхней оценки значения функции цели, симметрии W и несовместности систем при решении последовательности задач нелинейной оптимизации.

3. Тестовый пример

Проиллюстрируем результаты численных экспериментов на тестовом примере.

Пусть $a = 16$, $t_1 = 4$, $t_2 = 2$, $s = (0, 0, 0)$; $M = \{\mathbb{C}_i,\ i = 1, ..., 7, \mathbb{P}_i,\ i = 8, ..., 12\}$, $r_1 = 1$, $r_2 = 1.1$, $r_3 = 1.2$, $r_4 = 1$, $r_5 = 1.1$, $r_6 = 1$, $r_7 = 1$, $(w_i, l_i) = (1.33, 0.75)$, $i = 8, ..., 12$, $h_i = 0.88$, $i = 1, ..., 12$; $m_1 = 3.142$, $m_2 = 3.8013$, $m_3 = 4.524$, $m_4 = 3.142$, $m_5 = 3.801$, $m_6 = 3.142$, $m_7 = 3.142$, $m_i = 4$, $i = 8, ..., 12$; σ_i=0.2,$i = 1, 2 \ldots, 12$, σ_{ij}=0.2, $i \neq j \in \{1, ..., 12\}$, $M^1 = \{\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2, \mathbb{C}_3, \mathbb{P}_8, \mathbb{P}_9\}$, $M^2 = \{\mathbb{C}_4, \mathbb{C}_5, \mathbb{P}_{10}, \mathbb{P}_{11}\}$, $M^3 = \{\mathbb{C}_6, \mathbb{C}_7, \mathbb{P}_{12}\}$. Не теряя общности, полагаем $(x_s, y_s, z_s) = (0, 0, 0)$.

Вектор переменных $v = (v_1, v_2, ..., v_{12}) \in \mathbb{R}^{29}$.

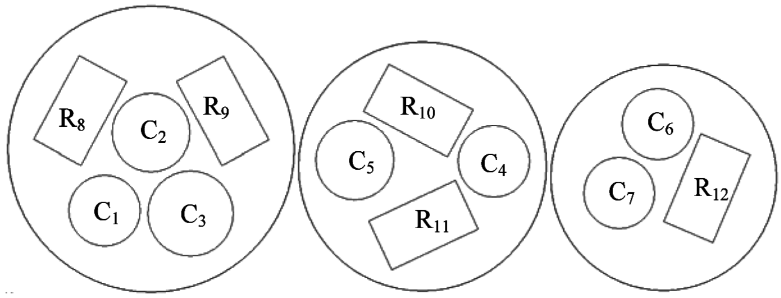

Рис. 2. Оптимальное размещение объектов на стеллажах в соответствии с точкой v^* (проекция)

На рисунке 2 приведено оптимальное размещение 2D-объектов $\{C_i, i = 1, ..., 7,\ R_i, i = 8, ..., 12\}$, соответствующее точке

$$v^* = (x_1^*, y_1^*, ..., x_7^*, y_7^*, x_8^*, y_8^*, \theta_8^*, ..., x_{12}^*, y_{12}^*, \theta_{12}^*),$$

где

$$(x_1^*, y_1^*) = (-1.29956, -1.71262), (x_2^*, y_2^*) = (0.00122, 0.45696),$$
$$(x_3^*, y_3^*) = (1.09994, -1.78878), (x_4^*, y_4^*) = (1.99438, 0.14595),$$
$$(x_5^*, y_5^*) = (-1.88631, 0.17553), (x_6^*, y_6^*) = (-0.16247, 1.49016),$$
$$(x_7^*, y_7^*) = (-1.24515, -0.42938), (x_8^*, y_8^*, \theta_8^*) = (-1.98972, 1.08949, 5.21332),$$
$$(x_9^*, y_9^*, \theta_9^*) = (1.995774, 1.078259, 1.075465),$$
$$(x_{10}^*, y_{10}^*, \theta_{10}^*) = (-0.124421, 1.553304, 0.498449),$$
$$(x_{11}^*, y_{11}^*, \theta_{11}^*) = (0.023846, -1.616274, 2.700283),$$
$$(x_{12}^*, y_{12}^*, \theta_{12}^*) = (1.201675, -0.285530, 1.973668).$$

Заметим, что данное размещение соответствует оптимальному размещению 3D-объектов $\{\mathbb{C}_i, i = 1, ..., 7,\ \mathbb{P}_i, i = 8, ..., 12\}$ в точке u^*.

В данном примере число η в (19) равно 4947802324992. Для поиска глобального минимума использовалось η^*=723. Время на поиск локального минимума составляет меньше секунды.

Выводы

Результаты исследований, предложенные в данной работе могут быть использованы при создании современных компьютерных технологий для решения широкого класса прикладных 3D-задач компоновки, возникающих в ракетостроении. Предложенный подход к моделированию и решению задачи размещения 3D-объектов в параболическом контейнере с учетом ограничений поведения может быть распространен на случай иных пространственных форм контейнера с круговыми стеллажами, в частности, цилиндра или усеченного конуса.

Работа выполнена при поддержке Научно Технологического Центра в Украине и НАН Украины (проект №5710).

Литература

1. Wascher G. An improved typology of cutting and packing problems/ G. Wascher, H. Hauner, H. Schumann // European Journal of Operational Research, — 2007. — V. 183, Iss. 3, 16, — P. 1109–1130.
2. Fasano G. Modeling and Optimization in Space Engineering Springer Optimization and Its Applications / G. Fasano, J. Pinter — Publisher Springer StateplaceNew York, —2012. — V. 73, — 404 p.
3. Chernov N. Phi-Functions for 2D Objects Formed by Line Segments and Circular Arcs / N. Chernov, Y. Stoyan, T. Romanova, A. Pankratov // Advances in Operations Research, — 2012. — V. 2012, Article ID 346358, — 31 p., doi:10.1155/2012/346358.
4. Stoyan Y. Packing cylinders and rectangular parallelepipeds with distances between them / Y. Stoyan, A. Chugay // European J. Oper. Res., — 2008. — 197, — P. 446–455.
5. Chernov N. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem /N. Chernov, Y. Stoyan, T. Romanova. // Computational Geometry: Theory and Applications. — 2010. — V. 43, №5 , — P. 535–553.
6. Стоян Ю.Г. Математическое моделирование ограничений на допустимые расстояния между геометрическими объектами/ Ю.Г. Стоян, А.В. Панкратов, Т.Е. Романова // Кибернетика и системный анализ. — 2012. — Т. 48, №3. — С. 12–17.

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, ул. Дм. Пожарского, 2/10, Харьков, Украина.

Поступила 09.01.2013