Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2013, №2(112) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.61, 517.928

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОГО ПОДХОДА В ЗАДАЧАХ МИНИМАКСНОГО УПРАВЛЕНИЯ

О. Г. Павлюченко

Резюме. В статье рассматривается задача построения оптимального управления в виде обратной связи от состояния линейной динамической системы, которое минимизирует интегрально-квадратичный функционал при наиболее неблагоприятных возмущениях, действующих на систему. Получено однопараметрическое семейство минимаксных регуляторов, при которых заданный критерий не превышает некоторого порогового значения. Оптимальное минимаксное управление находится путем поиска минимально допустимого порогового значения функционала с помощью численных итерационных методов.

Большинство реальных систем или объектов управления функционирует в условиях неопределенности, связанной с недостаточной информацией об объекте управления, неточностью его математической модели, исходных данных и т.д. Поэтому задачи управления объектами, функционирующими в условиях неопределенности, уделялось и продолжает уделяться большое внимание [1–5]. В данной работе рассматривается и предлагается решение задачи построения гарантированного управления линейной системой, находящейся под воздействием возмущений неизвестной природы, но принадлежащих заданной ограниченной области в виде заданного еллипсоида.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, которые описывают динамику состояния $(x(t))$ при управлении $(u(t))$ и внешних возмущениях $(f_0, f(t))$

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + K(t)f(t), & 0 < t \le T, \\ x(0) = Lf_0, \end{cases} \tag{1}$$

где $x(t) \in R^n$ — вектор состояния, $u(t) \in R^m$ — вектор управления, $f(t) \in R^r$ — неизвестный вектор внешних возмущений, действующих на систему, $f_0 \in R^l$ — также неизвестный вектор, возмущающий систему (1) в начальный момент времени, $A(t) \in R^{n\times n}$, $B(t) \in R^{n\times m}$, $K(t) \in R^{n\times r}$, $L \in R^{n\times l}$ — заданные матрицы.

Предполагается, что область допустимых возмущений задается в виде эллипсоида

$$S_f = \left\{ f : f = (f_0, f(\cdot))\,,\ (F_0 f_0, f_0) + \int_0^T (F(t)f(t), f(t))\,dt \le 1 \right\}, \tag{2}$$

где $F_0 = F_0^T > 0$, $F(t) = F^T(t) > 0$ — известные весовые матрицы.

Введем интегрально-квадратический критерий оптимальности

$$I(u,f) = (Hx(T), x(T)) + \int_0^T ((G(t)x(t), x(t)) + (D(t)u(t), u(t)))\, dt, \qquad (3)$$

где $H = H^T \geq 0$, $G(t) = G^T(t) \geq 0$, $D(t) = D^T(t) > 0$ — заданные матрицы и рассмотрим следующую задачу минимаксного управления.

Найти оптимальное управление u^*, удовлетворяющее условию

$$J(u^*) = \inf_{u \in U} \left\{ \sup_{f \in S_f} I(u,f) \right\}, \qquad (4)$$

где $I(u,f)$ — функционал вида (3).

Управление u^* будем называть минимаксным.

Отметим, что в этой постановке задачи в отличии, например, от работ [2, 3, 5], операция supremum вынесена из-под интеграла и берется от всего интегрально-квадратичного критерия.

Для решения этой задачи преобразуем сначала множество допустимых возмущений S_f.

Для этого напомним [6], что любая симметричная положительно определенная матрица F допускает факторизацию вида $F = \Phi\Lambda\Phi^T$, где Φ — ортогональная матрица ($\Phi^{-1} = \Phi^T$), состоящая из ортонормированных собственных вектор-столбцов матрицы F, $\Lambda = diag\,(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r)$ — диагональная матрица собственных значений $\lambda_i > 0$ матрицы F. Если обозначить $\Lambda^{1/2} = diag\left(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, ..., \sqrt{\lambda_r}\right)$, то матрицу F можно представить в виде $F = F^{1/2} \cdot F^{1/2}$, где $F^{1/2} = \Phi\Lambda^{1/2}\Phi^T$ ($F^{1/2} = \left(F^{1/2}\right)^T$).

Введем теперь множество $\Omega_{n,m}$ вида

$$\Omega_{n,m} = \left\{ \begin{pmatrix} a_0 \\ a(t) \end{pmatrix} : \ a_0 \in R^n,\ a(t) \in L_2^m(0,T); \right.$$
$$\left. a_0^T a_0 + \int_0^T a^T(t) a(t) dt < \infty \right\},$$

где

$$L_2^n(0,T) = \Big\{ a:\ a = a(t) = (a_1(t), a_2(t), ..., a_n(t))^T,$$
$$a_i(t) \in L_2(0,T),\ i = 1, 2, ..., n \}$$

и определим на нем скалярное произведение и норму

$$\langle a, b \rangle_{\Omega_{n,m}} = a_0^T b_0 + \int_0^T a^T(t) b(t) dt, \|a\|^2_{\Omega_{n,m}} =$$
$$= \langle a, a \rangle_{\Omega_{n,m}} = a_0^T a_0 + \int_0^T a^T(t) a(t) dt,$$

где $a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a(t) \end{pmatrix} \in \Omega_{n,m}$, $b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b(t) \end{pmatrix} \in \Omega_{n,m}$.

Если ввести обозначения

$$w_0 = F_0^{1/2} f_0, \quad w(t) = F^{1/2}(t) f(t), \qquad (5)$$

то левую часть неравенства, задающего ограничения (2), можно преобразовать так

$$\begin{gathered}(F_0 f_0,\ f_0) + \int_0^T (F(t)f(t), \quad f(t))\,dt = (w_0,\ w_0) + \\ + \int_0^T (w(t), w(t))\,dt = \langle w, \quad w\rangle_{\Omega_{l,r}} = \|w\|^2_{\Omega_{l,r}}\,,\end{gathered} \tag{6}$$

где $w = \begin{pmatrix} w_0 \\ w(t) \end{pmatrix} \in \Omega_{l,r}$.

Таким образом, множество S_f эквивалентно преобразовали к множеству S_w ($S_f \leftrightarrow S_w$) вида

$$S_w = \Big\{ w:\ w = (w_0, w(t))\,,\ \|w\|_{\Omega_{l,r}} \le 1 \Big\}. \tag{7}$$

Преобразуем теперь систему (1) и критерий (3). Если ввести обозначения

$$\begin{gathered}v(t) = D^{1/2}(t)u(t), \quad B_v(t) = B(t)D^{-1/2}(t), \\ K_w(t) = K(t)F^{-1/2}(t), \quad L_w = LF_0^{-1/2},\end{gathered} \tag{8}$$

то система (1) запишется так

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B_v(t)v(t) + K_w(t)w(t), & 0 < t \le T, \\ x(0) = L_w w_0, \end{cases} \tag{9}$$

а функционал (3) примет вид

$$\begin{gathered}I(u,f) = (Hx(T), x(T)) + \int_0^T ((G(t)x(t), x(t)) + \\ + (D(t)u(t), u(t)))\,dt = \Big(H^{1/2}x(T), H^{1/2}x(T)\Big) + \\ + \int_0^T \Big(\Big(G^{1/2}(t)x(t), G^{1/2}(t)x(t)\Big) + (v(t), v(t))\Big)\,dt = I(v,w).\end{gathered} \tag{10}$$

Очевидно, что функционал $I(v,w)$ можно представить в виде

$$I(v,w) = \langle z, z\rangle_{\Omega_{n,n+m}} = \|z\|^2_{\Omega_{n,n+m}}\,, \tag{11}$$

где $z = \begin{pmatrix} H^{1/2}x(T) \\ G^{1/2}(t)x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ — вектор контролируемых переменных (параметров).

Поскольку система (9) линейна, то существует линейный передаточный оператор R_v, который зависит от выбранной стратегии управления v, отображающий вектор входных воздействий w в вектор контролируемых переменных z, т.е.

$$z = R_v(w), \quad w \in \Omega_{l,r}, \quad z \in \Omega_{n,n+m}. \tag{12}$$

Таким образом, функционал (11) может быть записан в виде

$$I(u,f) = I(v,w) = \|z\|^2_{\Omega_{n,n+m}} = \|R_v(w)\|^2_{\Omega_{n,n+m}} \tag{13}$$

и тогда, учитывая известные свойства норм линейных ограниченных операторов [7], получаем

$$\sup_{f\in S_f} I(u,f) = \sup_{w\in S_w} \|R_v(w)\|^2_{\Omega_{n,n+m}} = \sup_{\|w\|^2_{\Omega_{l,r}}\le 1} \|R_v(w)\|^2_{\Omega_{n,n+m}} = \\ = \sup_{w\in\Omega_{l,r}, w\neq 0} \frac{\|R_v(w)\|^2_{\Omega_{n,n+m}}}{\|w\|^2_{\Omega_{l,r}}} = \|R_v\|^2_{\Omega}\,, \tag{14}$$

где $\|R_v\|_\Omega$ — норма передаточного оператора R_v, порожденная нормами пространств $\Omega_{n,m}$.

В итоге исходная оптимизационная задача (4) сводится к эквивалентной оптимизационной задаче вида

$$J(v) = \sup_{w\in S_w} I(v,w) = \|R_v\|^2 \to \inf_{v\in V}. \tag{15}$$

Для ее решения найдем сначала субоптимальное управление v, удовлетворяющее условию

$$\|R_v\|^2 \le \gamma^2, \tag{16}$$

где γ — некоторое заданное пороговое значение.

Учитывая, что

$$\sup_{w\in\Omega_{l,r}, w\neq 0} \frac{\|R_v(w)\|^2_{\Omega_{n,n+m}}}{\|w\|^2_{\Omega_{l,r}}} = \|R_v\|^2 \le \gamma^2,$$

приходим к эквивалентному неравенству

$$\frac{\|R_v(w)\|^2_{\Omega_{n,n+m}}}{\|w\|^2_{\Omega_{l,r}}} \le \gamma^2$$

или $\|R_v(w)\|^2_{\Omega_{n,n+m}} - \gamma^2 \|w\|^2_{\Omega_{l,r}} \le 0$ для всех $w\in\Omega_{l,r}$.

Введем обозначение

$$J_\gamma(v,w) = \|R_v(w)\|^2_{\Omega_{n,n+m}} - \gamma^2 \|w\|^2_{\Omega_{l,r}}\,. \tag{17}$$

Поскольку неравенство $J_\gamma(v,w)\le 0$ должно выполняться для всех $w\in\Omega_{l,r}$, то должно быть справедливым и неравенство

$$\sup_{w\in\Omega_{l,r}} J_\gamma(v,w) \le 0. \tag{18}$$

Таким образом, если управление v удовлетворяет неравенству (16), то оно удовлетворяет и неравенству (18) и наоборот. Учитывая вид функционала $J_\gamma(v,w)$, управление v будем находить из условия

$$\inf_{v\in L_2^m(0,T)} \sup_{w\in\Omega_{l,r}} J_\gamma(v,w) \le 0. \tag{19}$$

Управление v, которое является решением последней оптимизационной задачи будем называть субоптимальным управлением, параметризованым по параметру γ. Учитывая эквивалентность неравенств (16) и (18), приходим к выводу, что субоптимальное управление последней оптимизационной задачи будет также обеспечивать выполнение неравенства (16).

Для решения задачи (19) используем теорию динамических (диференциальных) игр двоих лиц с нулевой суммой и с ценой игры, определяемой функционалом

$$J_\gamma(v,w) = \|R_v(w)\|^2_{\Omega_{n,n+m}} - \gamma^2 \|w\|^2_{\Omega_{l,r}} = \|z\|^2_{\Omega_{n,n+m}} - \gamma^2 \|w\|^2_{\Omega_{l,r}}. \tag{20}$$

В качестве 1-го игрока (v-игрок) выступает конструктор, который с помощью соответствующего выбора стратегии управления v пытается минимизировать свой проигрыш. Конструктор использует функционал $J_\gamma(v,w)$ как меру "стоимости", связанной с выбором стратегии управления. Целью этого игрока является построение регулятора v в форме (8), который минимизирует критерий $J_\gamma(v,w)$ при наиболее неблагоприятных входных воздействиях w. Это ведет к гарантированному качеству выполнения верхнего значения динамической игры

$$r(\gamma) = \inf_{v\in L_2^m(0,T)} \sup_{w\in\Omega_{l,r}} J_\gamma(v,w). \tag{21}$$

Далее, если обозначить $r(\gamma^*) = \inf\limits_{\gamma>0} r(\gamma)$ или $\gamma^* = \arg\inf\limits_{\gamma>0} r(\gamma)$, то аналогично [8] можно доказать, что $(\gamma^*)^2 = \inf\limits_{v\in V} \|R_v\|^2$ или $\gamma^* = \inf\limits_{v\in V} \|R_v\|$, где $(\gamma^*)^2$ — минимальное значение критерия (20) при наиболее неблагоприятных возмущениях $w \in \Omega_{l,r}$.

Учитывая (12), преобразуем функционал $J_\gamma(v,w)$

$$\begin{aligned} J_\gamma(v,w) &= \|R_v(w)\|^2_{\Omega_{n,n+m}} - \gamma^2 \|w\|^2_{\Omega_{l,r}} = \|z\|^2_{\Omega_{n,n+m}} - \gamma^2 \|w\|^2_{\Omega_{l,r}} = \\ &= (Hx(T),x(T)) + \int_0^T ((G(t)x(t),x(t)) + (v(t),v(t)))\,dt - \\ &\quad -\gamma^2\left((w_0,w_0) + \int_0^T (w(t),w(t))\,dt\right). \end{aligned} \tag{22}$$

Перед решением задачи $\inf\limits_{v\in L_2^m(0,T)} \sup\limits_{w\in\Omega_{l,r}} J_\gamma(v,w)$ заметим, что

$$\inf_{v\in L_2^m(0,T)} \sup_{w\in\Omega_{l,r}} J_\gamma(v,w) = \sup_{w_0\in R^l} \left\{ \inf_{v\in L_2^m(0,T)} \sup_{w\in L_2^r(0,T)} J_\gamma(v,w) \right\} \tag{23}$$

и для решения минимаксной задачи $\inf\limits_{v\in L_2^m(0,T)} \sup\limits_{w\in L_2^r(0,T)} J_\gamma(v,w)$ используем минимаксный принцип Понтрягина, в соответствии с которым построим функцию Гамильтона вида

$$\begin{aligned} H(x,v,w,\lambda) &= (G(t)x(t),x(t)) + (v(t),v(t)) - \gamma^2 (w(t),w(t)) + \\ &\quad + \lambda^T(t)\left(A(t)x(t) + B_v(t)v(t) + K_w(t)w(t)\right), \end{aligned}$$

где x и λ удовлетворяют следующей системе сопряженных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \nabla_\lambda H(x,v,w,\lambda) = A(t)x(t) + B_v(t)v(t) + K_w(t)w(t), \\ \frac{d\lambda(t)}{dt} = -\nabla_x H(x,v,w,\lambda) = -A^T(t)\lambda(t) - 2G(t)x(t) \end{cases}$$

с краевыми условиями

$$x(0) = L_w w_0, \ \ \lambda(T) = \nabla_{x(T)}\left[(Hx(T),\, x(T))\right] = 2Hx(T).$$

Оптимальное значение v (w) будем находить из условия минимизации (максимизации) функции $H(x, v, w, \lambda)$ по v (w), т.е из условий

$$\nabla_v H(x, v, w, \lambda) = 2v(t) + B_v^T(t)\lambda(t) = 0,$$
$$\nabla_w H(x, v, w, \lambda) = -2\gamma^2 w(t) + K_w^T(t)\lambda(t) = 0,$$

откуда

$$v(t) = -\frac{1}{2}B_v^T(t)\lambda(t), \quad w(t) = \frac{1}{2\gamma^2}K_w^T(t)\lambda(t). \tag{24}$$

Учитывая (24), сопряженную систему преобразуем так

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) - \frac{1}{2}B_v(t)B_v^T(t)\lambda(t) + \frac{1}{2\gamma^2}K_w(t)K_w^T(t)\lambda(t), \\ \frac{d\lambda(t)}{dt} = -A^T(t)\lambda(t) - 2G(t)x(t), \end{cases} \tag{25}$$

$$x(0) = L_w w_0, \quad \lambda(T) = 2Hx(T). \tag{26}$$

Несложно показать, что сопряженную функцию $\lambda(t)$ этой двухточечной краевой задачи можно представить в виде

$$\lambda(t) = 2P(t)x(t), \tag{27}$$

где $P(t)$ — симметричная положительно определенная матрица, удовлетворяющая матричному дифференциальному уравнению типа Риккати

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} = -A^T(t)P(t) - P(t)A(t) + P(t)\Big(B_v(t)B_v^T(t) - \frac{1}{\gamma^2}K_w(t)K_w^T(t)\Big)\times \\ \times P(t) - G(t), \\ P(T) = H. \end{cases} \tag{28}$$

Учитывая соотношения (24) и (27), окончательно получим оптимальные значения $v^*(t)$ и $w^*(t)$ соответственно для функций $v(t)$ и $w(t)$

$$v^*(t) = -B_v^T(t)P(t)x(t), \quad w^*(t) = \frac{1}{\gamma^2}K_w^T(t)P(t)x(t). \tag{29}$$

Несложно показать, что значение функционала $J_\gamma(v^*, w^*)$ при этом равно $J_\gamma(v^*, w^*) = w_0^T\left(L_w^T P(0)L_w - \gamma^2 E\right)w_0$, где E — единичная матрица.

Таким образом, учитывая соотношение (23), получаем

$$\begin{aligned} \inf_{v\in L_2^m(0,T)}\ \sup_{w\in\Omega_{l,r}} J_\gamma(v, w) = \sup_{w_0\in R^l}\left\{\inf_{v\in L_2^m(0,T)}\ \sup_{w\in L_2^r(0,T)} J_\gamma(v, w)\right\} = \\ \sup_{w_0\in R^l}\{J_\gamma(v^*, w^*)\} = \ = \sup_{w_0\in R^l}\left\{w_0^T\left(L_w^T P(0)L_w - \gamma^2 E\right)w_0\right\}. \end{aligned} \tag{30}$$

Поскольку искомое управление должно удовлетворять условию

$$\inf_{v\in L_2^m(0,T)}\ \sup_{w\in\Omega_{l,r}} J_\gamma(v, w) \le 0, \tag{31}$$

то из (30) имеем $\sup\limits_{w_0 \in R^l} \left\{ w_0^T \left(L_w^T P(0) L_w - \gamma^2 E \right) w_0 \right\} \leq 0$. Это неравенство справедливо только при выполнении условия

$$L_w^T P(0) L_w - \gamma^2 E \leq 0, \tag{32}$$

т.е. матрица $L_w^T P(0) L_w - \gamma^2 E$ должна быть неположительно определенной. В противном случае, как несложно показать

$$\sup_{w_0 \in R^l} \left\{ w_0^T \left(L_w^T P(0) L_w - \gamma^2 E \right) w_0 \right\} = \infty,$$

что противоречит условию (18). Отметим также, что при выполнении условия (32) $\sup\limits_{w_0 \in R^l} \left\{ w_0^T \left(L_w^T P(0) L_w - \gamma^2 E \right) w_0 \right\} = 0$ и достигается при $w_0^* = 0$.

Замечание 1. Используя результаты работы [8], можно показать, что найденные функции $v^*(t)$, $w^*(t)$ являются седловой точкой функционала стоимости $J_\gamma(v, w)$, т.е.

$$\inf_{v \in L_2^m(0,T)} \sup_{w \in L_2^r(0,T)} J_\gamma(v, w) = \sup_{w \in L_2^r(0,T)} \inf_{v \in L_2^m(0,T)} J_\gamma(v, w) = J_\gamma(v^*, w^*).$$

Замечание 2. Минимаксный принцип Понтрягина дает необходимое условие экстремума решения задачи минимаксного управления. Однако можно показать, что найденная седловая точка $(v^*, w^*) = (v^*(t), w^*(t), w_0^*)$ динамической игры с функционалом стоимости $J_\gamma(v, w)$ удовлетворяет и достаточному условию минимакса.

Учитывая, что $w_0 = F_0^{1/2} f_0$, $w(t) = F^{1/2}(t) f(t)$, $v(t) = D^{1/2}(t) u(t)$, $B_v(t) = B(t) D^{-1/2}(t)$, $K_w(t) = K(t) F^{-1/2}(t)$, $L_w = L F_0^{-1/2}$, окончательно можно сформулировать полученный результат в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Оптимальное минимаксное управление системой (1) с неопределенными возмущениями из области (2) и удовлетворяющее условию (4), определяется по формуле*

$$u^*(t) = -D^{-1}(t) B^T(t) P(t) x(t),$$

где $P(t)$ — симметричная положительно определенная матрица, удовлетворяющая матричному дифференциальному уравнению типа Риккати

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} = -A^T(t) P(t) - P(t) A(t) + P(t) \times \\ \times \Big(B(t) D^{-1}(t) B^T(t) - \frac{1}{(\gamma^*)^2} K(t) F^{-1}(t) K^T(t) \Big) P(t) - G(t), \\ P(T) = H. \end{cases} \tag{33}$$

При этом минимальное значение критерия (4) на оптимальном минимаксном управлении

$$J(u^*) = \inf_{u \in U} \left\{ \sup_{f \in S_f} I(u, f) \right\} = (\gamma^*)^2,$$

где γ^* — минимальное положительное число, при котором уравнение имеет ограниченное решение и выполняется условие $\lambda_{\max}(L^T P(0) L - \gamma^2 F_0) \leq 0$ ($\lambda_{\max}(\cdot)$ — максимальное собственное значение матрицы).

Замечание 3. Наиболее неблагоприятные возмущения, принадлежащие области допустимых возмущений (2) и действующие на систему (1) определяются соотношениями $f^*(t) = (\gamma^*)^{-2}F^{-1}(t)K^T(t)P(t)x(t)$, $f_0^* = 0$.

Если система (1) стационарна и рассматривается на бесконечном временном интервале

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) + Kf(t), \qquad 0 < t < \infty, \\ x(0) = Lf_0 \end{cases} \tag{34}$$

с ограничениями на возмущения

$$f \in S_f = \left\{ f : f = (f_0, f(\cdot))\,,\ (F_0 f_0, f_0) + \int_0^\infty (Ff(t), f(t))\, dt \leq 1 \right\} \tag{35}$$

и с критерием

$$I(u, f) = \int_0^\infty ((Gx(t), x(t)) + (Du(t), u(t)))\, dt, \tag{36}$$

то аналогично можно доказать справедливость следующей теоремы.

Теорема 2. *Решение задачи оптимального минимаксного управления для системы (34) с областью допустимых возмущений (35) и с критерием качества (36) имеет вид* $u^*(t) = -D^{-1}B^T Px(t)$, *где* $P = P^T$ *— решение матричного алгебраического уравнения*

$$-A^T P - PA + P\left(BD^{-1}B^T - \frac{1}{(\gamma^*)^2}KF^{-1}K^T\right)P - G = 0, \tag{37}$$

в котором γ^* *удовлетворяет условию* $\gamma^* = \inf\limits_{\gamma}\{\gamma :\ \lambda_{\max}(L^T PL - \gamma^2 F_0) \leq$ ≤ 0 *и уравнение (37) имеет ограниченное решение* $\}$.

При этом минимаксное значение критерия (36) равно

$$\inf_{u\in U}\left\{\sup_{f\in S_f} I(u, f)\right\} = I(u^*, f^*) = (\gamma^*)^2,$$

а наиболее неблагоприятные возмущения определяются соотношениями $f^*(t) = \gamma^{-2}F^{-1}K^T Px(t), \quad f_0^* = 0.$

Замечание 4. Величину γ^*, определяющую оптимальное минимаксное управление, можно найти с помощью численных итерационных методов, например, методом бисекции.

Выводы.

В работе дается решение задачи минимаксного управления для линейных динамических систем, функционирующих в условиях неопределенности с адитивными возмущениями, принадлежащими заданной области в виде еллипсоида. Решение представлено в виде регулятора от состояния системы, матрица усиления обратной связи которого зависит от матрицы, являющейся решением параметризованного матричного уравнения типа Риккати. Минимально допустимое значение скалярного параметра, определяющее оптимальное минимаксное управление, может быть найдено итерационными численными методами.

Литература

1. Наконечный А. Г. К теории минимаксного управления системами с распределенными параметрами / А. Г. Наконечный // В кн. : Оптимальное управление в механических системах. Тезисы III Всесоюзной конференции (Киев, 1979 г.) — Киев, 1979. — Т. II. — С. 95.
2. Наконечный А. Г. О построении минимаксных регуляторов для линейных стохастических систем / А. Г. Наконечный // Кибернетика — 1979. — № 5. — С. 143–145.
3. Кириченко Н. Ф. Аналитическое конструирование минимаксных регуляторов в линейных системах /Н. Ф. Кириченко // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1977. — № 7. — С. 591–594.
4. Кириченко Н. Ф. Введение в теорию стабилизации движения / Н. Ф. Кириченко. — Киев: Вища школа, 1978. — 182 с.
5. Кириченко Н. Ф. Минимаксное управление и оценивание в динамических системах / Н. Ф. Кириченко // Автоматика — 1982. — № 1. — С. 32–39.
6. Беллман Р. Введение в теорию матриц /Р. Беллман. — М.: Наука, 1969. — 368 с.
7. Треногин В. А. Функциональный анализ. Учебник / В. А. Треногин. — М. : Физматлит, 2002. — 488 с.
8. Filar J. A. Advances in Dynamic Games and Applications / J. A. Filar. — Boston: Birkhäuser, 2000. — 461 p.

Факультет кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, ул. Владимирская, 64, Киев, 01601, Украина.

Поступила 12.06.2013