Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2013, №2(112) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.85

РАЗМЕЩЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОГО ЧИСЛА РАВНЫХ КРУГОВ В КРУГЕ

Г. Н. Яськов

Резюме. В статье рассматривается задача размещения максимального числа равных кругов заданного радиуса в круге заданного радиуса. Построена математическая модель задачи и исследованы ее свойства. Решение задачи сводится к решению последовательности подзадач с переменными радиусами. Предложен новый подход к построению начальных точек. Полученные результаты сравниваются с известными тестовыми примерами.

Введение

Задача размещения кругов возникает в различных отраслях промышленности [1].

К. Ф. Гаусс доказал, что среди всех регулярных (решетчатых) упаковок кругов максимальную плотность имеет гексагональная решетка, когда каждый круг касается шести других кругов. Плотность такого размещения $\pi/\sqrt{12} \approx 0.91$.

В 1940 году венгерский математик L. F. Toth [2] доказал, что гексагональная решетка является самой плотной среди всех возможных упаковок, как негулярных, так и нерегулярных.

Результаты решения тестовых примеров приведены на сайте в таблицах E. Specht: http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/packing/cci/cci.html. Задача нахождения максимального диаметра вплоть до 36 равных кругов внутри единичного квадрата представлена в [3]. В работах [4, 5] используются нелинейные задачи математического программирования. В работах [6, 7] предлагаются эвристические жадные алгоритмы для построения нерегулярных упаковок максимального числа равных кругов. Эти алгоритмы позволяют быстро получить приемлемые по качеству решения. В [8] задача раскроя кругов и многоугольников из прямоугольников минимальной площади рассматривается как задача нелинейного невыпуклого программирования. В исследовании [9] упаковка равных кругов в квадрате рассматриваются в качестве модельного примера.

В этой статье предлагается метод упаковки большого числа равных кругов на основе математической модели, в которой радиусы всех кругов являются переменными.

1. Математическая модель

Пусть имеются круги C_i, $i \in I_N = \{1, 2, ..., N\}$, радиуса $r_i = r$ и круг C радиуса $\rho > r$: $C = \left\{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 - \rho^2 = 0\right\}$. Размещение круга C_i в пространстве R^2 полностью определяется координатами его центра $u_i = (x_i, y_i)$, $i \in I_N$. Следовательно, размещение всех заданных кругов C_i, $i{\in}I_N$, в пространстве R^n определяется вектором $u^N{=}(u_1, u_2, ..., u_N){\in}R^{2N}$.

Задача. Определить максимальное число кругов $\lambda^* \le N$ из набора C_i, $i \in I_N$, которые размещаются в круге C без взаимных наложений.

Мы полагаем, что радиусы кругов C_i, $i \in I_N$, являются переменными. Тогда решение задачи сводится к решению последовательности задач с линейными функциями цели:

$$F_\lambda(X^{\lambda *}) = \max_{X^\lambda \in M_\lambda} F_\lambda(X^\lambda), \lambda \in I_\gamma = \{1, 2, ..., \gamma \le N\} \subseteq I_N, \tag{1}$$

где

$$F_\lambda(X^\lambda) = \sum_{i=1}^{\lambda} r_i, X^\lambda = (v^\lambda, u^\lambda), v^\lambda = (r_1, ..., r_\lambda), u^\lambda = (u_1, ..., u_\lambda), \tag{2}$$

$$M_\lambda = \Big\{X^\lambda \in R^{3\lambda} : \Phi_{ij}(r_i, r_j, u_i, u_j) \ge 0,\ i, j \in I_\lambda = \{1, 2, ...\lambda\}, i < j, \tag{3}$$

$$\Phi_i(r_i, u_i) \ge 0, i \in I_\lambda, r - r_i \ge 0, r_i \ge 0, i \in I_\lambda\Big\},$$

$$\Phi_{ij}(r_i, r_j, u_i, u_j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - (r_i + r_j)^2, \tag{4}$$

$$\Phi_i(r_i, u_i) = (\rho - r_i)^2 - (x_i^2 + y_i^2). \tag{5}$$

Неравенства $\Phi_{ij}(r_i, r_j, u_i, u_j) \ge 0$ обеспечивают непересечение кругов, а неравенства $\Phi_i(r_i, u_i) \ge 0$ — их размещение в круге C.

Нетрудно увидеть, что если $F_{\lambda+1}(X^{(\lambda+1)*}) < (\lambda + 1)r$ и $F_\lambda(X^{\lambda *}) = \lambda^* r$, где $X^{(\lambda+1)*}$ и $X^{\lambda *}$ — точки глобальних максимумов следующих задач:

$$F_\lambda(X^{\lambda *}) = \max_{X^\lambda \in M_\lambda} F_\lambda(X^\lambda), \tag{6}$$

$$F_{\lambda+1}(X^{(\lambda+1)*}) = \max_{X^{\lambda+1} \in M_{\lambda+1}} F_{\lambda+1}(X^{\lambda+1}), \tag{7}$$

$$M_{\lambda+1} = \Big\{X^{\lambda+1} \in R^{(n+1)(\lambda+1)} : \Phi_{ij}(r_i, r_j, u_i, u_j) \ge 0,$$

$$i, j \in I_{\lambda+1} = \{1, 2, ..., \lambda + 1\}, i < j, \Phi_i(r_i, u_i) \ge 0,$$

$$i \in I_{\lambda+1}, r - r_i \ge 0, r_i \ge 0, i \in I_{\lambda+1}\Big\}$$

соответственно, то решение задачи λ из последовательности (1)–(5) определяет размещение λ^* кругов. Действительно, вследствие ограничений

$r - r_i \geq 0$, $i = 1, 2, ..., \lambda^*$, имеем $F_\lambda(X^\lambda) \leq \lambda^* r$. Очевидно, что если $F_\lambda(X^{\lambda*}) = \lambda^* r$, то $r_i = r$, $i = 1, 2, ..., \lambda^*$.

Отметим некоторые свойства задачи (6).

1. Область допустимых решений M_λ определяется линейными и квадратичными неравенствами.

2. Вследствие линейности функции цели $F_\lambda(X^\lambda)$ локальные максимумы задачи (6) достигаются в крайних точках области M_λ.

3. Задача (6) является NP-трудной [10].

Исходя из отмеченных особенностей, для решения задачи предлагается следующий подход.

1. Выбираем начальное значение $\lambda < N$.
2. Строим начальные точки либо случайным образом, либо используя гексагональную решетку. Способ построения начальных точек зависит от числа кругов.
3. Вычисляем локальный максимум задачи (6) в каждой начальной точке.
4. Если $F_\lambda(X^{\lambda*}) = \lambda r$, то достигнут глобальный максимум задачи (6). Если $\lambda = N$, то поставленная задача решена. В противном случае, увеличиваем λ на 1 и решаем задачу (7). Начальные точки формируются специальным образом.
5. Если $F_\lambda(X^{\lambda*}) < \lambda r$, то решаем задачу (6) для новых начальных точек до тех пор, пока все начальные точки не будут исчерпаны.
6. Если $F_\lambda(X^{\lambda*}) < \lambda r$ и все начальные точки исчерпаны, то уменьшаем λ на 1 и снова решаем задачу (6).
7. Если $F_{\lambda+1}(X^{(\lambda+1)*}) < (\lambda + 1)r$ и $\lambda r = F_\lambda(X^{\lambda*})$, то в качестве приближения к глобальному максимуму поставленной задачи берем локальный максимум $X^{\lambda*}$, соответствующий значению $\lambda r = F_\lambda(X^{\lambda*})$.

Рассмотрим этапы подробнее.

2. Построение начальных точек

Вычислительный эксперименты показали, что если $\frac{\rho}{r} < 10$, то начальные точки целесообразно выбирать случайно. Для удобства выберем полярную систему координат.

Выбор начальных точек $\tilde{X}^j = (\tilde{r}_1^j, \tilde{r}_2^j, ..., \tilde{r}_\lambda^j, \tilde{u}_1^j, \tilde{u}_2^j, ..., \tilde{u}_\lambda^j) \in M_\lambda$, $j \in J_\xi = \{1, 2, ..., \xi \leq 100\}$, осуществляется в соответствии со следующим алгоритмом.

1. Выберем начальные значения радиусов кругов $r_1 = r_2 = ... = r_\lambda = r$.
2. Выберем случайно значения $\mu_1 \in [0, \rho - r]$ и $\varphi_1 \in [-\pi, \pi]$ и координаты центра круга C_1:

$$x_i = \mu_i \cdot \cos\varphi_1, \; y_i = \mu_i \cdot \sin\varphi_1. \tag{8}$$

3. Зададим $t = 0$, $r_2 = 0.9^t r$.
4. Выберем случайно значения $\mu_2 \in [0, \rho - r]$ и $\varphi_2 \in [-\pi, \pi]$ и вычислим координаты центра круга C_2 в соответствии с (8).

5. Если $\Phi_{12}(r, r_2, u_1, u_2) \geq 0$, перейдем к пункту 6. В противном случае, увеличим t на 1, возьмем $r_2 = 0.9^t r$ и возвратимся к пункту 4.
6. Пусть $i = 3$.
7. Зададим $t = 0$, $r_i = 0.9^t r$.
8. Обнулим счетчик попыток $c = 0$.
9. Выберем случайно значения $\mu_i \in [0, \rho - r]$ и $\varphi_i \in [-\pi, \pi]$ и вычислим координаты центра круга C_i в соответствии с (8).
10. Если $\Phi_{li}(r_l, r_i, u_l, u_i) \geq 0$ для всех $l = 1, 2, ..., i - 1$, то перейдем к пункту 13.
11. Увеличим c на 1.
12. Если $c = 10000$, то увеличим t на 1, выберем $r_i = 0.9^t r$ и возвратимся к пункту (8). В противном случае, возвратимся к пункту 9.
13. Если $i = \lambda$, то все круги упакованы (критерий останова). В противном случае, увеличим i на 1 и возвращаемся к пункту 7.

Если $\frac{\rho}{r} \geq 10$, то начальные точки выбираются в соответствии с гексагональной решетчатой упаковкой кругов.

Формируется множество векторов $(x_s^0, y_k^0) \in R^2$, $x_s^0 = \frac{sr}{\eta}$, $y_k^0 = \frac{kr}{\eta}$, $s, k \in J = \{0, 1, ..., \eta\}$. Мы берем $\eta \leq 100$. Для удобства переиндексируем векторы (x_s^0, y_k^0), $s, k \in J$, следующим образом (x_p^0, y_p^0), $p \in P = \{0, 1, ..., \alpha\}$, где $\alpha \leq (\eta + 1)^2 - 1 = 10200$. Векторы (x_p^0, y_p^0), $p \in P$, дают трансляции гексагональных решеток.

Центры координат кругов $C_i \subset C$, $i \in I_\lambda$, радиуса r, являющиеся узлами гексагональной решетки L_r^p, вычисляются по формулам:

$$(\tilde{x}_{1l}^p, \tilde{x}_{2m}^p) = (\pm(l-1)r + x_p^0, \pm\sqrt{3}(m-1)r + y_p^0),$$

если ряд нечетный;

$$(\tilde{x}_{1l}^p, \tilde{x}_{2m}^p) = (\pm(l-1)r + r + x_p^0, \pm\sqrt{3}(m-1)r + y_p^0),$$

если ряд четный;

$$l, m = 1, 2, \ldots, (\tilde{x}_{1l}^p)^2 + (\tilde{x}_{2m}^p)^2 \leq (\rho - r)^2, p \in P$$

.

Согласно этим формулам осуществляется размещение кругов $C_1, C_2, ..., C_{\lambda-\gamma}$, $\gamma \in \{1, 2, ...10\}$, радиуса r в круг C. Координаты и радиусы оставшихся γ кругов $C_{\lambda-\gamma+1}$, $C_{\lambda-\gamma+2}$,...,C_λ определяются в результате решения следующих систем уравнений:

$$\begin{cases} (x_l^0 - x_{\lambda-\gamma+q})^2 + (y_l^0 - y_{\lambda-\gamma+q})^2 - (r + r_{\lambda-\gamma+q})^2 = 0 \\ (x_k^0 - x_{\lambda-\gamma+q})^2 + (y_k^0 - y_{\lambda-\gamma+q})^2 - (r + r_{\lambda-\gamma+q})^2 = 0 \\ x_{\lambda-\gamma+q}^2 + y_{\lambda-\gamma+q}^2 - (R - r_{\lambda-\gamma+q})^2 = 0, \ l > k = 1, ..., \lambda - \gamma, \ q = 1, ..., \gamma. \end{cases}$$

При этом значения $r_{\lambda-\gamma+1}, r_{\lambda-\gamma+2}, ..., r_\lambda$ выбираются в порядке убывания значений, полученных для различных сочетаний l и k в системах уравнений и обеспечивающих выполнение неравенств $\Phi_{i,(\lambda-\gamma+q)}(r_i^0, r_{\lambda-\gamma+q}, u_i^0, u_{\lambda-\gamma+q}) \geq 0$, $q = 1, 2, ..., \gamma$, $i = 1, 2, ..., \lambda-\gamma+q-1$. Построенные таким образом точки

$$X^{p_j} = (r, r, ..., r, r_{\lambda-\gamma+1}^{p_j}, r_{\lambda-\gamma+2}^{p_j}, ..., r_\lambda^{p_j}, u_1^{p_j}, u_2^{p_j}, ..., u_\lambda^{p_j}) \in M_\lambda, j \in J_\xi,$$

выбираются для построения начальных точек для задачи (6).

3. Метод решения

Для решения задачи (6) используются модификация метода возможных направлений Зонтендейка [11,12] и концепция ε-активных неравенств [13].

Данная модификация реализуется с помощью классической итерационной формулы

$$X^{q+1} = X^q + t^q Z^q, q = 0, 1, ...$$

где X^0 — начальная точка $X^{p_j} (j \in J_\xi)$; вектор Z^q — вектор спуска.

Процесс локальной оптимизации завершается, если для некоторого q выполняются неравенства $r - r_i^q < 10^{-5}$, $i \in I_\lambda$, или $F_\lambda(X^q) - F_\lambda(X^{q-1}) < < 10^{-4}$.

Таким образом, взяв в качестве начальной точку $X^{p_j} (j \in J_\xi)$, вычисляем локальный максимум X^{λ^*} задачи (6).

Очевидно, что если $F_\lambda(X^{\lambda *}) = \lambda r$, то получен глобальный максимум задачи (6). Если $F_\lambda(X^{\lambda *}) < \lambda r$, то точка $X^{\lambda *}$ может быть либо локальным, либо глобальным максимумом задачи (6). В этом случае задача (6) решается для новой начальной точки, пока не будут перебраны все начальные точки.

Если $F_\lambda(X^{\lambda *}) < \lambda r$ для всех начальных точек, то λ уменьшается на 1 и снова решается задача (6). Если $F_\lambda(X^{\lambda *}) = \lambda r$, то λ увеличивается на 1 и снова решается задача (7). Таким образом, задача (6) решается до тех пор, пока не выполнится условие $\lambda r = F_\lambda(X^{\lambda *}) < (\lambda + 1)r$.

Глобальный максимум $X^{\lambda *}$ задачи (6), соответствующий $\lambda r = F_\lambda(X^{\lambda *})$ максимальному полученному значению λ, выбирается в качестве приближения к глобальному максимуму поставленной задачи.

При увеличении λ на 1 начальная точка выбирается с учетом точки локального максимума $X^{\lambda *}$, полученной при решении предыдущей задачи. Для этого выбираем случайно $\mu_{\lambda+1} \in [0, \rho - r]$ и $\varphi_{\lambda+1} \in [-\pi, \pi]$. Затем вычисляем координаты центра круга $u_{\lambda+1}^0$ согласно (8) и радиус $r_{\lambda+1}^0$ круга $C_{\lambda+1}$, гарантирующие $\Phi_{i,(\lambda+1)}(r_i^*, r_{\lambda+1}^0, u_i^*, u_{\lambda+1}^0) \geq 0$, $i \in I_\lambda$. В результате получаем начальную точку $X^{\lambda+1}$=$(\mathrm{v}_\lambda^*, r_{\lambda+1}^0, u_\lambda^*, u_{\lambda+1}^0)$.

4. Численные примеры

Все примеры посчитаны, используя процессор AMD Athlon 64 X2 6000+ (3.1Ghz). Программные коды написаны на Delphi. Для решения задач линейного программирования используется двойственный метод высокого порядка (HOPDM, version 2.13) разработанный Gondzio [14].

Во всех пример выбирается $r = 1$.

Полученные результаты сравниваются с тестовыми примерами, приведенными в [6,7] и таблицах E. Specht.

В таблице 1 содержатся результаты счета и сравнение для различных значений радиуса круга C (от $\rho = 25$ до $\rho = 70$). В первом столбце приводятся значения радиуса ρ. Максимальное число кругов λ^*, упакованных с помощью предлагаемого подхода, приведены во втором столбце. А наилучшие известные значения λ^*_{best} [6,7] — в третьем столбце.

В таблице 2 содержатся решения следующей задачи: найти минимальный радиус круга C, если дано число кругов N, которые необходимо упаковать. Эти решения сравниваются с решениями, полученными в таблицах E. Specht.

В первом столбце таблицы 2 приведено число кругов N. В следующем столбце — радиус круга ρ, который получается с помощью модификации предложенного подхода. Наилучшие известные значения ρ_{best} (E. Specht) приведены в третьем столбце. Прочерки в третьем столбце означают, что соответствующие задачи не представлены в таблицах E. Specht.

Таблица 1. Результаты упаковки максимального количества кругов

ρ	λ^*	λ^*_{best}
25	535	527
26	581	569
27	624	615
28	672	661
29	725	714
30	777	763
31	832	821
32	885	877
33	943	931
34	1002	990
35	1064	1053
36	1127	1113
37	1188	1176
38	1260	1247
39	1324	1314
40	1394	1381
45	1771	1761
50	2194	2176
55	2664	2651
60	3172	3161
65	3715	3703
70	4338	4321

Таблица 2. Результаты размещения кругов в круге минимального радиуса

N	ρ	ρ_{best}
1077	35.200	35.204
1078	35.210	35.215
1079	35.220	35.227
1080	35.240	35.241
1090	35.400	35.404
1091	35.409	35.410
1092	35.420	35.421
1093	35.455	35.460
1094	35.475	35.478
1095	35.510	35.512
1096	35.525	35.527
1099	35.580	35.582
1100	35.600	35.616
1200	37.120	37.126
1400	40.100	40.071
1500	41.430	41.430
2000	47.780	-
3000	58.290	-
4000	67.210	-
5000	75.105	-

5. Выводы

Предложенная математическая модель, в которой радиусы всех кругов являются переменными одновременно, и новый подход к построению начальных точек позволяют значительно улучшить качество получаемых решений. Разработанные методы можно использовать также и для упаковки кругов различных радиусов. Рассмотренный подход дает возможность использовать многопроцессорные компьютеры. Использование метода решения задач линейного программирования и пакета программ HOPDM [14] позволяет решать задачи большой размерности. Результаты исследования могут быть использованы при изучении структуры белка и клетки в биологии, гранулированных сред, жидкостей в химии и физике, рациональном размещении кабелей.

Литература

1. 1. Conway J. H. Sphere Packings, Lattices, and Groups / Conway J. H., Sloane N. J. A. — New York: Springer-Verlag, 2010. — 703 p.
2. Toth L. F. Uber einem geometrischen Satz / L. F. Toth // Mathematische Zeitschrift. — 1940. — V. 46. — P. 83–85.
3. Maranas C. D. New results in the packing of equal circles in a square / C. D. Maranas, C. A. Floudas, P. M. Pardalos // Discrete Mathematics. — 1995. — V. 142, № 1–3. — P. 287–293.

4. Birgin E. G. Minimizing the object dimensions in circle and sphere packing problems / E. G. Birgin, F. N. C. Sobral // Computers & Operations Research. — 2008. — V. 35. — P. 2357–2375.
5. Solving the problem of packing equal and unequal circles in a circular container / A. Grosso, J. U. Jamali, M. Locatelli [та ін.] // Journal of Global Optimization. — 2010. — V. 47(1) — P. 63–81.
6. Akeb H. Basic heuristics for packing a large number of equal circles. [Електронний ресурс]: Publications internes du LaRIA, LaRIA, Universite de Picardie Jules Verne / H. Akeb, Y. Li // Publications internes du LaRIA, LaRIA, Universite de Picardie Jules Verne — 2005. — 19 p. — Режим доступу до журн.: http://home.mis.u-picardie.fr/ cli/Publis/circle.pdf . — Назва з екрану.
7. Akeb H. A basic heuristic for packing equal circles into a circular container. [Електронний ресурс]: Publications internes du LaRIA, LaRIA, Universite de Picardie Jules Verne / H. Akeb, Y. Li // Publications internes du LaRIA, LaRIA, Universite de Picardie Jules Verne. — 2005. — 19 p. — Режим доступу до журн.: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.108.8530&rep=rep1 &type=pdf . — Назва з екрану.
8. Kallrath J. Cutting circles and polygons from area-minimizing rectangles / J. Kallrath // Journal of Global Optimization. — 2009. — V. 43. — P. 299–328.
9. Hurlimann, T. Modeling Languages in Optimization. A New Paradigm / T. Hurlimann // Christodoulos A. Floudas, Panos M. Pardalos (Eds.) Encyclopedia of Optimization, Second Edition, Springer. — 2009. — P. 2297–2304.
10. Lenstra J. K. Complexity of packing, covering, and partitioning problems / J. K. Lenstra, A. H. G. Rinnooy // Packing and Covering in Combinatorics; [ed. by Schrijver A, Amsterdam: Mathematisch Centrum]. — 1979. — P. 275–291.
11. Stoyan Yu. Packing identical spheres into a cylinder / Yu. Stoyan, G. Yaskov // Intl. Trans. in Op. Res. — 2010. — V. 17, № 1. — P. 51–70.
12. Zoutendijk G. Nonlinear programming, computational methods, / G. Zoutendijk // Integer and Nonlinear Programming; [Ed. by J. Abadie, North Holland Publishing Co, Amsterdam]. — 1970. — P. 37–86.
13. Stoyan Y. Packing cylinders and rectangular parallelepipeds with distances between them into a given region / Y. Stoyan, A. Chugay // European Journal of Operational Research. — 2009. — V. 197. — P. 446–455.
14. Gondzio J. HOPDM (version 2.12) — A Fast LP Solver Based on a Primal-Dual Interior Point Method / J. Gondzio // European Journal of Operational Research. — 1995. — V. 85, № 1. — P. 221–225.

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков, Украина.

Поступила 20.10.2012