Журнал обчислювальної та прикладної математики | **2013, №4(114)** | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.956

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ ПУАНКАРЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ВОЛНОВЫМ ОПЕРАТОРОМ

С. А. Алдашев

Резюме. В работе показано, что задача Пуанкаре в цилиндрической области одного класса многомерных гиперболических уравнений с волновым оператором разрешима. Получен также критерий единственности регулярного решения.

Ключевые слова: корректность, задача, функция, критерий, уравнение.

Введение

В теории уравнений в частных производных гиперболического типа краевые задачи с данными на всей границе области служат примером некорректности поставленных задач $[1, 2]$.

В работе показано, что задача Пуанкаре в цилиндрической области одного класса многомерных гиперболических уравнений с волновым оператором разрешима. Получен также критерий единственности регулярного решения.

1. Постановка задачи и основные результаты

Пусть $D_\beta-$ цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, ..., x_m, t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x, t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \beta > 0$ и $t = 0$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, ..., x_m)$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_β области D_β, обозначим через Γ_β, S_β, S_0 соответственно.

В области D_β рассмотрим взаимно–сопряженные многомерные гиперболические уравнения

$$Lu \equiv \Delta_x u - u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t)u_{x_i} + b(x,t)u_t + c(x,t)u = 0, \tag{1}$$

$$L^*\upsilon \equiv \Delta_x \upsilon - \upsilon_{tt} - \sum_{i=1}^{m} a_i \upsilon_{x_i} - b\upsilon_t + d\upsilon = 0, \tag{1*}$$

где Δ_x- оператор Лапласа по переменным $x_1, ..., x_m$, $m \geq 2$, а $d(x,t) = c - \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ix_i} - b_t$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, ..., x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, ..., \theta_{m-1}, t,\ r \geq 0,\ 0 \leq \theta_1 < 2\pi,\ 0 \leq \theta_i \leq \pi,\ i = 2, 3, ...,\ m-1$.

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области D_β из класса $C^1(\overline{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_{S_\beta} = \varphi(r,\theta), \quad u\Big|_{\Gamma_\beta} = \psi(t,\theta), \quad u_t\Big|_{S_0} = \nu(r,\theta), \tag{2}$$

при этом $\varphi(1,\theta) = \psi(\beta,\theta)$.

Пусть $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$– система линейно независимых сферических функций порядка
n, $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $W_2^l(S_0)$, $l = 0, 1, ...$ — пространства Соболева.

Имеет место ([3])

Лемма 1. Пусть $f(r,\theta) \in W_2^l(S_0)$. Если $l \geq m-1$, то ряд

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{3}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leq l - m + 1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. Для того, чтобы $f(r,\theta) \in W_2^l(S_0)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (3) удовлетворяли неравенствам

$$|f_0^1(r)| \leq c_1, \ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} |f_n^k(r)|^2 \leq c_2,\ \ c_1, c_2 = const.$$

Через $\tilde{a}_{in}^k(r,t)$, $a_{in}^k r, t$, $\tilde{b}_n^k(r,t)$, $\tilde{c}_n^k(r,t)$, $\tilde{d}_n^k(r,t)$, ρ_n^k, $\bar{\varphi}_n^k(r)$, $\psi_n^k(t)$, $\bar{\nu}_n^k(r)$ обозначим коэффициенты разложения ряда (3), соответственно функций $a_i(r,\theta,t)\rho(\theta)$, $a_i \frac{x_i}{r}\rho$, $b(r,\theta,t)\rho$, $c(r,\theta,t)\rho$, $d(r,\theta,t)\rho$, $\rho(\theta)$, $i = 1, ..., m$, $\varphi(r,\theta)$, $\psi(t,\theta)$, $\nu(r,\theta)$, причем $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$, $H-$единичная сфера в E_m.

Пусть $a_i(r,\theta,t), b(r,\theta,t), c(r,\theta,t) \in W_2^l(D_\beta) \subset C(\overline{D}_\beta)$, $l \geq m+1$, $i = 1, ..., m$.

Тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Если $\varphi(r,\theta) \in W_2^p(S_\beta)$, $\psi(t,\theta) \in W_2^p(\Gamma_\beta)$, $\nu(r,\theta) \in W_2^l(S_0)$, $p \geq \frac{3m}{2}$ и выполняется условие

$$\cos \mu_s \beta \neq 0,\ \ s = 1, 2, ..., \tag{4}$$

то задача 1 разрешима, где $\mu_{s,n}$ — положительные нули функций Бесселя первого рода $J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(z)$.

Теорема 2. Если $b(r,\theta,0) = 0$, $\forall (r,\theta) \in S_0$, то решение задачи 1 единственно, тогда и только тогда, когда выполняется условие (4).

2. Доказательство теоремы 1.

В сферических координатах уравнение (1) имеет вид

$$\begin{gathered} Lu \equiv u_{rr} + \tfrac{m-1}{r} u_r - \tfrac{\delta u}{r^2} - u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(r,\theta,t) u_{x_i} + \\ + b(r,\theta,t) u_t + c(r,\theta,t) u = 0, \end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered} \delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j sin^{m-j-1}\theta_j} \frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(sin^{m-j-1}\theta_j \frac{\partial}{\partial\theta_j}\right), \\ g_1 = 1,\ g_j = (sin\theta_1 ... sin\theta_{j-1})^2,\ j > 1. \end{gathered}$$

Известно ([3]), что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0,1,\ldots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y^k_{n,m}(\theta)$.

Искомое решение задачи 1 будем искать в виде

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}^k_n(r,t) Y^k_{n,m}(\theta), \tag{6}$$

где $\bar{u}^k_n(r,t)$ — функции, подлежащие определению.

Подставив (6) в (5), умножив затем полученное выражение на $\rho(\theta) \neq 0$, и проинтегрировав по единичной сфере H, для $\bar{u}^k_n$ получим ([4–6])

$$\begin{gathered} \rho^1_0 \bar{u}^1_{0rr} - \rho^1_0 \bar{u}^1_{0tt} + \left(\frac{m-1}{r}\rho^1_0 + \sum_{i=1}^{m} a^1_{i0}\right)\bar{u}^1_{0r} + \tilde{b}^1_0 \bar{u}^1_{0t} + \tilde{c}^1_0 \bar{u}^1_0 + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\rho^k_n \bar{u}^k_{nrr} - \rho^k_n \bar{u}^k_{ntt} + \left(\frac{m-1}{r}\rho^k_n + \sum_{i=1}^{m} a^k_{in}\right)\bar{u}^k_{nr} + \tilde{b}^k_n \bar{u}^k_{nt} + \right. \\ \left. + \left[\tilde{c}^k_n - \lambda_n \frac{\rho^k_n}{r^2} + \sum_{i=1}^{m}(\tilde{a}^k_{in-1} - n a^k_{in})\right]\bar{u}^k_n\right\} = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\rho^1_0 \bar{u}^1_{0rr} - \rho^1_0 \bar{u}^1_{0tt} + \frac{m-1}{r}\rho^1_0 \bar{u}^1_{0r} = 0, \tag{8}$$

$$\begin{gathered} \rho^k_1 \bar{u}^k_{1rr} - \rho^k_1 \bar{u}^k_{1tt} + \frac{m-1}{r}\rho^k_1 \bar{u}^k_{1r} - \frac{\lambda_1}{r^2}\rho^k_1 \bar{u}^k_1 = \\ = -\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^{m} a^1_{i0}\bar{u}^1_{0r} + \tilde{b}^1_0 \bar{u}^1_{0t} + \tilde{c}^1_0 \bar{u}^1_0\right), \quad n = 1, \quad k = \overline{1,k_1}, \end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered} \rho^k_n \bar{u}^k_{nrr} - \rho^k_n \bar{u}^k_{ntt} + \frac{m-1}{r}\rho^k_n \bar{u}^k_{nr} - \frac{\lambda_n}{r^2}\rho^k_n \bar{u}^k_n = \\ = -\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\left\{\sum_{i=1}^{m} a^k_{in-1}\,\bar{u}^k_{n-1r} + \tilde{b}^k_{n-1}\bar{u}^k_{n-1t} + [\tilde{c}^k_{n-1} + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{m}(\tilde{a}^k_{in-2} - (n-1)a^k_{in-1})]\bar{u}^k_{n-1}\right\}, \quad k = \overline{1,k_n}, \quad n = 2,3,\ldots. \end{gathered} \tag{10}$$

Нетрудно убедиться, что если $\left\{\bar{u}^k_n\right\}$, $k = \overline{1,k_n}$, $n = 0,1,\ldots.$ — решение системы (8)–(10), то оно является решением уравнения (7).

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (8)–(10) можно представить в виде

$$\bar{u}^k_{nrr} + \frac{m-1}{r}\bar{u}^k_{nr} - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}^k_n - \bar{u}^k_{ntt} = f^k_n(r,t), \tag{11}$$

где $f^k_n(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $f^1_0(r,t) \equiv 0$.

Далее, из краевого условия (2) в силу (6), с учетом леммы 1 будем иметь

$$\begin{gathered}\bar{u}^k_n(r,\beta) = \bar{\varphi}^k_n(r), \quad \bar{u}^k_n(1,t) = \psi^k_n(t), \quad \bar{u}^k_{nt}(r,0) = \bar{\nu}^k_n(r),\\ k=\overline{1,k_n}, \quad n=0,1,...\end{gathered} \tag{12}$$

В (11), (12) произведя замену $\bar{\upsilon}^k_n(r,t) = \bar{u}^k_n(r,t) - \psi^k_n(t)$ получим

$$\bar{\upsilon}^k_{nrr} + \frac{m-1}{r}\bar{\upsilon}^k_{nr} - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{\upsilon}^k_n - \bar{\upsilon}^k_{ntt} = \bar{f}^k_n(r,t), \tag{13}$$

$$\begin{gathered}\bar{\upsilon}^k_n(r,\beta) = \varphi^k_n(r), \quad \bar{\upsilon}^k_n(1,t) = 0, \ \bar{\upsilon}^k_{nt}(r,0) = \nu^k_n(r),\\ k=\overline{1,k_n}, \quad n=0,1,...,\end{gathered} \tag{14}$$

$$\begin{gathered}\bar{f}^k_n(r,t) = f^k_n(r,t) + \psi^k_{ntt} + \frac{\lambda_n}{r^2}\psi^k_n, \ \varphi^k_n(r) = \bar{\varphi}^k_n(r) - \psi^k_n(\beta),\\ \nu^k_n(r) = \bar{\nu}^k_n(r) - \psi^k_{nt}(0).\end{gathered}$$

Произведя замену $\bar{\upsilon}^k_n(r,t) = r^{\frac{(1-m)}{2}}\upsilon^k_n(r,t)$ задачу (13), (14) приведем к следующей задаче

$$L\upsilon^k_n \equiv \upsilon^k_{nrr} - \upsilon^k_{ntt} + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}\upsilon^k_n = \tilde{f}^k_n(r,t), \tag{15}$$

$$\upsilon^k_n(r,\beta) = \widetilde{\varphi}^k_n(r), \quad \upsilon^k_n(1,t) = 0, \quad \upsilon^k_{nt}(r,0) = \tilde{\nu}^k_n(r), \tag{16}$$

$$\begin{gathered}\overline{\lambda}_n = \frac{((m-1)(3-m) - 4\lambda_n)}{4}, \quad \tilde{f}^k_n(r,t) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{f}^k_n(r,t),\\ \widetilde{\varphi}^k_n(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\varphi^k_n(r), \tilde{\nu}^k_n(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\nu^k_n(r).\end{gathered}$$

Решение задачи (15), (16) ищем в виде

$$\upsilon^k_n(r,t) = \upsilon^k_{1n}(r,t) + \upsilon^k_{2n}(r,t), \tag{17}$$

где $\upsilon^k_{1n}(r,t)$ — решение задачи

$$L\upsilon^k_{1n} = \widetilde{f}^k_n(r,t), \tag{18}$$

$$\upsilon^k_{1n}(r,\beta) = 0, \ \upsilon^k_{1n}(1,t) = 0, \ \upsilon^k_{1nt}(r,0) = 0, \tag{19}$$

а $\upsilon^k_{2n}(r,t)$ — решение задачи

$$L\upsilon^k_{2n} = 0, \tag{20}$$

$$\upsilon^k_{2n}(r,\beta) = \widetilde{\varphi}^k_n(r), \upsilon^k_{2n}(1,t) = 0, \upsilon^k_{2nt}(r,0) = \tilde{\nu}^k_n(r). \tag{21}$$

Решение выше указанных задач ищем в виде

$$\upsilon^k_n(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r)T_s(t), \tag{22}$$

при этом полагаем

$$\widetilde{f}_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{ns}^k(t) R_s(r),\ \widetilde{\varphi}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{ns}^k R_s(r),\ \widetilde{\nu}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} e_{ns}^k R_s(r). \quad (23)$$

Подставляя (22) в (18), (19), с учетом (23), получим

$$R_{srr} + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2} R_s + \mu R_s = 0,\ 0 < r < 1, \quad (24)$$

$$R_s(1) = 0,\ |R_s(0)| < \infty, \quad (25)$$

$$T_{stt} + \mu T_s(t) = -a_{ns}^k(t),\ 0 < t < \beta, \quad (26)$$

$$T_s(\beta) = 0,\ T_{st}(0) = 0. \quad (27)$$

Ограниченным решением задачи (24), (25) является ([7])

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_\nu(\mu_s r), \quad (28)$$

где $\nu = n + \frac{m-2}{2},\ \mu = \mu_s^2$.

Общее решение уравнения (26) представимо в виде ([7])

$$T_s(t) = c_{1s}\cos\mu_s t + c_{2s}\sin\mu_s t + \frac{\cos\mu_s t}{\mu_s}\int_0^t a_{ns}^k(\xi)\sin\mu_s\xi d\xi -$$
$$-\frac{\sin\mu_s t}{\mu_s}\int_0^t a_{ns}^k(\xi)\cos\mu_s\xi d\xi,$$

c_{1s}, c_{2s} — произвольные постоянные, удовлетворив условию (27). Тогда будем иметь

$$\begin{cases} c_{2s} = 0, \\ \mu_{s,n} c_{1s}\cos\mu_s\beta = \sin\mu_{s,n}\beta\int_0^\beta a_{ns}^k(\xi)\cos\mu_{s,n}\xi d\xi - \\ \cos\mu_{s,n}\beta\int_0^\beta a_{ns}^k(\xi)\sin\mu_{s,n}\xi d\xi. \end{cases} \quad (29)$$

Подставляя (28) в (23) получим

$$r^{-\frac{1}{2}}\widetilde{f}_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{ns}^k(t) J_\nu(\mu_s r),\ r^{-\frac{1}{2}}\widetilde{\varphi}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{ns}^k J_\nu(\mu_s r),$$
$$r^{-\frac{1}{2}}\widetilde{\nu}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} e_{ns}^k J_\nu(\mu_s r), 0 < r < 1. \quad (30)$$

Ряды (30) — разложение в ряды Фурье-Бесселя ([8]), если

$$a_{ns}^k(t) = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int_0^1 \sqrt{\xi}\widetilde{f}_n^k(\xi,t) J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi, \quad (31)$$

$$b_{ns}^k = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int_0^1 \sqrt{\xi}\widetilde{\varphi}_n^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi,$$
$$e_{ns}^k = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int_0^1 \sqrt{\xi}\widetilde{\nu}_n^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi, \quad (32)$$

$\mu_{s,n}, s = 1, 2, \ldots$ — положительные нули функций Бесселя $J_\nu(z)$, расположенные в порядка возрастания их величины.

Из (28)–(29) получим решение задачи (18), (19) в виде

$$\upsilon_{1n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sqrt{r}}{\mu_{s,n}} \left\{ \left[(tg\mu_{s,n}\beta) \int_0^\beta a_{ns}^k(\xi) \cos \mu_{s,n}\xi d\xi - \right.\right.$$
$$\left. - \int_0^\beta a_{ns}^k(\xi) \sin \mu_{s,n}\xi d\xi \right] \cos \mu_{s,n} t + (\cos \mu_{s,n} t) \int_0^t a_{ns}^k(\xi) \sin \mu_{s,n}\xi d\xi - \qquad (33)$$
$$\left. - (\sin \mu_{s,n} t) \int_0^t a_{ns}^k(\xi) \cos \mu_{s,n}\xi d\xi \right\} J_\nu(\mu_{s,n} r),$$

где $a_{ns}^k(t)$ определяется из (31).

Далее, подставляя (28) в (20), (21), с учетом (23), будем иметь задачу

$$V_{stt} + \mu_{s,n}^2 V_s = 0, \; V_s(\beta) = b_{ns}^k, \; V_{st}(0) = e_{ns}^k, \qquad (34)$$

решением которой является

$$\mu_{s,n} V_s(t) = e_{ns}^k \sin \mu_{s,n} t + (b_{ns}^k \mu_{s,n} - e_{ns}^k \sin \mu_{s,n}\beta) \frac{\cos \mu_{s,n} t}{\cos \mu_{s,n}\beta}. \qquad (35)$$

Из (28), (34) получим

$$\upsilon_{2n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} V_s(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \qquad (36)$$

где b_{ns}^k, e_{ns}^k определяются из (32).

Следовательно, сначала решив задачу (8), (12) ($n = 0$), а затем (9), (12) ($n = 1$) и т.д. найдем последовательно все $\upsilon_n^k(r,t)$ из (17), где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$, $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ определяются из (33), (35), $k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \ldots$.

Итак, в области D_β, имеет место

$$\int_H \rho(\theta) L u dH = 0. \qquad (37)$$

Пусть $f(r,\theta,t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r) \in V_0$ плотна в $L_2((0,1))$, $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$ плотна в $L_2(H)$, а $T(t) \in V_1$ плотна в $L_2((0,\beta))$. Тогда $f(r,\theta,t) \in V$, $V = V_0 \otimes H \otimes V_1$плотна в $L_2(D_\beta)$ ([9]).

Отсюда и из (36), следует, что

$$\int_{D_\beta} f(r,\theta,t) L u d D_\beta = 0 \;\text{ и }\; Lu = 0 \;\; \forall (r,\theta,t) \in D_\beta.$$

Таким образом, решением задачи 1 является ряд

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \psi_n^k(t) + r^{\frac{(1-m)}{2}} \left[\upsilon_{1n}^k(r,t) + \upsilon_{2n}^k(r,t) \right] \right\} Y_{n,m}^k(\theta), \qquad (38)$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$, $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ находятся из (33), (35).

Учитывая следующие свойства нулей функций Бесселя ([8]):

1). Если $\mu_{\nu,1}, \mu_{\nu,2}, ...$ —положительные нули функций $J_\nu(z)$, упорядоченные по возрастанию значений, то

$$0 < \mu_{\nu,1} < \mu_{\nu+1,1} < \mu_{\nu,2} < \mu_{\nu+1,2} < \mu_{\nu,3} < ..., \ \nu > -1.$$

2). Пусть μ_ν, μ'_ν, μ''_ν являются наименьшими положительными нулями функций $J_\nu(z)$, $J'_\nu(z)$, $J''_\nu(z)$ соответственно, тогда

$$\sqrt{\nu(\nu+2)} < \mu_\nu < \sqrt{2(\nu+1)(\nu+3)}, \ \nu > 0,$$
$$\sqrt{\nu(\nu+2)} < \mu'_\nu < \sqrt{2\nu(\nu+1)}, \ \nu > 0,$$
$$\sqrt{\nu(\nu-1)} < \mu''_\nu < \sqrt{(\nu^2-1)}, \ \nu > 1,$$

и формулы ([13, 11])

$$\sin z = z(1 - z\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}(4n^2-1)^{-1}[J_n(nz)]^2),$$
$$J_\nu(z) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi z}}\cos(z - \tfrac{\pi}{2}\nu - \tfrac{\pi}{4}) + 0(\tfrac{1}{z^{3/2}}), \ \nu \geq 0,$$
$$2J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)$$

применяя признак Даламбера, доказывается, что ряды (33), (35) и продифференцированные ряды сходятся абсолютно и равномерно.

Далее используя оценки ([8,3])

$$|J_\nu(z)| \leq \frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu,$$

$$|k_n| \leq c_1 n^{m-2}, \ \left|\frac{\partial^q}{\partial\theta_j^q}Y^k_{n,m}(\theta)\right| \leq c_2 n^{\frac{m}{2}-1+q}, \ j = \overline{1, m-1}, \ q = 0, 1, ..., \tag{39}$$

$\Gamma(z)$ — гамма-функция, а также леммы 1, 2, ограничения на коэффициенты уравнения (1) и на заданные функции $\varphi(r,\theta)$, $\psi(t,\theta)$, $\nu(r,\theta)$, как в [4–6], можно показать, что полученное решение (37) принадлежит искомому классу $C^1(\bar{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta)$.

Следовательно, теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2.

Покажем единственность решения задачи 1. Для этого сначала построим решение задачи Пуанкаре для уравнения (1*) с данными

$$\upsilon\Big|_{S_\beta\cup\Gamma_\beta} = 0, \quad \upsilon_t\Big|_{S_0} = \nu(r,\theta) = \bar{\nu}^k_n(r)Y^k_{n,m}(\theta), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, ..., \tag{40}$$

где $\bar{\nu}^k_n(r) \in G$, G — множество функций $\nu(r)$ из класса $C([0,1]) \cap C^1((0,1))$. Множество G плотно всюду в $L_2((0,1))$ [9]. Решение задачи (1*), (39) будем искать в виде (6), где функции $\bar{\upsilon}^k_n(r,t)$ будут определены ниже. Тогда, аналогично п.2, функции $\bar{\upsilon}^k_n(r,t)$ удовлетворяют системам уравнений (8)–(10), где $\tilde{a}^k_{in}$, a^k_{in}, $\tilde{b}^k_n$ заменены соответственно на $-\tilde{a}^k_{in}$, $-a^k_{in}$, $-\tilde{b}^k_n$, а $\tilde{c}^k_n$ на $\tilde{d}^k_n$, $i = 1, ..., m$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, ...$.

Далее, из краевого условия (39), в силу (6), получим

$$\bar{\upsilon}^k_n(r,\beta) = \bar{\upsilon}^k_n(1,t) = 0, \ \bar{\upsilon}^k_n(r,0) = \bar{\nu}^k_n(r), \ k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, ... \tag{41}$$

Как ранее замечено, что каждое уравнение системы (8)–(10) представимо в виде (11). В п.2 показано, что задача (11), (40) имеет единственное решение, если имеет место соотношение (4).

Таким образом, решение задачи (1*), (39) в виде ряда (37) построено и, в силу оценок (38), принадлежит классу $C^1\left(\bar{D}_\beta\right)\cap C^2\left(D_\beta\right)$.

Из определения сопряженных операторов $L,\ L^*$ [10] имеем

$$\upsilon Lu-uL^*\upsilon=-\upsilon P(u)+uP(\upsilon)-u\upsilon Q,$$

где

$$P(u)=\sum_{i=1}^{m}u_{x_i}\cos\left(N^{\perp},x_i\right)-u_t\cos\left(N^{\perp},t\right),$$
$$Q=\sum_{i=1}^{m}a_i\cos\left(N^{\perp},x_i\right)-b\cos\left(N^{\perp},t\right),$$

а $N^{\perp}-$внутренняя нормаль к границе ∂D_β, по формуле Грина, тогда

$$\int\limits_{D_\beta}\left(\upsilon Lu-uL^*\upsilon\right)dD_\beta=\int\limits_{\partial D_\beta}\left[\left(\upsilon\frac{\partial u}{\partial N}-u\frac{\partial \upsilon}{\partial N}\right)M+u\upsilon Q\right]ds, \tag{42}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial N}=\sum_{i=1}^{m}\cos\left(N^{\perp},x_i\right)\frac{\partial}{\partial x_i}-\cos\left(N^{\perp},t\right)\frac{\partial}{\partial t},$$
$$M^2=\sum_{i=1}^{m}\cos^2\left(N^{\perp},x_i\right)+\cos^2\left(N^{\perp},t\right).$$

Из (41), принимая во внимание однородные граничные условия (2) и условия (39), получим

$$\int\limits_{S_0}\tau(r,\theta)u(r,\theta,0)ds=0. \tag{43}$$

Поскольку линейная оболочка системы функций $\{\bar{\upsilon}_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta)\}$ плотна в $L_2(S_0)$ ([9]), то из (42) заключаем, что $u(r,\theta,0)=0,\ \forall(r,\theta)\in S_0$.

Следовательно, в силу единственности решения задачи Коши: $u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0$ для уравнения (1) ([10]) будем иметь $u(x,t)=0$, $\forall(x,t)\in D_\beta$.

Таким образом, если выполняется условие (4), то решение задачи 1 единственно.

Пусть теперь условие (4) нарушено, хотя бы для одного $s=l$.

Тогда, если решение однородной задачи 1, соответствующей задаче 1, будем искать в виде (6), то приходим к краевой задаче

$$L\upsilon_n^k=\tilde{f}_n^k(r,t),$$
$$\upsilon_{nt}^k(r,0)=0,\ \upsilon_n^k(r,\beta)=0,\ \upsilon_n^k(1,t)=0,\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\ldots.$$

В силу (29), ее решением является функция

$$\mu_{l,n}\upsilon_n^k(r,t)=\sqrt{r}\left[\cos\mu_{l,n}t+\cos\mu_{l,n}t\int\limits_0^t a_{nl}^k(\xi)\sin\mu_{l,n}\xi d\xi-\right.$$

$$-\sin \mu_l t \int_0^t a_{nl}^k(\xi) \cos \mu_{l,n} \xi d\xi \Bigg] J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{l,n} r).$$

Следовательно, нетривиальное решение однородной задачи 1 записывается в виде ряда

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{-p} r^{\frac{(1-m)}{2}} \upsilon_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta).$$

Из оценок (38) следует, что $u \in C^1(\bar{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta)$, если $p > \frac{3m}{2}$.

Теорема 2 доказана.

В заключении отметим в [11] для многомерного волнового уравнения внутри характеристической области приведена корректная постановка задачи Пуанкаре.

Литература

1. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. — М.: Изд. АН СССР, 1959. — 164 с.
2. Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнения в частных производных. — М.: Наука, 2006. — 287 с.
3. Михлин С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. — М.: Физматгиз, 1962. — 254 с.
4. Алдашев С. А. О задачах Дарбу для одного класса многомерных гиперболических уравнений. // Дифференц. уравнения. — 1998. — Т. 34, №1. — С. 64–68.
5. Алдашев С. А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. — Алматы: Гылым, 1994. — 170 с.
6. Алдашев С. А. Вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения. — Орал: ЗКАТУ, 2007. — 139 с.
7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1965. — 703 с.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, Т. 2. — М.: Наука, 1974. — 295 с.
9. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976. — 543 с.
10. Смирнов В. И. Курс высшей математики, Т. 4. — М.: Наука, 1981. — 550 с.
11. Алдашев С. А. Задачи Дирихле и Пуанкаре для многомерного волнового уравнения // Известия НАН РК, серия физ.-мат. наук. — 2010. — №3. — С. 3–5.

Казахский Национальный Педагогический Университет имени Абая, Алматы, Казахстан

Поступила 06.09.2013