Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2013, №4(114) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.9

ПРО ЗАСТОСУВАННЯ СПЕЦІАЛЬНИХ МНОЖИН ПРОСТИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ МІРИ НАЛЕЖНОСТІ НЕЧІТКИХ МНОЖИН

Е. В. Івохін

Резюме. Запропоновано конструктивний підхід для представлення величин міри належності елементів нечітких множин, в основу якого покладено послідовності простих чисел спеціального вигляду. Введено операції над елементами послідовностей, поняття нижньої та верхньої спряженої множин, доведено твердження про співвідношення оцінок, що будуються на основі простих чисел. Результати можуть бути використані для формування та модифікації показників належності множини станів в процесах прийняття рішень в умовах невизначеності.

Прості числа як інструмент для опису нечітких множин

Швидкий розвиток математичних методів теорії прийняття рішень активно впливає на процеси застосування загальних підходів для розробки підходів для моделювання процесів соціальних та економічних систем. Специфіка таких систем полягає у необхідності передбачати можливі реакції об'єктів дослідження і використовувати такі механізми прийняття управлінських рішень, які б дозволяли максимально точно враховувати і узгоджувати інтереси усіх рівнів управління. Іншою особливістю соціальних і економічних систем є неавтономність їх станів, що приводить до необхідності детального аналізу та дослідження поведінки систем.

Для проведення дослідження дуже важливо правильно формалізувати процеси, що відбуваються в об'єкті дослідження, застосовуючи, наприклад, підходи математичного моделювання. Опис динаміки системи має, як правило, "приблизний" характер з урахуванням різних методик спрощення поведінки всієї системи.

Для практичних задач моделювання в даних умовах пропонується використовувати нечіткий підхід, при якому неточність функціонування моделі описується в термінах теорії нечітких множин. Нечіткі множини характеризуються функціями належності, що визначає ступінь належності елементів до нечіткої множини. При цьому для вирішення задач побудови функцій належності можна запропонувати ефективні обчислювальні схеми та підходи, що базуються на використанні простих чисел.

Означення 1. Множини невід'ємних простих чисел $P_j(a) \geq 0$, $j \in Z$, що належать інтервалу $[a, \infty)$ при $j \geq 0$ або інтервалу $[0, a)$ при $j < 0$ для заданого, необов'язково простого, цілого числа $a \geq 0$, будемо називати послідовностями простих чисел відносно числа a.

Розглянемо довільні прості числа $P_j(a) \geq 0$ з порядковими номерами $j \in Z$ з послідовності простих чисел відносно числа $a \geq 0$. Нескладно перевірити, що справедливі співвідношення:

1) $P_0(0) = 0$, $P_0(1) = 1$, $P_1(0) = 1$;

2) $P_0(a) = a$, якщо число $a \geq 0$ – просте, $P_0(a)$ – не існує, якщо $a \geq 0$ – непросте;

3) $P_j(a) \leq P_k(a)$, якщо $j \leq k$, $P_j(a) < P_k(a)$ при $j < k$, $j \in Z$, $k \in Z$;

4) $P_j(a) = P_j(a+1) = ... = P_j(a+l)$ для всіх $1 \leq l < P_{j+1}(a) - P_j(a)$, $j = 0, 1, 2, ...$, $a \geq 0$;

5) $P_j(a) = P_1(P_{j-1}(a)) = P_1(P_1(P_{j-2}(a))) = P_2(P_{j-2}(a)) = ... = P_{j-1}(P_1(a))$, якщо число $a \geq 0$ – просте, $j \in Z$;

6) $P_j(a) \geq a$ для усіх $j = 0, 1, 2, ...$, якщо число $a \geq 0$ – просте, $P_j(a) > a$ для усіх $j = 1, 2, ...$, якщо $a \geq 0$ – непросте;

7) $P_j(a) < a$ для $j = -1, -2, ..., j_0$, де номер $j_0 < 0$ визначається як найменший індекс простого числа з послідовності, для якого $0 \leq P_{j_0}(a) < a$.

Надалі будемо розглядати випадки, коли $a > 0$ – просте число або $a = 0$. У даному випадку існує число $P_0(a)$. Крім цього, виходячи з наведених вище властивостей, справедливі співвідношення $P_j(a)/P_k(a) \leq 1$, і $P_j(a)/P_k(a) = P_j(a)/P_1(P_{k-1}(a)) = ... = P_j(a)/P_j(P_{k-j}(a)) = P_j(a)/P_{k-j}(P_j(a))$ для будь-яких $j \leq k$, $j \in Z$, $k \in Z$.

Крім традиційних арифметичних операцій на послідовності простих чисел для довільного $P_j(a)$, $a \geq 0$, $j = 0, 1, 2, ...$, введемо операцію зсуву на m, $m \in Z$, $j + m \geq j_0$, простих чисел у вигляді

$$P_j(a) \oplus m = P_{j+m}(a) = P_m(P_j(a)), \tag{1}$$

яка не повинна виводити за межі заданої послідовності ($j + m \geq j_0$), та операцію n - кратної композиції ($n \in Z$) відношення двох чисел $P_j(a)$ та $P_k(a)$, $j \in Z$, $k \in Z$, $j \leq k$, у вигляді

$$\frac{P_j(a)}{P_k(a)} \circ n = \frac{P_j(a) \oplus n}{P_k(a) \oplus n} = \frac{P_{j+n}(a)}{P_{k+n}(a)} = \frac{P_n(P_j(a))}{P_n(P_k(a))}. \tag{2}$$

Лема 1. *Довільне раціональне число $r = p/q$, $p \in Z$, $q \in N$, може бути представлене у вигляді*

$$r = \frac{\prod\limits_{i=1}^{s_p} P_{k_i}(a_{k_i})}{\prod\limits_{j=1}^{s_q} P_{n_j}(a_{n_j})}, \tag{3}$$

де s_p, s_q – кількості множників у представленні чисел $|p|$ та q у вигляді відповідних добутків елементарних дільників, $a_{k_i} \geq 0$, $a_{n_j} \geq 0$ – деякі цілі числа, $k_i \in Z$, $n_j \in Z$, $i = \overline{1, s_p}$, $j = \overline{1, s_q}$.

Доведення. Відомо, що будь-яке раціональне число r представляється у вигляді звичайного дробу $r = p/q$, $p \in Z$, $q \in N$.

Припустимо, що число r невід'ємне, $r \geq 0$. Якщо при цьому обидва числа p та q є простими числами, то маємо твердження леми. У даному випадку

$s_p = 1$, $s_q = 1$, $P_{k_1}(a_{k_1}) = p$, $P_{n_1}(a_{n_1}) = q$ для деяких $k_1 \in Z$, $n_1 \in Z$ та $a_{k_1} \geq 0$, $a_{n_1} \geq 0$.

Якщо чисельник або знаменник або обидва числа p та q не є простими, то їх можна представити у вигляді добутків елементарних дільників, які є простими числами. При цьому, елементарні дільники записуються у добутках, кількість яких дорівнює їх кратності.

Нехай s_p, s_q — кількості множників у представленні чисел p та q у вигляді добутків, де кожен з множників є простим числом з відповідних послідовностей простих чисел відносно чисел a_{k_i}, a_{n_j}, $k_i \in Z$, $n_j \in Z$, $i = \overline{1, s_p}$, $j = \overline{1, s_q}$. Представлення (3) для довільного раціонального числа r доведено.

У випадку, якщо число r від'ємне, то можна покласти $r = -r$ і усі викладки повторюються. Лему доведено.

Наслідок 1. *Довільне раціональне число $r = p/q$, $p \in Z$, $q \in N$, може бути представлене у вигляді*

$$r = \frac{\prod\limits_{i=1}^{s_p} P_{k_i}(a)}{\prod\limits_{j=1}^{s_q} P_{n_j}(a)}, \tag{4}$$

де s_p, s_q — кількості множників у представленні чисел $|p|$ та q у вигляді відповідних добутків елементарних дільників, $a \geq 0$ – деяке ціле число, $k_i \in Z$, $n_j \in Z$, $i = \overline{1, s_p}$, $j = \overline{1, s_q}$.

Доведення. Як випливає з леми 1, будь-яке раціональне число $r = p/q$, $p \in Z$, $q \in N$, можна представити у вигляді (3).

Виходячи з того, що усі числа у представленні $P_l(a) \geq 0$, $l = \overline{1, s_p + s_q}$, є простими, знайдемо, наприклад, найменше з них $P_{\min} = \min P_l$, $l = \overline{1, s_p + s_q}$. Використовуючи властивість 5), можна записати усі числа представлення у вигляді

$P_i(a) = P_{k_i}(P_{\min})$, $k_i \in N \bigcup \{0\}$, $i = \overline{1, s_p}$, $P_j(a) = P_{n_j}(P_{\min})$, $n_j \in N \bigcup \{0\}$, $j = \overline{1, s_q}$, тобто $a = P_{\min}$, що і треба було показати.

Очевидно, що число $a \geq 0$ може бути вибране неєдиним способом. Будь-яке число $0 \leq a < P_{\min}$ також може бути обране в якості значення, відносно якого формується послідовність простих чисел.

Крім цього, може бути $a > P_{\min}$. У даному випадку, частина індексів $k_i < 0$, $i = \overline{1, s_p^0}$, та $n_j < 0$, $j = \overline{1, s_q^0}$, де s_p^0 та s_q^0 – відповідні кількості, що отримуються з обмежень на прості числа відносно числа $a : 0 \leq P_{k_i}(a) < a$, $i = \overline{1, s_p^0}$, $0 \leq P_{k_i}(a) < a$, $j = \overline{1, s_q^0}$. Таким чином, твердження доведено.

Наслідок 2. *Довільне раціональне число $r = p/q$, $p \in Z$, $q \in N$, може бути представлене у вигляді*

$$r = \frac{\prod\limits_{i=1}^{s} P_{k_i}(1)}{\prod\limits_{j=1}^{s} P_{n_j}(1)}, \tag{5}$$

де s *— максимальне значення з кількостей множників у представленні чисел* $|p|$ *та* q *у вигляді відповідних добутків елементарних дільників,* $k_i \in N\bigcup\{0\}$, $n_j \in N\bigcup\{0\}$, $i = \overline{1, s_p}$, $j = \overline{1, s_q}$.

Доведення. Припустимо, що деяке раціональне число $r = p/q$, $p \in Z$, $q \in N$, задане у вигляді (3). Повторюючи процес доведення наслідка 1 леми 1, покладемо $a = 1$. Тоді, використовуючи властивість 5), можна записати усі прості числа представлення у вигляді

$P_i(a) = P_{k_i}(1)$, $k_i \in N\bigcup\{0\}$, $i = \overline{1, s}$, $P_j(a) = P_{n_j}(1)$, $n_j \in N\bigcup\{0\}$, $j = \overline{1, s}$, $s = \max\{s_p, s_q\}$,

при чому $P_i(1) = 1$, $k_i = 0$, $i = \overline{s_p + 1, s}$, якщо $s_p \le s_q$, і $P_j(1) = 1$, $n_j = 0$, $j = \overline{s_q + 1, s}$, у випадку $s_p > s_q$, що і треба було показати.

Лема 2. *Для будь-яких двох простих чисел* $P_k(a)$, $P_n(a)$, $k \le n$, $k \in Z$, $n \in Z$, *з послідовності простих чисел відносно числа* a *та довільного числа* $T \ge 0$ *справедливе співвідношення*

$$\frac{P_k(a) + T}{P_n(a) + T} \ge \frac{P_k(a)}{P_n(a)}. \tag{6}$$

Доведення. Нескладно перевірити, що для будь-яких $k \le n$, $k \in Z$, $n \in Z$ маємо $\dfrac{P_k(a) + T}{P_n(a) + T} - \dfrac{P_k(a)}{P_n(a)} = \dfrac{T(P_n(a) - P_k(a))}{(P_n(a) + T)P_n(a)}$.

Використовуючи властивість 3), отримуємо

$$(P_k(a) + T)/(P_n(a) + T) - P_k(a)/P_n(a) \ge 0,$$

звідки випливає нерівність (5). Лему доведено.

Розглянемо множину невід'ємних раціональних чисел $r(k, n)$, $k \in Z$, $n \in Z$, $0 \le r(k, n) \le 1$, які подаються у вигляді відношення двох простих чисел з послідовності відносно числа $a \ge 0$:

$$r(k, n) = \frac{P_k(a)}{P_n(a)},\ k \le n,\ k \in Z,\ n \in Z. \tag{7}$$

Без обмежень загальності покладемо $a = 0$. При цьому, раціональні числа будуть представлятися у вигляді

$$r(k, n) = \frac{P_k(0)}{P_n(0)},\ k \le n,\ k \in N\bigcup\{0\},\ n \in N\bigcup\{0\}. \tag{8}$$

З урахуванням операції зсуву на m простих чисел у послідовності $P_j(0)$, $j \in Z$, маємо співвідношення

$$r(k + m, n + m) = r(k, n) \circ m,\ m \in N\bigcup\{0\}. \tag{9}$$

Разом із сукупністю $r(k, n)$ введемо до розгляду інші сукупності.

Означення 2. Множину раціональних чисел $r_T(k,n)$, $T \geq 0$, $k \leq n$, $k \in N\bigcup\{0\}$, $n \in N\bigcup\{0\}$, вигляду

$$r_T(k,n) = (P_k(0)+T)/(P_n(0)+T),\ k \leq n,\ k \in N\bigcup\{0\},\ n \in N\bigcup\{0\} \quad (10)$$

назвемо T – послідовністю для множини чисел $r(k,n)$ і заданого $T \geq 0$.

Означення 3. Для заданої множини чисел $r(k,n)$, $k \in N\bigcup\{0\}$, $n \in N\bigcup\{0\}$, і числа $m \in N\bigcup\{0\}$ множину чисел

$$r_*(k+m,n+m) = \frac{P_k(0)\oplus m_*}{P_n(0)\oplus m}, \quad (11)$$

$$k \leq n,\ k \in N\bigcup\{0\},\ n \in N\bigcup\{0\},\ m \in N\bigcup\{0\},$$

де $0 \leq m_* \leq m$ — найбільше ціле число таке, що ${P_k(0)\oplus m}/{P_n(0)\oplus m} \geq$ $\geq {P_k(0)\oplus m_*}/{P_n(0)\oplus m}$, будемо називати нижньою спряженою множиною, а множину чисел

$$r^*(k+m,n+m) = \frac{P_k(0)\oplus m^*}{P_n(0)\oplus m}, \quad (12)$$

$$k \leq n,\ k \in N\bigcup\{0\},\ n \in N\bigcup\{0\},\ m \in N\bigcup\{0\},$$

де $m^* \geq m$ — найменше ціле число таке, що ${P_k(0)\oplus m}/{P_n(0)\oplus m} \leq$ $\leq {P_k(0)\oplus m^*}/{P_n(0)\oplus m}$ — верхньою спряженою множиною.

Для прикладу, однократна композиція ($m = 1$) відношення $r(5,6) = P_5(0)/P_6(0) = 7/11$ дає значення $11/13$. Відповідні значення з нижньої та верхньої спряжених множин подаються числами 7/13, яке не перевищує 11/13, та 11/13, а величини $m_* = 0$, $m^* = 1$. Аналогічні значення для однократної композиції відношення $r(6,7) = 11/13$ визначаються числами 13/17, 13/17, 17/17, $m_* = 1$, $m^* = 2$.

Лема 3. *Справедливі співвідношення:*

$$r(k,n) \leq r_T(k,n), \quad (13)$$

$$r_*(k+m,n+m) \leq r(k+m,n+m), \quad (14)$$

$$r(k+m,n+m) \leq r^*(k+m,n+m), \quad (15)$$

$$r_*(k+m,n+m) \leq r_T(k+m,n+m), \quad (16)$$

для довільних $T \geq 0$, $k \in N\bigcup\{0\}$, $n \in N\bigcup\{0\}$, $k \leq n$, $m \in N\bigcup\{0\}$.

Доведення. Відповідно до леми 2, для довільного числа $T \geq 0$ справедлива нерівність

$$r_T(k,n) = (P_k(0)+T)/(P_n(0)+T) \geq P_k(0)/P_n(0) = r(k,n),$$

і виконуються співвідношення $r(k+m,n+m) = (P_k(0)\oplus m)/(P_n(0)\oplus m) \geq$ $\geq (P_k(0)\oplus m_*)/(P_n(0)\oplus m) = r_*(k+m,n+m)$ та $r(k+m,n+m) =$ $= (P_k(0)\oplus m)/(P_n(0)\oplus m) \leq (P_k(0)\oplus m)/(P_n(0)\oplus m^*) = r^*(k+m,n+m)$, тобто $r_*(k+m,n+m) \le r(k+m,n+m) \le r^*(k+m,n+m)$ для довільних $k \in N\bigcup\{0\}$, $n \in N\bigcup\{0\}$, $k \le n$, та будь-якого $m \in N\bigcup\{0\}$. Таким чином, нерівності (13), (14), (15) доведено.

Нерівність (13) виконується для усіх $k \in N\bigcup\{0\}$, $n \in N\bigcup\{0\}$, $k \le n$. Тоді для будь-якого $m \in N\bigcup\{0\}$ маємо $k+m \le n+m$, звідки для $\forall T \ge 0$ є справедливим співвідношення $r(k+m,n+m) \le r_T(k+m,n+m)$. З урахуванням нерівності (13) остаточно отримуємо $r_*(k+m,n+m) \le \le r_T(k+m,n+m)$, що відповідає нерівності (16).

Наслідок 3. *Для довільних* $T \ge 0$, $k \in N\bigcup\{0\}$, $n \in N\bigcup\{0\}$, $k \le n$ *справедливі співвідношення*

$$r_*(k,n) \le r(k,n), \tag{17}$$

$$r(k,n) \le r^*(k,n), \tag{18}$$

$$r_*(k,n) \le r_T(k,n). \tag{19}$$

Доведення. Справедливість нерівностей (17), (18), (19) є очевидною. Дійсно, покладемо $m=0$ у співвідношеннях (14), (15), (16). В результаті маємо (17), (18), (19) для довільних $T \ge 0, k \in N\bigcup\{0\}$, $n \in N\bigcup\{0\}$, $k \le n$, що і треба було довести.

Зрозуміло, що властивість елементів сукупності у вигляді $0 \le r(k,n) \le \le 1$, зберігається для усіх членів T - послідовності з довільним $T \ge 0$, і елементів нижньої та верхньої спряжених множин:

$$0 \le r_T(k,n) \le 1,\ 0 \le r_*(k+m,n+m) \le 1,\ 0 \le r^*(k+m,n+m) \le 1 \tag{20}$$

для усіх $k \in N\bigcup\{0\}$, $n \in N\bigcup\{0\}$, $k \le n$, та будь-якого $m \in N\bigcup\{0\}$.

З леми 3 та її наслідка можна зробити висновок, що існують співвідношення між відповідними елементами множини $r(k,n)$, $k \in N\bigcup\{0\}$, $n \in \in N\bigcup\{0\}$, $k \le n$, та елементами T — послідовності з довільним $T \ge 0$, нижньої та верхньої спряжених множин. При цьому, на жаль, нічого не можна сказати про співвідношення чисел $r(k,n)$ та $r(k+m,n+m)$ для довільного $m \in N\bigcup\{0\}$.

Запропоноване представлення множини раціональних чисел $r(k,n), k \le \le n$, $k \in Z$, $n \in Z$, та введені операції на послідовності простих чисел у вигляді (1), (2) зручно використовувати при формалізації та дослідженні динаміки величин міри належності нечітких множин [1,2].

Використання простих чисел для визначення міри належності нечітких множин

Означення 4. Нечіткою множиною $\tilde{X}$ універсальної множини X, називається сукупність пар $\tilde{X} = \{(x, \mu_{\tilde{X}}(x))\}$, де $\mu_{\tilde{X}}(x) : X \to [0,1]$ - відображення множини X в одиничний відрізок [0,1], яке називається функцією належності нечіткої множини $\tilde{X}$.

Будемо вважати, що деякий об'єкт у будь-який момент часу може знаходитися у станах $X = \{x_1, ..., x_n\}$ з різними ступенями належності, що задається відповідними нечіткими множинами $\tilde{X}_s, s = 0, 1, 2, ...$, універсальної множини X з деякою функцією належності $\mu_{\tilde{X}_s}(x_i) = \mu_s(x_i)$, $i = \overline{1, n}$, $s = 0, 1, 2, ...$.

Для визначення величини міри належності задамо два довільні значення номерів k та n, $k \in Z$, $n \in Z$, за якими з послідовності простих чисел, що розглядалася вище, знаходяться величини $P_k(a)$, $P_n(a)$ для деякого $a \geq 0$. За допомогою відношення цих значень $r(k, n) = P_k(a)/P_n(a)$ можна визначити величину міри належності елементів $x_1, ..., x_n$ до нечіткої множини $\tilde{X}_s$, $s = 0, 1, 2, ...$ у вигляді:

$$\mu_s(x_i) = P^s_{k_i}(a)/P^s_{n_i}(a),\ k_i \in Z,\ n_i \in Z,\ k_i \leq n_i,\ i = \overline{1, n},\ s = 0, 1, 2, \ldots . \quad (21)$$

Використовуючи операцію кратної композиції відношення простих чисел (2) можна запропонувати схему модифікації величин міри належності. Дійсно, якщо модель динаміки має вигляд

$$\mu_{s+1}(x) = A_s \circ \mu_s(x),\ s = 0, 1, 2, \ldots, \quad (22)$$

то, розглядаючи в якості $A_s, s = 0, 1, 2, ...$, векторні $A_s = (a^s_i)_{i=\overline{1,n}}$ або скалярні $A_s = (a^s_0)$, $s = 0, 1, 2, ...$ цілочислові величини, що визначають збільшення ($a^s_i > 0$, $i = \overline{0, n}$), зменшення ($a^s_i < 0$, $i = \overline{0, n}$) або незмінність ($a^s_i = 0$, $i = \overline{0, n}$) рівнів належності станів системи, динамічний процес можна формалізувати у вигляді

$$\mu_{s+1}(x_i) = A_s \circ \mu_s(x_i),\ \ i = \overline{1, n}, s = 0, 1, 2, \ldots, \quad (23)$$

де $\mu_{s+1}(x_i) = \mu_s(x_i) \circ a^s_i = P^s_{k_i}(a)/P^s_{n_i}(a) \circ a^s_i$, $k_i + a^s_i \geq j^i_0$, $i = \overline{1, n}$, $s = 0, 1, 2, ...$, у випадку векторного представлення коефіцієнтів $A_s = (a^s_i)_{i=\overline{1,n}}, s = 0, 1, 2, \ldots$, та $\mu_{s+1}(x_i) = \mu_s(x_i) \circ a^s_0 = P^s_{k_i}(a)/P^s_{n_i}(a) \circ a^s_0$, $k_i + a^s_0 \geq j^i_0, i = \overline{1, n}$, $s = 0, 1, 2, ...$, у випадку скалярного представлення $A_s = (a^s_0), s = 0, 1, 2, ...$, а величини j^i_0, $i = \overline{1, n}$, — найменші відповідні значення індексів у множині простих чисел, для яких справедлива властивість (7).

Потрібно відмітити конструктивність даного підходу для формалізації та обробки величин мір належності нечітких множин, що знайшло застосування у ряді прикладних задач [3].

Висновки

Таким чином, використання спеціальних послідовностей простих чисел і специфічних операцій над ними дозволяє ефективно вирішувати задачу формалізації міри належності елементів нечітких множин, що було підтверджено рядом практичних прикладів. Запропонована технологія може бути використана в різних задачах підтримки прийняття рішень в нечітких умовах.

Література

1. Zadeh L. A. Fuzzy sets // Inf. Contr. — 1965. — 8. — P. 338–353.
2. Борисов А. Н. Принятия решений на основе нечетких моделей — Рига: Зинатне, 1990. — 184с.
3. Івохін Є. В., Вадньов Д. О. Використання спеціальних множин простих чисел для шифрування методом рюкзака // Тези VI міжнародної конференції "Обчислювальна та прикладна математика"імені І.І.Ляшка. — Київ. — 2013. — С. 126–127.

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна.

Надійшла 30.10.2013