Журнал обчислювальної та прикладної математики | **2013, №4(114)** | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.852:519.876

АНАЛІЗ ЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ МЕТОДОМ ПСЕВДОБАЗИСНИХ МАТРИЦЬ

В. І. Кудін

Резюме. Запропоновано метод аналізу та оптимізації лінійної системи — метод псевдобазисних матриць (МПБМ) на стадіях дооптимізації та оптимізації. Метод грунтується на концепції базисних матриць. В роботі наведено всі необхідні теоретичні обгрунтування для побудови алгоритмічних схем на основі методу. Розглянуто особливості застосування схем релаксування, скорочення розмірності задачі на стадіях оптимізації. Встановлено умови єдиності та неєдиності оптимальних розв'язків.

Вступ

За останні десятиріччя було розроблено багато варіантів сімплекс-методів для розв‘язання задачі лінійного програмування [1–5] як для прямої (канонічної), так і для двоїстої задач. Положення теорії двоїстості Дж. Неймана [1] дали теоретичні узагальнення, що лягли в основу побудови нових методів та алгоритмів. Для подальших застосувань стало важливим не лише "здатність" методу знаходити оптимальні розв'язки, але й проводити аналіз властивостей задачі на різних стадіях обчислень.

В даній роботі запропоновано метод псевдобазисних матриць (МПБМ) для проведення аналізу лінійних систем, зокрема, задач лінійного програмування великої розмірності на стадіях дооптимізації та оптимізації. Встановлено умови оптимальності, несумісності моделі, формули зв'язку елементів алгоритмічних схем у суміжних базисних матрицях, необхідні і достатні умови пасивності обмежень, побудовані різноманітні правила вводу-виводу нормалей обмежень в базисну матрицю. Релаксаційні схеми оптимізаційного аналіза дозволяють замінювати дослідження початкової моделі, можливо великорозмірної, послідовністю оптимізаційних моделей меншої розмірності. Доведено теореми, що встановлюють умови існування, єдиності та неєдиності оптимальних розв‘язків оптимізаційної задачі. Досліджено питання виродженості при розв'язанні задач.
Особливості схеми розв'язку задачі МПБМ такі:
в основі методу лежить ідея псевдобазисної матриці;
при переході до наступного недопустимого опорного розв'язку вводяться в псевдобазисну матрицю і виводяться на ітераціях вектори нормалі обмежень;

збіжність до оптимального розв'язку "іде зверху"за недопустимими вершинами, що називатимуться псевдовершинами, причому від ітерації до ітерації значення цільової функції строго зменшуватиметься (для невиродженої задачі на максимум);
на кожному кроці можливо уточнювать двосторонні оцінки оптимального розв'язку за цільовою функцією;
безпосередньо на ітераціях методу виявляються пасивні та неактивні обмеження;
передбачено визначення, як наближених так, і точних розв'язків задачі лінійного програмування;
застосування процедур релаксації дає змогу, при невеликих затратах на їх реалізацію, значно скоротити розмірність базової задачі при розрахунках.

Основні теоретичні положення методу псевдобазисних матриць

Розглядається, як базова, модель лінійного програмування вигляду:

$$\max Bu, \tag{1}$$

$$Au \leq C, \tag{2}$$

$$d_H \leq u \leq d_B, \tag{3}$$

де $B = (b_1, b_2, ..., b_m)$, $C = (c_1, c_2, .., c_n)^T$, $u = (u_1, u_2, .., u_m)^T$,
$a_j = (a_{j1}, a_{j2}, ..., a_{jm})$, $j = \overline{1,n}$ — рядки матриці A^T,
$d_H = (d_{1(H)}, d_{2(H)}, ..., d_{m(H)})^T$, $d_B = (d_{1(B)}, d_{2(B)}, ...d_{m(B)})^T$ m–вимірні вектори, T — знак транспонування. Будемо вважати, що $n > m$, а множина допустимих розв'язків (2) обмежена, замкнена. Модель (1)–(3) досліджується в евклідовому просторі E^m. Відкинемо частину обмежень (2), залишимо лише m із них, які утворять квадратну матрицю $A_б$, тобто розглянемо модель вигляду

$$\max_u \left\{ Bu / A_б u \leq C^0 \right\},$$

де $C^0 = (c_{i_1}, c_{i_2}, ..., c_{i_m})^T \subset C$ — підвектор С, який утворений компонентами обмежень, які входять у $A_б$, відповідно, $J_b = \{i_1, i_2, ..., i_m\}$ — множина індексів таких обмежень. Припустимо, що матриця $A_б$ невироджена, а задача має обмежений розв'язок u_0. Розв'язок задачі u_0 може бути недопустимим для релаксованих (відкинутих) обмежень, причому $U \subseteq U_R$, де U_R — релаксована (розширена) множина обмежень (2), утворена відкиданням деяких обмежень. Нехай e_{ri} — елементи матриці $A_б^{-1}$, оберненої до $A_б$;
$u_0 = (u_{01}, u_{02}, ..., u_{0m})^T$ — розв'язок; $\alpha_r = (\alpha_{r1}, \alpha_{r2}, ..., \alpha_{rm})$ — вектор розкладення нормалі обмеження $a_r u \leq c_r$ за рядками псевдобазисної матриці $A_б$, тобто $a_r = \alpha_r A_б$; $\alpha_0 = (\alpha_{01}, \alpha_{02}, ..., \alpha_{0m})$ — вектор розкладення вектора-градієнта цільової функції (1) за рядками базисної матриці $A_б$, який визначається, як розв'язок системи рівнянь $B = \alpha_0 A_б$; $\Delta_r = a_r u_0 - c_r$ — нев'язка r-го обмеження (1) у вершині u_0; J_b, J_H $(J = J_b \bigcup J_H)$ — множини індексів, відповідно базисних і небазисних обмежень (2). Введені величини (елементи методу) в новій базисній матриці $\overline{A}_б$, яка утворюється заміною рядка

a_k на a_l, що не входить у базисну матрицю $A_б$ будемо позначати рискою зверху, тобто $\overline{\alpha}_r$, $\overline{\Delta}_k, \overline{e}_{ri}$, $\overline{\alpha}_0$.

Означення 1. Підматрицю $A_б$, складену із m лінійно незалежних нормалей обмежень (2), будемо називати псевдобазисною, а розв'язок u_0 псевдобазисним, якщо $\alpha_{0i} \geq 0$, $i = \overline{1,m}$. Псевдобазисний розв'язок u_0 будемо вважати невиродженим, якщо $\neg\exists\, u_0^{'} \neq u_0$, $Bu_0 = Bu_0^{'}$, де $Bu = Bu_0$ — гіперплощина рівня цільової функції в u_0.

Означення 2. Дві псевдобазисні матриці, в яких відмінний один, наприклад, к-й рядок будемо називати суміжними.

Теорема 1. *Між елементами методу в двох суміжних псевдобазисних матрицях мають місце такі співвідношення:*

$$\bar{a}_{rk} = \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}},\ \overline{\alpha}_{ri} = \alpha_{ri} - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li},\ \ r = \overline{0,n};\ i = \overline{1,m};\ i \neq k; \tag{4}$$

$$\overline{e}_{rk} = \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}},\ \ \overline{e}_{ri} = e_{ri} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li},\ \ r = \overline{1,m};\ \ i = \overline{1,m};\ i \neq k; \tag{5}$$

$$\overline{u}_{0j} = u_{0j} - \frac{e_{jk}}{\alpha_{lk}}\Delta_l,\ j = \overline{1,m}, \tag{6}$$

$$\overline{\Delta}_k = -\frac{\Delta_l}{\alpha_{lk}},\ \ \overline{\Delta}_r = \Delta_r - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}\Delta_l,\ \ r = \overline{1,n};\ r \neq k; \tag{7}$$

$$B\overline{u}_0 = Bu_0 - \frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}}\Delta_l, \tag{8}$$

причому умовами: псевдобазисності матриці при вводі вектору нормалі a_l k-м рядком псевдобазисної матриці $A_б$ є виконання $\alpha_{lk} \neq 0$; псевдобазисності розв'язків є $\alpha_{lk} > 0$, спадання цільової функції в новій псевдобазисній матиці при задачі на максимум є $\Delta_l > 0$.

Доведення теореми розглянуто в [3].

Означення 3. Допустимий псевдобазисний розв'язок u_0 є оптимальним, якщо $B\overline{u}_0 - Bu \geq 0$ для всіх u, що задовольняють (2).

Теорема 2. *Допустимість псевдобазисного розв'язку u_0, тобто виконання $\Delta_r \leq 0$, $r \in J$ є необхідною і достатньою умовою його оптимальності, при цьому $\alpha_{0i} > 0$, $i = \overline{1,m}$.*

Наслідок 1. *Якщо $\alpha_{0k} \geq 0$, $k = \overline{1,m}$, то псевдобазисний розв'язок u_0 є оптимальним при $\Delta_r \leq 0$, $r \in J$. Проміжні неоптимальні розв'язки є верхніми оцінками за значеннями цільової функції.*

Наслідок 2. *Для єдиності розв'язку задачі (1), (2) необхідно і достатньо, щоб для вектора розкладення нормалі B за рядками $A_б$ виконувалось $\alpha_{0k} \geq 0$, $k = \overline{1,m}$.*

Наслідок 3. *Умовою неєдиності розв'язків задачі (1), (2) є $\exists$ індексів (серед компонент розкладення вектора нормалі B) таких, що $\alpha_{0i} = 0$.*

Наслідок 4. *Неєдині розв'язки задачі (1), (2) утворюють необмежену замкнену множину при* $\exists\ i$, *що* $\alpha_{0i} = 0$ *і при цьому* $\alpha_{ki} > 0$, *для* $k \notin J_б$.

Наслідок 5. *Якщо існує індекс* k *такий, що* $\alpha_{0k} < 0$ *і* $\alpha_{rk} > 0$, $r \in J_H$, *то цільова функція задачі необмежена на множині допустимих розв'язків.*

Наслідок 6. *Номера* k, $k \in I$ *такі, що* $\alpha_{0k} = 0$ *утворюють ребра неєдиності розв'язків задачі (1), (2) причому при виконанні умови* $j \in J_H$ *таких, що* $\alpha_{jk} < 0$ *маємо обмежену замкнену множину (двосторонньо обмежене ребро), а за умови виконання* $\alpha_{jk} > 0$ *для* $j \in J_H$ *має місце необмеженість ребра–променя, що є необмеженою множиною вимірності 1.*

Нехай $U = \{u/a_j u \le c_j,\, j \in J\}$, $U_r = \{u/a_j u \le c_j,\ j \in J,\ j \ne r\}$,

$$U^0 = \{u_0/Bu_0 = \max_{u \in U} Bu, u \in U\},\ U_r^0 = \{u_0/Bu_0 = \max_{u \in U_r} Bu, u \in U_r\}.$$

Означення 4. Обмеження $a_r u \le c_r$ пасивне, якщо $U = U_r$.

Означення 5. Обмеження $a_r u \le c_r$ породжуюче нерозв'язність за несумісністю U, якщо $U = \varnothing$, $\ U_r \ne \varnothing$.

Теорема 3. *Для того, щоб обмеження* $a_r u \le c_r$ *було пасивним необхідно і достатньо існування псевдобазисної матриці* $A_б$, *відносно якої* $\alpha_{rk} \ge 0$, $k = \overline{1,m}$ *та* $\Delta_r = a_r u_0 - c_r \le 0$, *де* u_0 *— псевдобазисний розв'язок.*

Теорема 4. *Для того щоб* $B\overline{u}_0 < Bu_0$, *а розв'язок* $\overline{u}_0$ *був псевдобазисним для задачі (1), (2) необхідно і достатньо існування такого номера* l *та відповідного номера* k, *для яких виконується нерівність* $\frac{\alpha_{0i}}{\alpha_{li}} \ge \frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}}$, $i \ne k$, $\alpha_{li} > 0$, $\Delta_l > 0$.

Теорема 5. *Для того, щоб обмеження* $a_r u \le c_r$ *було породжуючим нерозв'язність за несумістністю необхідно і достатньо існування псевдобазисної матриці* A_b, *відносно якої* $\alpha_{ri} \le 0$, $\ i = \overline{1,m}$ *та* $\Delta_r = a_r u_0 - c_r > 0$, *де* u_0 *— псевдобазисний розв'язок.*

Доведення теорем 2—5 наведено в [4].

Приведені вище теореми та наслідки охоплюють всі можливі випадки для "організації роботи" МПБМ:

1. Якщо існує псевдобазисна матриця A_b, що для компонент розкладу вектора нормалі цільової функції виконується $\alpha_{0k} \ge 0$, $k = \overline{1,m}$, $\Delta_r \le 0$, $r \in J$, то дана псевдобазисна матриця та псевдобазисний розв'язок є оптимальними. При $\alpha_{0k} > 0$, $k = \overline{1,m}$ розв'язок єдиний. При $\exists\, r$ такого, що $\alpha_{0r} = 0$, розв'язок неєдиний. Характер неєдиності визначається наслідками теореми 2.
2. Якщо існує псевдобазисна матриця $A_б$, індекс l, що $\Delta_l > 0$, для якого $a_{li} > 0$ та індекс k такий, що $-\frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}} = \min\limits_{\substack{i,\\ \alpha_{li} > 0}} \frac{\alpha_{0i}}{\alpha_{li}}$, то при заміні рядка k на нормаль обмеження l нова матриця $\overline{A}_б$ буде псевдобазисною. При цьому можна перейти до нового псевдобазисного розв'язку, в якому цільова функція зменшиться на $-\frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}}\Delta_l$.

3. Якщо існує $A_б$, в якому $a_{0k} \geq 0$, $k = \overline{1,m}$, $a_r u_0 \leq c_r$, де u_0 псевдовершина, що відповідає $A_б$, то обмеження $a_r u \leq c_r$ пасивне і може бути виключене із обчислень.
4. Існування для псевдобазисної матриці $A_б$ обмеження $a_r u \leq c_r$, $r \in J$, що $\alpha_{ri} \leq 0$, $i = \overline{1,m}$ та $\Delta_r = a_r u_0 - c_r > 0$ є умовою нерозв'язності за несумісністю (1)–(2).
Встановлено існування регуляризуючого збурення за схемою МПБМ з властивістю невиродженості псевдобазисних розв‘язків задачі (1), (2), тобто побудовано ε-задачу

$$\max_u B(\varepsilon)u, \tag{9}$$

$$a_j u \leq c_j \qquad (10),$$

$$u \geq 0,\ \varepsilon \geq 0,\ j \in J, \tag{11}$$

для якої справедливо

Теорема 6. *Існує таке $\varepsilon_1 > 0$, що ε-задача при $o < \varepsilon < \varepsilon_1$ буде невиродженою.*

Теорема 7. *Існує таке $\varepsilon_2 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$ оптимальний псевдобазисний розв'язок ε-задачі буде оптимальним для задачі (1), (2).*

Доведення теорем 6–7 наведено в [4].

Схема релаксаційного методу проведення оптимізаційного аналізу лінійної системи може бути представлена алгоритмом:

АЛГОРИТМ

Крок 1. На основі псевдобазисного розв'язку u_0 та псевдобазисної матриці A_b формуємо J_b, $J_H \subset J$ — множини базисних та небазисних обмежень, $J = J_b \cup J_H$.

Крок 2. На основі u_0 утворимо множину J_R, а саме $J_R = J_b \bigcup J_H^+$, де $J_H^+ = \{\ \mathrm{j} /\ \mathrm{j} \in J_H,\ \ \Delta_\mathrm{j} > 0\}$ (схема допускає введення допоміжного обмеження на потужність елементів множини J_H^+) .

Крок 3. Формуємо підзадачу

$$\max \mathrm{Bu}, \tag{12}$$

$$a_j u \leq b_{j,},\ \ j \in J_R. \tag{13}$$

Крок 4. Знаходимо розв'язок $\bar{u}_0$ задачі (12), (13) МПБМ.

Крок 5. Якщо множина $\mathrm{J}_\mathrm{H}^+ \neq \varnothing$ відносно $\bar{u}_0$, то $u_0 = \bar{u}_0$ і переходимо на **Крок 2**, в протилежному — на **Крок 6.**

Крок 6. Якщо $\mathrm{J}_\mathrm{H}^+ = \varnothing$, то це означає оптимальність $\bar{u}_0$ для (2).
Завершення роботи алгоритму.

Висновок

За побудовою, релаксаційна схема коректно вписується в МПБМ, що дає змогу замінити дослідження початкової, можливо, великорозмірної задачі послідовністю взаємозв'язаних задач меншої розмірності, а в ході ітераційного процесу ідентифікувати пасивні обмеження системи.

Література

1. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования. В 2-х т. Т. 1 — М:, 1991. — 380 с.
2. Черников С. Н. Линейные неравенства. — М. — 1968. — 488 с.
3. Кудин В. И., Ляшко С. I., Хритоненко Н. М., Яценко Ю. П. Анализ свойств линейной системы методом искусственных базисних матриц. // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — №4 — С. 119–127.
4. Волкович В. Л., Войналович В. М., Кудин В. И. Релаксационная схема строчного симплекс метода // Автоматика. — 1987. — №4 — С. 79–86.
5. Кудін В. І., Ляшко С. І., Хритоненко Н. М., Яценко Ю. П. Метод штучних базисних матриць // Доповіді НАН України. — 2007. — № 9. — С. 29–33.
6. Богаенко В. А., Скопецкий В. В., Кудин В. И. О вычислительной эффективности схем метода базисных матриц // Праці міжнародного симпозіуму Питання оптимізації обчислень (ПОО–XXXV). Кацивелі 24–29 вересня 2009 р. — Т. 1. — Київ. — 2009. — С. 68–72.
7. Богаенко В. А., Скопецкий В. В., Кудин В. И. Анализ компьютерных схем метода базисных матриц. // Компьютерная математика — 2009. — №2. — С. 3–13.
8. Богаенко В. А., Кудин В. И. О свойствах параллельных вычислительных схем метода базисных матриц // Математичне та комп'ютерне моделювання. — Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. — 2009. — Вип. 2. — С. 3–14.

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна.

Надійшла 01.09.2013