Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2013, №4(114) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.21

ЗБІЖНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ТА МОМЕНТІВ ВИХОДУ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗІ СМУГИ У ДИФУЗІЙНИХ МОДЕЛЯХ ЗІ СТРИБКАМИ

А. Г. Мороз, В. В. Томашик

Резюме. В роботі розглянуто дифузійну модель зі стрибками, що задається стохастичним диференційним рівнянням зі скінченною пуасонівською мірою, коефіцієнти якого залежать від параметра. Доведено, що при збіжності коефіцієнтів збігаються як розв'язок рівняння, так і моменти його виходу зі смуги.

Вступ

Дифузійні моделі зі стрибками мають широкі застосування, особливу роль вони відіграють в моделюванні цінових процесів на фондовому ринку та процесів ризику. Тому дослідження, пов'язані з подібними моделями, які задаються стохастичними диференціальними рівняннями (СДР), що містять стрибки, є вкрай актуальними. Для дифузійних моделей зі стрибками поширеною є ситуація, коли оптимальна стратегія для інвестора задається моментом виходу на певний рівень (див., наприклад, [7], [8]).

Звичайною ситуацією на практиці є, коли коефіцієнти рівняння, яке задає модельований процес, не є відомими й оцінюються за допомогою певних наближених методів. У такій ситуації маємо справу з наближеним рівнянням, коефіцієнти якого близькі до коефіцієнтів рівняння, що задає модельований процес. Таким чином, треба гарантувати, по-перше, щоб розв'язок наближеного рівняння був близьким до розв'язку вихідного рівняння, по-друге, щоб близькими були оптимальні стратегії, які задаються моментами виходу зі смуги. З огляду на це, у даній роботі встановлено умови, які гарантують збіжність розв'язків рівнянь зі стрибками та моментів виходу цих розв'язків зі смуги у разі збіжності коефіцієнтів. Як допоміжний результат, отримано стійкість моментів виходу по відношенню до меж смуги. Цей результат представляє окремий інтерес, оскільки рівняння, що задають межі смуги, вихід з якої є оптимальною стратегією для інвестора, вкрай рідко можна розв'язати точно.

Питання збіжності розв'язків рівнянь зі стрибками розглядалося у статтях [9], [10] та у багатьох підручниках, наприклад [11], [12]. Новизною даної роботи є те, що ми не накладаємо на коефіцієнти рівняння умову Ліпшиця, використовуючи натомість умову Ямада. Це дозволяє розглядати рівняння типу Кокса-Інгерсолла-Росса, які часто виникають у фінансовому моделюванні.

Стаття має таку структуру. У першому розділі визначений основний об'єкт дослідження та наведено припущення. У другому розділі наведено результати для рівнянь без стрибків, які використовуються для доведення основних результатів. У третьому розділі встановлено збіжність розв'язків СДР зі стрибками, а у четвертому розділі — збіжність моментів виходу зі смуги.

1. Основний об'єкт та припущення

Нехай $(\Omega, F, \{F_t, t \geq 0\}, P)$ — повний імовірнісний простір з фільтрацією, що задовольняє звичайні умови.

Розглянемо послідовність стохастичних диференціальних рівнянь

$$X_n(t) = X_n(0) + \int_0^t b_n(s, X_n(s))ds + \int_0^t \sigma_n(s, X_n(s))dW(s)+ \\ + \int_0^t \int f_n(s, X_n(s), \theta)\mu(d\theta, ds), n \geq 0, t \geq 0, \tag{1}$$

де початкові умовами $X_n(0)$ є F_0-вимірними; коефіцієнти $b_n, \sigma_n : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є вимірними, $\{W(t), t \geq 0\}$ – вінерів процес відносно фільтрації $\{F_t, t \geq 0\}$; міра $\mu(d\theta, dt)$ є пуассонівською мірою, для якої $E\mu(d\theta, dt) = \nu(d\theta)dt$, причому $\nu(\mathbb{R}) < \infty$.

Ми накладатимемо такі припущення щодо коефіцієнтів та початкових умов рівнянь (1):

($\mathrm{Y}1_n$) для всіх $\gamma > 0$ $\sup_{n\geq 1} E[|X_n(0)|^\gamma] < \infty$;

($\mathrm{Y}2_n$) неперервність коефіцієнтів b_n та σ_n за сукупністю змінних;

($\mathrm{Y}3_n$) лінійне зростання коефіцієнтів:

$$|b_n(t, x)| + |\sigma_n(t, x)| \leq L(1 + |x|^2), t \geq 0, x \in \mathbb{R};$$

($\mathrm{Y}4_n$) умова Ліпшиця на коефіцієнт b_n:

$$|b_n(t, x) - b_n(t, y)| \leq L\,|x - y|\,, t \geq 0, x, y \in \mathbb{R};$$

($\mathrm{Y}5_n$) умова Ямада: існує така строго зростаюча функція $\rho_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, що $\int_{0+} \rho_n^{-2}(u)du = \infty$ та виконується нерівність

$$|\sigma_n(t, x) - \sigma_n(t, y)| \leq \rho_n(|x - y|),\ t \geq 0,\ x, y \in \mathbb{R};$$

($\mathrm{Y}6_n$) коефіцієнт $f_n(s, x, \theta)$ – неперервний по x для всіх s та майже всіх θ за мірою $\nu(d\theta)$;

($\mathrm{Y}7_n$) обмеженість коефіцієнта f_n:

$$|f_n(t, x, \theta)| < L;$$

($\mathrm{Y}8_n$)

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n(t, x, \theta - f_n(t, x, \theta|^2\,\nu(d\theta) \leq L\,|x_1 - x_2|^2\,.$$

Щодо збіжності припускатимемо таке:

($\mathrm{U}1_n$) для всіх $\gamma > 0$ має місце збіжність початкових умов

$$E[X_n(0) - X_0(0)]^\gamma \to 0, n \to \infty;$$

($\mathrm{U2}_n$) для всіх $t > 0,\ x \in \mathbb{R}$ має місце збіжність коефіцієнтів

$$b_n(t,x) \to b_0(t,x),\ \sigma_n(t,x) \to \sigma_0(t,x),\ n \to \infty;$$

($\mathrm{U3}_n$) для всіх $t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R}$ має місце збіжність коефіцієнтів

$$f_n(t, X_n(s), \theta) \to f_0(t, X_n(s), \theta),\ n \to \infty.$$

2. Допоміжні результати для рівнянь без стрибків

Наведемо результати для рівнянь без стрибків, а саме для

$$Z_n(t) = Z_n(0) + \int_0^t b_n(s, Z_n(s))ds + \int_0^t \sigma_n(s, Z_n(s))dW(s),\ n \geq 0,\ t \geq 0. \quad (2)$$

Наступний результат щодо збіжності розв'язків СДР (2) без пуассонівської міри є узагальненням результату, отриманого в [1] при випадкових початкових умов.

Теорема 1. *Нехай для послідовності стохастичних диференціальних рівнянь (2) виконуються умови* ($\mathrm{Y1}_n$)–($\mathrm{Y5}_n$) *та* ($\mathrm{U1}_n$)–($\mathrm{U2}_n$)*. Тоді має місце така збіжність*

$$E[|Z_n(t) - Z_0(t)|] \to 0, n \to \infty,$$

що виконується рівномірно на скінченних відрізках.

Доведення. Даної теорема доводиться аналогічно [1]. □

Аналогічно до того, як це зроблено в [2], можна встановити такий результат щодо рівномірної збіжності за ймовірністю розв'язків СДР (2) без пуассонівскої міри до граничного процесу.

Теорема 2. *Нехай виконано умови* ($\mathrm{Y1}_n$)–($\mathrm{Y5}_n$) *та* ($\mathrm{U1}_n$)–($\mathrm{U2}_n$)*. Тоді для* $T > 0,\ \varepsilon > 0$ *має місце збіжність*

$$P\left(\sup_{t\in[0,T]} |Z_n(t) - Z_0(t)| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0,\ n \to \infty.$$

Наслідок 1. *Якщо виконано припущення попередньої теореми, то для довільного* $\gamma > 0$

$$\mathbf{E}\left(|Z_n(t) - Z_0(t)|\right)^\gamma \longrightarrow 0,\ n \to \infty.$$

Доведення випливає з теореми та рівномірної інтегрованості послідовності $\{|Z_n(t) - Z_0(t)|\},\ n \geqslant 1$.

Під моментами виходу зі смуги $[l, r] : l,\ r \in \mathbb{R},\ l < r$ процесів $Z_n(t)$ та $Z_0(t)$ будемо розуміти такі моменти виходу

$$\tau_{Z_n}^{[l,r]} = \inf\{t \in [0, \infty) : Z_n(t) \notin [l, r]\},\ n \geq 0.$$

Має місце таке твердження [4].

Лема 1. *Нехай для процесів* $Z_n(t)$ *виконано умови* $(Y1_n)$–$(Y5_n)$*.*

(a) Якщо $\int_{-\infty}^0 \exp\left(-\int_0^y \frac{2b_n(z)}{\sigma_n^2(z)}dz\right)dy = \infty$*, то*

$$P(\sup_{t>0} Z_n(t) = +\infty) = 1,\ n \geq 0.$$

(б) Якщо $\int_0^\infty \exp\left(-\int_0^y \frac{2b_n(z)}{\sigma_n^2(z)}dz\right)dy = \infty$, *то*

$$P(\inf_{t>0} Z_n(t) = -\infty) = 1,\ n \geq 0.$$

Тобто за виконання однієї з умов попередньої леми $\tau_{Z_n}^{[l,r]} < \infty$ майже напевне для кожного $n \geq 0$ [5].

Теорема 3. *Нехай виконано умови* $(Y1_n) - (Y4_5)$ *та одну з умов леми 1. Тоді має місце збіжність за ймовірністю*

$$\tau_{Z_0}^{[l-\delta,r+\delta]} \longrightarrow^P \tau_{Z_0}^{[l,r]},\ \delta \longrightarrow 0+,$$

$$\tau_{Z_0}^{[l+\delta,r-\delta]} \longrightarrow^P \tau_{Z_0}^{[l,r]},\ \delta \longrightarrow 0+ .$$

Доведення. Не обмежуючи загальності доведення проведемо лише для першої збіжності. Другу збіжність можна довести аналогічним чином.

Очевидно, що $\tau_{Z_0}^{[l-\delta,r+\delta]} \geq \tau_{Z_0}^{[l,r]}$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\tau_{Z_0}^{[l-\delta,r+\delta]} - \tau_{Z_0}^{[l,r]}\right| > \varepsilon\right) \leq$$

$$\leq P\left(\left|\tau_{Z_0}^{[l-\delta,r+\delta]} - \tau_{Z_0}^{[l,r]}\right| > \varepsilon, Z_0(\tau_{Z_0}^{[l,r]}) = l\right) + P\left(\left|\tau_{Z_0}^{[l-\delta,r+\delta]} - \tau_{Z_0}^{[l,r]}\right| > \varepsilon, Z_0(\tau_{Z_0}^{[l,r]}) = r\right).$$

Розглянемо першу ймовірність

$$P\left(\left|\tau_{Z_0}^{[l-\delta,r+\delta]} - \tau_{Z_0}^{[l,r]}\right| > \varepsilon, Z_0(\tau_{Z_0}^{[l,r]}) = l\right) = P\left(\tau_{Z_0}^{[l-\delta,r+\delta]} > \tau_{Z_0}^{[l,r]} + \varepsilon, Z_0(\tau_{Z_0}^{[l,r]}) = l\right) \leq$$

$$\leq P\left(\min_{t\in[\tau_{Z_0}^{[l,r]}, \tau_{Z_0}^{[l,r]}+\varepsilon]} Z_0(t) \geq l-\delta, Z_0(\tau_{Z_0}^{[l,r]}) = l\right) = P\left(\min_{t\in[0,\varepsilon]} Z_0(t) \geq l-\delta, Z_0(0) = l\right),$$

де використали строго марковську властивість.

За монотонністю ймовірності можна записати, що

$$\lim_{\delta\longrightarrow 0+} P\left(\min_{t\in[0,\varepsilon]} Z_0(t) \geq l-\delta, Z_0(0) = l\right) = P\left(\min_{t\in[0,\varepsilon]} Z_0(t) \geq l, Z_0(0) = l\right).$$

Оскільки коефіцієнт дифузії в точці l є додатним, то за властивостями дифузійних процесів [5] має місце $P\left(\min_{t\in[0,\varepsilon]} Z_0(t) \geq l, Z_0(0) = l\right) = 0$. Теорему доведено. □

3. Збіжність розв'язків СДР зі стрибками.

Тепер повернемось до стохастичного диференціального рівняння (1) зі скінченними пуассонівськими мірами. Позначимо через $\tau_i, i > 0$ – i-тий момент стрибків процесу Пуассона $\mu(\Theta, [0,t])$.

Наступний результат стосується рівномірної інтегровності процесу X_n.

Лема 2. *Нехай коефіцієнти стохастичного диференціального рівняння* (1) *задовольняють умови* ($\mathrm{Y}1_n$)–($\mathrm{Y}7_n$). *Тоді існує така стала* C, *незалежна від* n, *що для всіх* $t \geq 0$ *та* $\gamma > 0$

$$E\,|X_n(t)|^\gamma < [E\,|X_n(0)|^\gamma + C \cdot t] \cdot \exp\,[C \cdot t].$$

Доведення. Зауважимо, що достатньо довести лему для всіх $\gamma = 2p,\ p \in N$.

Нехай $R > 0$ — фіксоване.

Введемо такі позначення $A_{R,t} := \{\sup_{[0,t]} |X_n(s)| \leq R\}, 1_t := 1_{A_{R,t}}$. Запишемо такі оцінки

$$E[X_n(t)^{2p}1_t] \leq C_p\Bigg(E[X_n(0)^{2p}] + E\left[\left(\int_0^t b_n(X_n(s))ds\right)^{2p} 1_t\right] +$$
$$+E\left[\left(\int_0^t \sigma_n(X_n(s))dW(s)\right)^{2p} 1_t\right] +$$
$$+E\left[\left(\int_0^t \int f_n(s, X_n(s), \theta)\widetilde{\mu}(d\theta, ds)\right)^{2p} 1_t\right] +$$
$$+E\left[\left(\int_0^t \int f_n(s, X_n(s), \theta)\nu(d\theta)ds\right)^{2p} 1_t\right]\Bigg) =$$
$$= C_p(A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5),$$

де C_p — деяка стала, що залежить лише від p, а $\widetilde{\mu}(d\theta, ds)=\mu(d\theta, ds)-\nu(d\theta)ds$ — компенсована пуассонівська міра.

Оцінимо кожен з доданків окремо.

$$A_1 \leq C_p \int_0^t E((1 + X_n(s)^{2p})1_s)ds \leq$$
$$\leq C_p(t + \int_0^t E(X_n(s)^{2p}1_s)ds),$$

де використали нерівність Ієнсена та лінійне зростання коефіцієнта переносу. Далі,

$$A_2 \leq E\left[\left(\int_0^t \sigma_n(X_n(s))1_s dW(s)\right)^{2p}\right] \leq$$
$$\leq C_p \int_0^t E((1 + X_n(s)^{2p})1_s)ds \leq C_p(t + \int_0^t E(X_n(s)^{2p}1_s)ds),$$

де використано властивість ізометрії стохастичного інтегралу по вінерівському процесу.

Для доданку A_4 використаємо оцінки з [6].

$$A_4 \leq C_p E[\left(\int_0^t \int f_n(s, X_n(s), \theta)^2 1_s \nu(d\theta)ds\right)^p +$$
$$+ \int_0^t \int f_n(s, X_n(s), \theta)^2 1_s \nu(d\theta)ds] \leq C_p t.$$

Нарешті, використовуючи обмеженість коефіцієнта f_n, маємо

$$A_5 \leq C_p t.$$

Отже, маємо оцінку

$$E(X_n(t)^{2p} 1_t) \leq C_p[E(X_n(0)^{2p}) + t + \int_0^t E(X_n(s)^{2p} 1_s) ds].$$

За лемою Гронуолла

$$E(X_n(t)^{2p} 1_t) \leq C_p[E(X_n(0)^{2p}) + t] \exp[C_p \cdot t],$$

звідки, спрямувавши R до $+\infty$, отримаємо результат леми. □

Поширимо результат теореми 2 на випадок процесів $\{X_n, n \geq 0\}$ зі стрибками, що є розв'язками СДР (1).

Теорема 4. *Нехай виконано умови* (Y1$_n$)–(Y8$_n$) *та* (U1$_n$)–(U3$_n$)*. Тоді для* $T > 0,\ \varepsilon > 0$ *має місце збіжність*

$$P\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_n(t) - X_0(t)| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0,\ n \to \infty.$$

Доведення. Оскільки $P(\lim_{k\to\infty} \tau_k = \infty) = 1$, то для доведення теореми достатньо показати, що для всіх k

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{0\leq t<\tau_k\wedge T} |X_n(t) - X_0(t)| > \varepsilon\right) = 0.$$

Для доведення попереднього співвідношення застосуємо метод математичної індукції за параметром k. На проміжку $[\tau_k, \tau_{k+1})$ процес $X_n(t)$ співпадає з виродженим процесом $X_n^*(t)$ без стрибків

$$X_n^*(t) = X_n^*(\tau_k) + \int_{\tau_k}^t b_n(s, X_n^*(s)) ds + \int_{\tau_k}^t \sigma_n(s, X_n^*(s)) dW(s). \quad (3)$$

(а) *База індукції.* База індукції забезбечується тим, що на проміжку $[0, \tau_1 \wedge T)$ з теореми 2 випливає рівномірна збіжність за ймовірністю процесів X_n^*, що на даному проміжку збігаються з процесами X_n.

(б) *Припущення індукції.* Припустимо, що $X_n(t) \overset{P}{\rightrightarrows} X_0(t),\ n \to \infty$ на $[0, \tau_k \wedge T)$. Зауважимо, що якщо $\tau_k > T$, то інтервал $[0, \tau_k \wedge T) \equiv [0, \tau_{k+1} \wedge T)$ й індуктивний крок виконується автоматично. Тому надалі припускаємо, що $\tau_k < T$ майже напевне.

(в) *Індуктивний крок.*

Можна записати таку рівність для деякого $\varepsilon > 0$

$$P(\sup_{0\leq t<\tau_{k+1}\wedge T} |X_n(t) - X_0(t)| > \varepsilon) =$$

$$= P(\sup_{0\leq t<\tau_{k+1}\wedge T} |X_n(t) - X_0(t)| > \varepsilon, \tau_k \leq T) +$$

$$+ P(\sup_{0\leq t<\tau_{k+1}\wedge T} |X_n(t) - X_0(t)| > \varepsilon, \tau_k > T).$$

Останній доданок за припущенням індукції прямує до нуля при $n \longrightarrow \infty$, тому зосередимось на першому доданку.

Нехай $\tau_k \le T$. З припущення індукції випливає, що для всіх $\varepsilon > 0$

$$P\left(|X_n(\tau_k-) - X_0(\tau_k-)| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0, \ n \to \infty.$$

Легко бачити, що в момент стрибка τ_k процес X_n набуває нового значення

$$X_n(\tau_k) = X_n(\tau_k-) + f_n(\tau_k, X_n(\tau_k-), \theta_k).$$

Таким чином, можна записати таку нерівність

$$|X_n(\tau_k) - X_0(\tau_k)| \le$$

$$\le |X_n(\tau_k-) - X_0(\tau_k-)| + |f_n(\tau_k, X_n(\tau_k-), \theta_k) - f_0(\tau_k, X_0(\tau_k-), \theta_k)|.$$

З рівномірної збіжності за імовірністю $X_n(\tau_k-)$ до $X_0(\tau_k-)$, неперервності коефіцієнтів f_n та збіжності $(U3_n)$ випливає, що для всіх $\varepsilon > 0$

$$P\left(|X_n(\tau_k) - X_0(\tau_k)| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0, \ n \to \infty.$$

Додавши до попереднього результату нерівність $\sup_{n\ge 0, t\in[0,T]} E\,|X_n(t)|^{2p} < \infty$, $p > 1$, що є наслідком леми (2), отримаємо збіжність

$$E[|X_n(\tau_k) - X_0(\tau_k)|] \to 0, \ n \to \infty$$

та оцінку $\sup_{n\ge 0} E[|X_n(\tau_k)|^{2p}] < \infty$ для всіх $p > 1$. Застосувавши теорему 2 на проміжку $[\tau_k, \tau_{k+1} \wedge T)$ отримаємо, що $X_n^*(t) \overset{P}{\rightrightarrows} X_0^*(t), \ n \to \infty$ на $[\tau_k, \tau_{k+1} \wedge T)$, а разом з припущенням індукції отримуємо збіжність $X_n(t) \overset{P}{\rightrightarrows} X_0(t), \ n \to \infty$ на $[0, \tau_{k+1} \wedge T)$.

Це завершує доведення теореми. $\square$

4. Збіжність моментів виходу для рівнянь зі стрибками

Одержимо аналогічні результати для випадків, коли процеси X_n є розв'язками системи диференціальних рівнянь (СДР) з пуассонівською мірою та неліпшіцевою дифузією.

Означення 1. Введемо, як і раніше, такі *моменти виходу*:

$$\tau_{X_n,T}^{[l,r]} = \inf\{t \ge 0 : X_n(t) \notin [l,r]\} \wedge T, \ n \ge 0.$$

Означення 2. Під *моментами виходу зі смуги* $[l,r] : l, \ r \in \mathbb{R}, \ l < r$ процесів $X_n(t)$ та $X_0(t)$ будемо розуміти такі моменти виходу

$$\tau_{X_n}^{[l,r]} = \inf\{t \in [0,\infty) : X_n(t) \notin [l,r]\}, \ n \ge 0.$$

Встановимо результат щодо збіжності моментів виходу допграничних процесів зі смуги до моменту виходу граничного процесу з цієї самої смуги. Доведемо спочатку допоміжну лему.

Лема 3. *Для довільних моментів, визначених у означенні 1, справедлива збіжність*
$$\tau_{X_0,T}^{[l-\delta,r+\delta]} \to \tau_{X_0,T}^{[l,r]},\ \delta \to 0+ \ \text{за ймовірністю.}$$
Якщо додатково $\forall t \geqslant 0,\ x \in \mathbf{R}$ *виконано*
$$\nu(h_{t,x}^{-1}(\{l\},\{r\})) = 0,$$
де $h_{t,x}(y) = x + f(t,x,y)$, *то справедлива рівність*
$$\tau_{X_0,T}^{[l+\delta,r-\delta]} \to \tau_{X_0,T}^{[l,r]},\ \delta \to 0+ \ \text{за ймовірністю.}$$

Доведення. Доведемо першу збіжність.

Спочатку доведемо, що
$$\mathbf{P}(\exists k \geqslant 1:\ \tau_k \leqslant T \text{ та } X_0(\tau_k) \in [l-\delta,l) \cup (r,r+\delta]) \to 0,\ \delta \to \infty.$$
Позначимо
$$A_{k,\delta} = \{X_0(\tau_k) \in [l-\delta,l) \cup (r,r+\delta]\} =$$
$$= \{X_0(\tau_k-) + f(\tau_k, X_0(\tau_k-), \xi_k) \in [l-\delta,l) \cup (r,r+\delta]\}.$$
Оскільки ξ_k не залежить від
$$F_{\tau_k-} = \sigma\{\{X_t \in B\} \cap \{\tau_k < t\},\ B \in B(\mathbf{R}),\ t \geqslant 0\},$$
а $X_0(\tau_k-)$ та τ_k вимірні відносно $\mathcal{F}_{\tau_k-}$, то
$$\mathbf{P}(A_{k,\delta}) = \mathbf{E}[\mathbf{E}[\mathbf{1}_{A_{k,\delta}}|F_{\tau_k-}]] =$$
$$= \mathbf{E}\left[\int_{\mathbf{R}} \mathbf{1}\{X_0(\tau_k-) + f(\tau_k, X_0(\tau_k-), y) \in [l-\delta,l) \cup (r,r+\delta]\} F_\xi(dy)\right].$$
Очевидно,
$$\{X_0(\tau_k-) + f(\tau_k, X_0(\tau_k-), y) \in [l-\delta,l) \cup (r,r+\delta]\} \downarrow \varnothing,\ \delta \to 0+,$$
і за теоремою Лебега про мажоровану збіжність, маємо $\mathbf{P}(A_{k,\delta}) \to 0,\ \delta \to 0+$. Тоді для будь-якого $m \geqslant 1$
$$\mathbf{P}(\exists k \geqslant 1:\ \tau_k \leqslant T \text{ та } X_0(\tau_k) \in [l-\delta,l) \cup (r,r+\delta]) \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{P}(\exists k = 1,2,...,m:\ X_0(\tau_k) \in [l-\delta,l) \cup (r,r+\delta]) + \mathbf{P}(\tau_m \leqslant T) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}(A_{k,\delta}) + \mathbf{P}(\tau_m \leqslant T).$$
Отже,
$$\varlimsup_{\delta\to 0+} \mathbf{P}(\exists k \geqslant 1:\ \tau_k \leqslant T \text{ та } X_0(\tau_k) \in [l-\delta,l) \cup (r,r+\delta]) \leqslant \mathbf{P}(\tau_m \leqslant T).$$
Спрямовуючи $m \to \infty$, одержуємо бажану збіжність.

Позначимо
$$A_\delta = \{\exists k \geqslant 1:\ \tau_k \leqslant T \text{ та } X_0(\tau_k) \in [l-\delta) \cup (r,r+\delta]\} = \bigcup_{k\geqslant 1} A_{k,\delta}.$$
Доведемо за індукцією, що
$$\mathbf{P}(|\tau_{X_0,T}^{[l-\delta,r+\delta]} - \tau_{X_0,T}^{[l,r]}| > \varepsilon,\ \bar{A}_\delta, \tau_{X_0,T}^{[l,r]} < \tau_k) \to 0,\ \delta \to 0+ . \qquad (4)$$

Для $k=1$ маємо з леми 3, що

$$\mathbf{P}(|\tau_{X_0,T}^{[l-\delta,r+\delta]}-\tau_{X_0,T}^{[l,r]}|>\varepsilon,\ \tau_{X_0,T}^{[l,r]}<\tau_1)\to 0,\ \delta\to 0+.$$

Здійснимо індуктивний перехід від $k-1$ до k. Маємо

$$\mathbf{P}(|\tau_{X_0,T}^{[l-\delta,r+\delta]}-\tau_{X_0,T}^{[l,r]}|>\varepsilon,\ \bar{A}_\delta,\tau_{X_0,T}^{[l,r]}<\tau_{k-1})\to 0,\ \delta\to 0+. \tag{5}$$

Потрібно довести, що

$$\mathbf{P}(|\tau_{X_0,T}^{[l-\delta,r+\delta]}-\tau_{X_0,T}^{[l,r]}|>\varepsilon,\ \bar{A}_\delta,\tau_{X_0,T}^{[l,r]}\in[\tau_{k-1},\tau_k])\to 0,\ \delta\to 0+. \tag{6}$$

На події $\bar{A}_\delta\cap\{\tau_{X_0,T}^{[l,r]}\in[\tau_{k-1},\tau_k]\}$ виконано або

$$\tau_{X_0,T}^{[l,r]}=\tau_{X_0,T}^{[l-\delta,r+\delta]}=\tau_{k-1},$$

або

$$\tau_{k-1}<\tau_{X_0,T}^{[l,r]}\leqslant\tau_{X_0,T}^{[l-\delta,r+\delta]}.$$

Отже,

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(|\tau_{X_0,T}^{[l-\delta,r+\delta]}-\tau_{X_0,T}^{[l,r]}|>\varepsilon,\ \bar{A}_\delta,\tau_{X_0,T}^{[l,r]}\in[\tau_{k-1},\tau_k])\leqslant\\&\leqslant\mathbf{P}(|\tau_{X_0,T}^{[l-\delta,r+\delta]}-\tau_{X_0,T}^{[l,r]}|>\varepsilon,\ \tau_{X_0,T}^{[l,r]}=\tau_{X_0,T}^{[l-\delta,r+\delta]})+\\&+\mathbf{P}(|\tau_{X_0,T}^{[l-\delta,r+\delta]}-\tau_{X_0,T}^{[l,r]}|>\varepsilon,\ \tau_{X_0,T}^{[l,r]}\in(\tau_{k-1},\tau_k)).\end{aligned}$$

Перший доданок в правій частині останньої нерівності дорівнює нулю. Для другого доданку за тоеремою 3 маємо

$$\mathbf{P}(|\tau_{X_0,T}^{[l-\delta,r+\delta]}-\tau_{X_0,T}^{[l,r]}|>\varepsilon,\ \tau_{X_0,T}^{[l,r]}\in(\tau_{k-1},\tau_k))\to 0,\ \delta\to 0+.$$

Отже, ми довели (4).

Тепер запишемо для довільного $k>1$:

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(|\tau_{X_0,T}^{[l-\delta,r+\delta]}-\tau_{X_0,T}^{[l,r]}|>\varepsilon)\leqslant\\&\leqslant\mathbf{P}(|\tau_{X_0,T}^{[l-\delta,r+\delta]}-\tau_{X_0,T}^{[l,r]}|>\varepsilon,\ \bar{A}_\delta,\ \tau_{X_0,T}^{l,r}<\tau_k)+\\&+\mathbf{P}(A_\delta)+\mathbf{P}(\tau_k\leqslant T).\end{aligned}$$

Тоді

$$\overline{\lim_{\delta\to 0+}}\,\mathbf{P}(|\tau_{X_0,T}^{[l-\delta,r+\delta]}-\tau_{X_0,T}^{[l,r]}|>\varepsilon)\leqslant\mathbf{P}(\tau_k\leqslant T).$$

Спрямовуючи $k\to\infty$, одержуємо потрібне твердження.

Для другої збіжності єдиною відмінністю в доведенні є те, що при $\delta\to 0+$,

$$\begin{aligned}&\{X(\tau_k-)+f(\tau_k,X_0(\tau_k-),y)\in[l,l+\delta)\cup(r-\delta,r]\}\to\\&\to\{X(\tau_k-)+f(\tau_k,X_0(\tau_k-),y)\in\{l\},\{r\}\}=\\&=\{h_{\tau_k,X(\tau_k-)}(\xi_k)\in\{l\},\{r\}\}\neq\varnothing.\end{aligned}$$

Запишемо

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(h_{\tau_k,X(\tau_k-)}(\xi_k)\in\{l\},\{r\})=\\&=\mathbf{E}(\mathbf{E}(\mathbf{1}\{h_{\tau_k,X(\tau_k-)}(\xi_k)\in\{l\},\{r\}\}|F_{\tau_k-}))=\\&=\mathbf{E}(\int_{\mathbf{R}}h_{\tau_k,X(\tau_k-)}(y)\nu(dy))=0\end{aligned}$$

за умовою. $\square$

Доведемо основну теорему про збіжність моментів виходу зі смуги.

Теорема 5. *Нехай виконуються умови* $(\mathrm{Y}1_n)$–$(\mathrm{Y}8_n)$ *та* $(\mathrm{U}1_n)$–$(\mathrm{U}3_n)$.

Тоді для довільного $T > 0$ *мають місце такі твердження:*

(а) для моментів виходу $\tau^{[l,r]}_{X_n,T}, n \geq 0$ *має місце збіжність*

$$\forall \varepsilon > 0 : P\left(\left|\tau^{[l,r]}_{X_n,T} - \tau^{[l,r]}_{X_0,T}\right| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0,\ n \to \infty. \tag{7}$$

(б) для моментів виходу $\tau^{[-\infty,r]}_{X_n,T}, n \geq 0$ *має місце збіжність*

$$\forall \varepsilon > 0 : P\left(\left|\tau^{[-\infty,r]}_{X_n,T} - \tau^{[-\infty,r]}_{X_0,T}\right| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0,\ n \to \infty. \tag{8}$$

Доведення. Доведемо пункт (а). Пункт (б) доводиться аналогічно.

Нехай $\delta \in (0, \frac{r-l}{2})$.

Позначимо

$$A_{\varepsilon,\delta} = \{|\tau^{[l-\delta,r+\delta]}_{X_0,T} - \tau^{[l,r]}_{X_0,T}| \leqslant \varepsilon\} \cap \{|\tau^{[l+\delta,r-\delta]}_{X_0,T} - \tau^{[l,r]}_{X_0,T}| \leqslant \varepsilon\},$$

$$B_{n,\delta} = \{\sup_{t\in[0,T]} |X_n(t) - X_0(t)| \leqslant \delta\}.$$

На події $B_{n,\delta}$ виконується

$$\tau^{[l+\delta,r-\delta]}_{X_0,T} \leqslant \tau^{[l,r]}_{X_n,T} \leqslant \tau^{[l-\delta,r+\delta]}_{X_0,T}.$$

Тоді, очевидно

$$B_{n,\delta} \cap A_{\varepsilon,\delta} \subset \{|\tau^{[l,r]}_{X_n,T} - \tau^{[l,r]}_{X_0,T}| \leqslant \varepsilon\}.$$

Отже,

$$\mathbf{P}(|\tau^{[l,r]}_{X_n,T} - \tau^{[l,r]}_{X_0,T}| > \varepsilon) \leqslant \mathbf{P}(\bar{B}_{n,\delta}) + \mathbf{P}(\bar{A}_{\varepsilon,\delta}).$$

За теоремою 1 маємо

$$\mathbf{P}(\bar{B}_{n,\delta}) \to 0,\ n \to \infty.$$

Тоді

$$\varlimsup_{n\to\infty} \mathbf{P}(|\tau^{[l,r]}_{X_n,T} - \tau^{[l,r]}_{X_0,T}| > \varepsilon) \leqslant \mathbf{P}(\bar{A}_{\varepsilon,\delta}).$$

Спрямовуючи $\delta \to 0+$ та використовуючи лему 3, одержимо бажане твердження. $\square$

Висновки

Нами одержано такі результати:

1) рівномірна збіжність за ймовірністю розвязків СДР зі стрибками за умов збіжності коефіцієнтів;

2) збіжність розвязків СДР зі стрибками у середньому будь-якого порядку $\gamma > 0$ за умов збіжності коефіцієнтів;

3) неперервність моментів виходу зі смуги розв'язків СДР зі стрибками;

4) збіжність моментів виходу зі смуги.

Література

1. Мішура Ю. С., Посашкова С.В., Шевченко Г.М. Властивості розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з неоднорідними коефіцієнтами та неліпшіцевою дифузією. // Теорія ймовірностей та мат. статистика. — 2008. — Т. 79. — С. 105–113.
2. Мішура Ю.С., Томашик В.В. Збіжність моментів виходу дифузійних процесів зі смуги. // Теорія ймовірностей та мат. статистика. — 2013. — Т. 88. — С. 95–105.
3. Зубченко В.П. Властивості розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь із випадковими коефіцієнтами, неліпшицевою дифузією та з пуассонівськими мірами. // Теорія ймовірностей та мат. статистика. — 2010. — Т. 82. — С. 30–42.
4. Гихман И.И. Стохастические дифференциальные уравнения // Наукова думка, Киев. — 1968.
5. Kiyosi I., McKean H. P. Diffusion Processes and Their Sample Paths // Springer. — 1965.
6. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения // Наукова думка, Киев. — 1982.
7. Novikov A. S. On a solution of the optimal stopping problem for processes with independent increments. // An International journal of Probability and Stochastic processes. — 2007. — Т. 79. — С. 393–406.
8. Мороз А. Г., Шевченко Г.М. Задача оптимальної зупинки для процесів із незалежними приростами. // Український математичний вісник. — 2009. — Т. 6. — С. 126–134.
9. Li C. W. Almost sure convergence of stochastic differential equations of jump-diffusion type. // Progress in Probability. — 1995. — Т. 36. — С. 187–197.
10. Gal'chuk L. I. Strong uniqueness of solution of stochastic integral equations for semimartingale components. // Math Notes. — 1984. — Т. 35. — С. 157–161.
11. Protter P. Ctochastic Integration and Differential Equations // Springer-Verlag. — 1990.
12. Oksendal B., Sulem A. Applied stochastic control of jump diffusions // Springer-Verlag. — 2005.

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна.

Надійшла 13.09.2013