Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2013, №4(114) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.2:519.6

ТОЧНІСТЬ ТА НАДІЙНІСТЬ СПЕКТРАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ ГАУССОВИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ В ДЕЯКИХ ПРОСТОРАХ ОРЛІЧА

А. О. Пашко

Резюме. В роботі розглянуто оцінки точності і надійності моделювання гауссових випадкових процесів, що зображуються у вигляді стохастичних інтегралів, у нормах деяких просторів Орліча. Моделі процесів зображуються у вигляді строго субгауссових випадкових рядів.

Вступ

В роботі досліджуються моделі гауссових випадкови процесів, що зображуються у вигляді стохастичних інтегралів. Використовується модифікація загальновідомого означення стохастичного інтеграла по випадковій мірі та приклади зображень випадкових процесів у вигляді цих інтегралів. Побудова таких інтегралів і дослідження умов збіжності в просторах Орліча розглядалась в роботі [1], в просторі неперервних функцій — в роботах [2]–[3].

При реальному моделюванні, зважаючи на точність представлення чисел, похибку методів побудови послідовності випадкових чисел із заданим законом розподілу, отримуються субгауссові випадкові процеси, або строго субгауссові випадкові процеси. Дослідження властивостей субгауссових випадкових величин та процесів представлені в роботі [4].

При моделюванні випадкових процесів для оцінки точності моделювання, як правило, використовуються оцінки моментів різниці між процесом та моделлю, або слабка збіжність розподілів моделі. Дослідження в цьому напрямі представлені в роботах [5]–[9]. В роботі [9] представлена широка бібліографія в даному напрямку.

В даній роботі досліджуються моделі, що наближають випадкові процеси з заданими точністю і надійністю в нормах просторів Орліча. Для побудови моделей використовуються спектральні зображення випадкових процесів [10]. Отримані результати узагальнюють результати [11]–[15], а в деяких випадках і покращують. Оцінка точності і надійності моделювання гауссових процесів та полів, що використовують спектральні зображення, систематизовані в роботі [16]. Всі результати отримані в припущенні, що випадкові процеси є строго субгауссовими. Це не впливає на загальний результат, оскільки гауссові випадкові процеси також є сторого субгауссовими процесами.

1. Оцінки швидкості збіжності випадкових інтегралів в нормах просторів Орлича

Нехай (T, ρ) — деякий метричний простір, $X = \{X(t),\ t \in T\}$ — випадковий процесс, який можна зобразити у вигляді

$$X(t) = \sum_{r=1}^{N} \int_0^{\infty} f_r(t,u)\, d\xi_r(u), \tag{1}$$

де випадкові процеси $\xi_r(u), r = 1, ..., N$ належать класу I_a^b для будь-яких $0 \le a < b < +\infty$ [1]. Інтеграли $\int_0^{\infty} f_r(t,u) d\xi_r(u)$ розглядаються як границя за ймовірністю інтегралів $\int_0^b f_r(t,u) d\xi_r(u)$, коли $b \to \infty$. Інтеграли $\int_a^b \phi(u) d\xi(u)$ визначені так:

$$\int_a^b \phi(u) d\xi(u) = \phi(u)\xi(u)\ |_a^b - \int_a^b \xi(u) d\phi(u),$$

де $\phi(u)$ — неперервна функція обмеженої варіації на $[a,b]$, $\xi(u)$ — випадковий процес на $[a,b]$, $\int_a^b \xi(u) d\phi(u)$ — інтеграл Лебега по узагальненій мірі, що породжена функцією $\phi(u)$. Властивості таких інтегралів вивчались в роботах [1]–[3]. Введемо такі позначення:

$$X_\Lambda(t) = \sum_{r=1}^{N} \int_\Lambda^{\infty} f_r(t,u)\, d\xi_r(u), \qquad \Lambda > 0, \tag{2}$$

$$X_a^b(t) = \sum_{r=1}^{N} \int_a^{b} f_r(t,u) d\xi_r(u), \qquad 0 \le a < b, \tag{3}$$

$$R_a^b(t,\alpha) = \sum_{r=1}^{N} \int_a^{b} \alpha(u) f_r(t,u) d\xi_r(u), \tag{4}$$

де $\alpha = \{\alpha(u), u \ge 0\}$ деяка неперервна зліва монотонно неспадна функція така, що $\alpha(u) \to \infty$ при $u \to \infty$.

Означення 1. Нехай $\xi_r = \{\xi_r(u), u \ge 0\}$, $r = 1, \ldots, N$, сумісно строго субгауссові випадкові процеси, $E|\xi_r(t)\xi_r(s)| < \infty$, $t, s \in T$, $r = 1, \ldots, N$, а функції $f_r = \{f_r(t,u),\ t \in T,\ u \ge 0\}$ такі, що $f_r(t,u)$ неперервна по t та неперервно диференційована по $u \ge 0$. Такий процес X називається регулярним строго субгауссовим процесом.

Випадкові процеси $X(t)$, $X_\Lambda(t)$, $X_a^b(t)$, $t \in T$ є строго субгауссовими процесами.

Нехай $(T, \mathfrak{A}, \mu)$ — вимірний простір, де $\mathfrak{A}$ — борелєвська σ — алгебра на (T, ρ). $L_U(T)$ — простір Орлича, що породжується C — функцією $U = \{U(x), x \in R^1\}$.

Означення 2. Сім'я функцій $g = \{g(t,u), t \in T, u > 0\}$ належить класу $D_U(c)$, якщо всі функції $g_u = \{g(t,u), t \in T\}$, $u > 0$, належать простору

Орлича $L_U(T)$ та існує монотонно неспадна функція $c(u) > 0$, $u \geq 0$, що для функції $g(u,\cdot)$ виконується нерівність

$$\|g(u,\cdot)\|_{L_U} \leq c(u)\|g(u,\cdot)\|_{L_2}.$$

Означення 3. Регулярний строго субгауссовий процес належить класу $D_U(c)$, якщо з ймовірністю одиниця сім'я випадкових процесів $R_a^u(t,\alpha)$, $0 \leq a < u$, належить класу $D_U(c)$ для будь-якої функції $\alpha(u)$.

Лема 1. *Нехай $X = \{X(t), t \in T\}$ регулярний строго субгауссовий випадковий процес з класу $D_U(c)$. Тоді для будь-яких $0 \leq a < b < \infty$, $0 \leq s < 1$, має місце нерівність*

$$P\big\{\|X_a^b(t)\|_{L_U} > \varepsilon\big\} \leq \frac{1}{\sqrt{1-s}}\exp\bigg\{-\frac{s\varepsilon^2}{2(V_a^b)^2}\bigg\}, \tag{5}$$

де

$$V_a^b = \frac{\big(E\big\|R_a^b(t,\alpha)\big\|_{L_2}^2\big)^{\frac{1}{2}}c(b)}{\alpha(b)} + \int_a^b c(u)\big(E\big\|R_a^u(t,\alpha)\big\|_{L_2}^2\big)^{\frac{1}{2}}\,d\bigg(-\frac{1}{\alpha(u)}\bigg).$$

Доведення. Із означення інтеграла для деякого $0 < d \leq a$ має місце рівність

$$\int_a^b f_r(t,u)\,d\xi_r(u) = \frac{1}{\alpha(b)}\int_d^b f_r(t,v)\alpha(v)\,d\xi_r(v) - \frac{1}{\alpha(a)}\int_d^a f_r(t,v)\alpha(v)\,d\xi_r(v) +$$

$$+\int_a^b\bigg(\int_d^u f_r(t,v)\alpha(v)\,d\xi_r(v)\bigg)\,d\bigg(-\frac{1}{\alpha(u)}\bigg).$$

З цієї рівності зразу ж випливає рівність

$$X_a^b(t) = \frac{R_d^b(t,\alpha)}{\alpha(b)} - \frac{R_d(t,\alpha)}{\alpha(a)} + \int_a^b R_d^u(t,\alpha)\,d\bigg(-\frac{1}{\alpha(u)}\bigg)$$

та такі співвідношення

$$\|X_a^b(t)\|_{L_U} = \frac{1}{\alpha(b)}\|R_d^b(t,\alpha)\|_{L_U} + \frac{1}{\alpha(a)}\|R_d^a(t,\alpha)\|_{L_U} +$$

$$+\int_a^b \|R_d^u(t,\alpha)\|_{L_U}\,d\bigg(-\frac{1}{\alpha(u)}\bigg) \leq$$

$$\leq \frac{c(b)}{\alpha(b)}\|R_d^b(t,\alpha)\|_{L_2} + \frac{c(a)}{\alpha(a)}\|R_d^a(t,\alpha)\|_{L_2} + \int_a^b c(u)\|R_d^u(t,\alpha)\|_{L_2}\,d\bigg(-\frac{1}{\alpha(u)}\bigg).$$

Виберемо деякі числа $W(a,b) > 0$, $\delta(b) > 0$, $\delta(a) > 0$, $\delta(a,b) > 0$, $\delta(b)+\delta(a)+\delta(a,b) = 1$, які точно будуть визначені далі.

Тоді з нерівності Гельдера та останньої нерівності отримаємо співвідношення

$$E\exp\bigg\{\frac{\big\|X_a^b(t)\big\|_{L_U}^2}{W^2(a,b)}\bigg\} \leq E\exp\bigg\{\frac{1}{W^2(a,b)}\bigg(\frac{\delta(b)c(b)}{\delta(b)\alpha(b)}\|R_d^b(t,\alpha)\|_{L_2} + \tag{6}$$

$$+\frac{\delta(a)c(a)}{\delta(a)\alpha(a)}\|R_d^a(t,\alpha)\|_{L_2} + \frac{\delta(a,b)}{\delta(a,b)}\int_a^b c(u)\|R_d^u(t,\alpha)\|_{L_2}\,d\bigg(-\frac{1}{\alpha(u)}\bigg)\bigg)^2\bigg\} \leq$$

$$\leq \left(E\exp\left\{ \left(\frac{c(b)\|R_d^b(t,\alpha)\|_{L_2}}{\delta(b)\alpha(b)W(a,b)} \right)^2 \right\} \right)^{\delta(b)} \cdot \left(E\exp\left\{ \left(\frac{c(a)\|R_d^a(t,\alpha)\|_{L_2}}{\delta(a)\alpha(a)W(a,b)} \right)^2 \right\} \right)^{\delta(a)} \times$$

$$\times \left(E\exp\left\{ \left(\int_a^b \frac{c(u)\|R_d^u(t,\alpha)\|_{L_2}}{\delta(a,b)W(a,b)}\, d\left(-\frac{1}{\alpha(u)}\right) \right)^2 \right\} \right)^{\delta(a,b)}.$$

Нехай $p(u) > 0$ така функція, що

$$\int_a^b p(u)\, d\big(-\frac{1}{\alpha(u)}\big) = 1.$$

Позначимо $k(u) = \frac{c(u)}{\delta(a,b)W(a,b)}$. Тоді з нерівності Коші випливає, що

$$E\exp\left\{ \left(\int_a^b k(u)\|R_d^u(t,\alpha)\|_{L_2}\, d\left(-\frac{1}{\alpha(u)}\right) \right)^2 \right\} \leq$$

$$\leq \exp\left\{ \int_a^b \ln\left(E\exp\left\{ \left(\frac{k(u)\|R_d^u(t,\alpha)\|_{L_2}}{p(u)} \right)^2 \right\} \right) p(u)\, d\left(-\frac{1}{\alpha(u)}\right) \right\}.$$

Покладемо для $0 < s < 1$

$$\delta(a,b) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{s}W(a,b)} \int_a^b c(u)\big(E\|R_d^u(t,\alpha)\|_{L_2}^2\big)^{\frac{1}{2}}\, d\left(-\frac{1}{\alpha(u)}\right),$$

$$p(u) = \frac{\sqrt{2}c(u)\big(E\|R_d^u(t,\alpha)\|_{L_2}^2\big)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{s}\delta(a,b)W(a,b)}.$$

При цьому $\int_a^b p(u)\, d\left(-\frac{1}{\alpha(u)}\right) = 1.$

Отже, при такому виборі $\delta(a,b)$ та $p(u)$ маємо

$$E\exp\left\{ \left(\frac{k(u)\|R_d^u(t,\alpha)\|_{L_2}}{p(u)} \right)^2 \right\} = E\exp\left\{ \frac{s\|R_d^u(t,\alpha)\|_{L_2}^2}{2E\|R_d^u(t,\alpha)\|_{L_2}^2} \right\} \leq \frac{1}{\sqrt{1-s}}$$

та

$$E\exp\left\{ \left(\int_a^b \frac{c(u)\|R_d^u(t,\alpha)\|_{L_2}}{\delta(a,b)W(a,b)}\, d\left(-\frac{1}{\alpha(u)}\right) \right)^2 \right\} \leq \frac{1}{\sqrt{1-s}}. \tag{7}$$

Виберемо числа таким чином

$$\delta(a) = \frac{\sqrt{2}c(a)\big(E\|R_d^a(t,\alpha)\|_{L_2}^2\big)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{s}\alpha(a)W(a,b)},$$

$$\delta(b) = \frac{\sqrt{2}c(b)\big(E\|R_d^b(t,\alpha)\|_{L_2}^2\big)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{s}\alpha(b)W(a,b)},$$

$$W(a,b) = \sqrt{\frac{2}{s}} V_a^b(d).$$

Тоді має місце нерівність

$$E\exp\left\{ \left(\frac{c(b)\|R_d^b(t,\alpha)\|_{L_2}}{\delta(b)\alpha(b)W(a,b)} \right)^2 \right\} = E\exp\left\{ \frac{s\|R_d^b(t,\alpha)\|_{L_2}^2}{2E\|R_d^u(t,\alpha)\|_{L_2}^2} \right\} \leq \frac{1}{\sqrt{1-s}}. \tag{8}$$

Аналогічно отримуємо оцінку

$$E\exp\left\{\left(\frac{c(u)\|R_d^a(t,\alpha)\|_{L_2}}{\delta(a)\alpha(a)W(a,b)}\right)^2\right\} \le \frac{1}{\sqrt{1-s}}. \tag{9}$$

З нерівності Чебишева маємо

$$P\left\{\|X_a^b(t)\|_{L_U} > \varepsilon\right\} \le E\exp\left\{\frac{s\|X_a^b(t)\|_{L_U}^2}{2(V_a^b(d))^2}\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{s\varepsilon^2}{2(V_a^b(d))^2}\right\}.$$

Покладемо $d = a$ і з (6), (7), (8) та (9) отримуємо отримаємо оцінку (5). $\square$

Теорема 1. *Нехай $X = \{X(t), t \in t\}$ — регулярний строго субгауссовий випадковий процес з класу $D_U(c)$. Якщо для деякої функції $\alpha = \{\alpha(u), u > 0\}$ такої, що $\alpha(u) > 0$, при $u \ge 0$, $\alpha(u)$ монотонно не спадає, $\alpha(u) \to \infty$ при $u \to \infty$ та існує таке $a \ge 0$, що виконуються умови:*

$$\int_a^\infty c(u)\left(E\|R_d^u(t,\alpha)\|_{L_2}^2\right)^{\frac12} d\left(-\frac{1}{\alpha(u)}\right) < \infty, \tag{10}$$

$$\frac{c(b)\left(E\|R_a^b(t,\alpha)\|_{L_2}^2\right)^{\frac12}}{\alpha(b)} \to 0 \quad \text{при} \quad b \to \infty, \tag{11}$$

тоді випадковий процес X з ймовірністю одиниця належить простору $L_U(T)$ та для будь-яких $\varepsilon > V_a$ має місце нерівність

$$P\left\{\|X_a(t)\|_{L_U} > \varepsilon\right\} \le \exp\left\{\frac12\right\}\frac{\varepsilon}{V_a}\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2V_a^2}\right\}, \tag{12}$$

де

$$V_a = \int_a^\infty c(u)\left(E\|R_a^u(t,\alpha)\|_{L_2}^2\right)^{\frac12} d\left(-\frac{1}{\alpha(u)}\right).$$

Доведення. Якщо виконуються умови (10) та (11), то при $a \to \infty$, $b \to \infty$ маємо $V_a^b \to 0$. Отже, з леми 1 випливає, що при цьому $\|X_a(t)\|_{L_U} \to 0$ за ймовірністю. Оскільки тоді існують підпослідовності $a_n < b_n$, що $\|X_{a_n}^{b_n}(t)\|_{L_U} \to 0$ при $a_n \to \infty$ з ймовірністю одиниця, то X з ймовірністю одиниця належить простору $L_U(T)$. З нерівності (5) та леми Фату випливає нерівність

$$P\left\{\|X_a(t)\|_{L_U} > \varepsilon\right\} \le \frac{1}{\sqrt{1-s}}\exp\left\{-\frac{s\varepsilon^2}{2(V_a)^2}\right\}. \tag{13}$$

Нерівність (12) випливає з (13), якщо праву частину (13) мінімізувати по s. $\square$

2. Точність та надійність моделювання випадкових процесів з класу $D_U(c)$

Нехай $X = \{X(t), t \in T\}$ — регулярний строго субгауссовий процес, що має зображення (1), де ξ_r, $r = 1, \ldots, N$, сумісно строго субгауссові випадкові процеси.

Надалі розглядаємо випадкові процеси з класу $D_U(c)$. Для таких процесів розроблено алгоритм побудови моделі, що наближає процес із заданими точністю та надійністю.

Означення 4. Нехай $\Lambda > 0$, D_Λ — розбиття інтервалу $[0, \Lambda]$, $D_\Lambda\colon\ 0 = u_0 < u_1 < \ldots < u_{n-1} < u_n = \Lambda$. Випадковий процес $X_{n,\Lambda} = \{X_n(t, \Lambda), t \in T\}$, де

$$X_n(t, \Lambda) = \sum_{r=1}^{N} \sum_{i=0}^{n-1} f_r(t, u_i)(\xi_r(u_{i+1}) - \xi_r(u_i))$$

називається *апроксимаційною моделлю процесу* X (*A-моделлю*).

Отже, A-модель процесу X можна отримати змоделювавши суму

$$\sum_{r=1}^{N} \sum_{i=0}^{n-1} f_r(t, u_i)\zeta_{r,i},$$

де $\zeta_{r,i}$, $r = 1, 2, \ldots, N$, $i = 0, \ldots, n-1$, — сім'я строго субгауссових випадкових величин з відомими коваріаціями $E\zeta_{r,i}\zeta_{r_1,i_1}$.

Нехай функції $f_r = \{f_r(t, u), t \in T, u \geq 0\}$ — це такі функції, що $f_r(z, u)$, як функції комплексної змінної z, є цілими функціями експоненціального типу $\Delta(u) > 0$, обмеженими на дійсній осі. Тоді функції $R_a^b(t, \alpha)$ є такі, що функції $R_a^b(z, \alpha)$, як функції комплексної змінної z, при всіх $a \leq b$ з ймовірністю одиниця є функціями експоненціального типу $\Delta(b)$, обмеженими на дійсній осі. Якщо C — функція Орліча $U(x)$ така, що функція $\sqrt{U(x)}$ — опукла, то має місце нерівність [1]

$$\|R_a^b(t, \alpha)\|_{L_U} \leq c(u)\|R_a^b(t, \alpha)\|_{L_2},$$

де

$$c(u) = \inf_{h>0} \left\{ h^{-\frac{1}{2}} \left(U^{(-1)}\left(\frac{1}{h}\right)\right)^{-1} (1 + h\Delta(u)) \right\}. \tag{14}$$

Це означає, що випадковий процес X належить класу $D_U(c)$ з $c(u)$, визначеною в (14).

Теорема 2. *Нехай* $X = \{X(t), t \in T\}$ *— регулярний субгауссовий випадковий процес із класу* $D_U(c)$*, для якого виконуються умови (10) та (11) для будь-якого* $a > 0$*. Тоді випадковий процес* $X_{n,\Lambda}$ *є A-моделлю, що наближає випадковий процес* X *з надійністю* α*,* $0 < \alpha < 1$ *та точністю* $\delta > 0$ *у* $L_U(T)$*, якщо для деякого* γ*, такого, що* $0 < \gamma < 1$ *та при* $V_\Lambda < \delta(1-\gamma)$ *виконується нерівність*

$$P\{\|X_0^\Lambda(t) - X_n(t, \Lambda)\|_{L_U} > \gamma\delta\} + \tag{15}$$
$$+ \exp\left\{\frac{1}{2}\right\} \frac{\delta(1-\gamma)}{V_\Lambda} \exp\left\{ -\frac{\delta^2(1-\gamma)^2}{2V_\Lambda^2}\right\} \leq \alpha,$$

де

$$V_\Lambda = \int_\Lambda^\infty c(u)(E\|R_\Lambda^u(t, \alpha)\|_{L_2}^2)^{\frac{1}{2}} d\left(-\frac{1}{\alpha(u)}\right),$$

Доведення. Оскільки $X(t) = X_0^\Lambda(t) + X_\Lambda(t)$, $X_\Lambda(t)$ визначений у (2), то

$$\|X(t) - X_n(t,\Lambda)\|_{L_U} \le \|X_0^\Lambda(t) - X_n(t,\Lambda)\|_{L_U} + \|X_\Lambda(t)\|_{L_U},$$

та для будь-яких $\delta > 0$ та $0 < \gamma < 1$ має місце нерівність

$$P\{\|X(t) - X_n(t,\Lambda)\|_{L_U} > \delta\} \le$$

$$\le P\{\|X_0^\Lambda(t) - X_n(t,\Lambda)\|_{L_U} > \delta\gamma\} + P\{\|X_\Lambda(t)\|_{L_U} > \delta(1-\gamma)\}.$$

Тепер твердження теореми випливає з теореми 1, якщо в нерівності (12) покласти $a = \Lambda$ та мінімізувати по s. $\square$

A-модель $X_{n,\Lambda}$ також буде шуканою моделлю, якщо у (15) замість $P\{\|X_0^\Lambda(t) - X_n(t,\Lambda)\|_{L_U} > \delta\}$ підставити будь-які оцінки зверху для цієї ймовірності.

Має місце

Лема 2. *Нехай для будь-яких* Λ *та* n

$$\| X_0^\Lambda(t) - X_n(t,\Lambda) \|_{L_U} \le c(\Lambda) \| X_0^\Lambda(t) - X_n(t,\Lambda) \|_{L_2},$$

тоді для $\delta > c(\Lambda)(B_{n,\Lambda})^{\frac{1}{2}}$ *має місце оцінка*

$$P\{\|X_0^\Lambda(t) - X_n(t,\Lambda)\|_{L_U} > \delta\} \le \exp\left\{\frac{1}{2}\right\} \frac{\delta}{c(\Lambda)(B_{n,\Lambda})^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{ - \frac{\delta^2}{2B_{n,\Lambda}c^2(\Lambda)}\right\},$$

де

$$B_{n,\Lambda} = \int_T E\big(X_0^\Lambda(t) - X_n(t,\Lambda)\big)^2 d\mu(t).$$

Доведення. Твердження лема випливає з нерівності [1]

$$P\{\|X_0^\Lambda(t) - X_n(t,\Lambda)\|_{L_U} > \delta\} \le P\left\{\|X_0^\Lambda(t) - X_n(t,\Lambda)\|_{L_2} > \frac{\delta}{c(\Lambda)}\right\}.$$

$\square$

3. Точність та надійність моделювання стаціонарних випадкових процесів з класу $D_U(c)$

Нехай $X = \{X(t), t \in R\}$ стаціонарний центрований процес, $EX(t+\tau)X(t) = B(\tau) = \int_0^\infty \cos u\tau \, dF(u)$, де $F(u)$ — спектральна функція процесу. Випадковий процес X має зображення.

$$X(t) = \int_0^\infty \cos(tu)\, d\xi_1(u) + \int_0^\infty \sin(tu)\, d\xi_2(u),$$

де $\xi_1(u)$ та $\xi_2(u)$ центровані некорельовані випадкові процеси з некорельованими приростами такі, що для довільних $0 \le u_1 < u_2$

$$E(\xi_1(u_2) - \xi_1(u_1))^2 = E(\xi_2(u_2) - \xi_2(u_1))^2 = F(u_2) - F(u_1).$$

Якщо $\xi_1(u)$ та $\xi_2(u)$ сумісно строго субгауссові вимірні випадкові процеси, то $X(t)$ — регулярний строго субгауссовий випадковий процес.

Тоді A-модель такого процесу має вигляд

$$X_n(t,\Lambda) = \sum_{i=0}^{n-1}\big(\cos(tu_i)\xi_{1i} + \sin(tu_i)\xi_{2i}\big), \tag{16}$$

де $\xi_{1i}, \xi_{2i}, i = 0, 1, ..., n-1,$ — некорельовані або незалежні строго субгауссові величини такі, що $E\xi_{1i}^2 = E\xi_{2i}^2 = F(u_{i+1}) - F(u_i)$.

Розглянемо випадкові процеси X_v^r, $v > 0, r > \frac{1}{2}$, вигляду

$$X_v^r = \Big\{X(t)\Big(\frac{sin(vt)}{vt}\Big)^r, \, t \in R\Big\}.$$

Позначимо

$$X_{v,\Lambda}^r = \Big\{X_\Lambda(t)\Big(\frac{sin(vt)}{vt}\Big)^r, \, t \in R\Big\},$$

де

$$X_\Lambda(t) = \int_\Lambda^\infty cos(ut)d\xi_1(u) + \int_\Lambda^\infty sin(ut)d\xi_2(u).$$

Теорема 3. *Нехай $L_U(R)$ — це простір Орліча, що породжується C-функцією $U(x)$ такою, що функція $\sqrt{U(x)}$ опукла, покладемо*

$$c(u) = \inf_{h>0}\Big\{h^{-\frac{1}{2}}\Big(U^{(-1)}(\frac{1}{h})\Big)^{-1}(1 + h(u + rv))\Big\}. \tag{17}$$

Нехай існує функція $\alpha = \{\alpha(u), u \geq 0\}$, що $\alpha(u) > 0, u \geq 0, \alpha(u)$ — монотонно не спадає та $\alpha(u) \to \infty$ при $u \to \infty$, для якої збігається інтеграл

$$\int_0 c(u)\Big(\int_0^u \alpha^2(v)dF(v)\Big)^{\frac{1}{2}} d\Big(-\frac{1}{\alpha(u)}\Big) < \infty. \tag{18}$$

Тоді випадковий процес X_v^r з ймовірністю одиниця належить простору $L_U(R)$ та для будь-якого $\Lambda > 0$ при $\epsilon > V_\Lambda$ має місце нерівність

$$P\big\{\|X_{v,\Lambda}^r(t)\|_{L_U(R)} > \epsilon\big\} \leq \exp\Big\{-\frac{1}{2}\Big\}\frac{\epsilon}{V_\Lambda}\exp\Big\{-\frac{\epsilon^2}{2V_\Lambda^2}\Big\}, \tag{19}$$

де

$$V_\Lambda = \int_\Lambda^\infty c(u)\Big(\int_\Lambda^u \alpha^2(u)dF(u)\Big)^{\frac{1}{2}} d\Big(-\frac{1}{\alpha(u)}\Big)\big(v^{-1}I_r\big)^{\frac{1}{2}},$$

$$I_r = \int_{-\infty}^\infty\Big|\frac{sin(t)}{t}\Big|^{2r}dt.$$

Доведення. Доведення випливає з теореми 1. Дійсно, випадковий процес X_v^r — це регулярний строго субгауссовий процес, що належить класу $D_U(c)$, де $c(u)$ визначається формулою (17). У цьому разі, згідно з теоремою 1

$$R_a^u(t,\alpha) = \int_a^u \alpha(u)a_v(t)cos(ut)d\xi_1(u) + \int_a^u \alpha(u)a_v(t)sin(ut)d\xi_2(u),$$

де $a_v(t) = \big(\frac{sin(tv)}{tv}\big)^r$.

Отже,

$$E(R_a^u(t,\alpha))^2 = (a_v(t))^2 \int_a^u \alpha^2(u)dF(u),$$

$$E\|R_a^u(t,\alpha)\|_{L_2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(a_v(t))^2 dt \int_a^u \alpha^2(u)dF(u) = v^{-1}I_r \int_a^u \alpha^2(u)dF(u).$$

Умова (10) теореми 1 має вигляд

$$\int_a^{\infty} c(u)\Big(\int_a^u \alpha^2(u)dF(u)\Big)^{\frac{1}{2}} d\Big(-\frac{1}{\alpha(u)}\Big) < \infty \tag{20}$$

а вона виконується для будь-якого $a \geq 0$, коли виконується умова (18). Умова (11) виконується, коли

$$\frac{c(b)}{\alpha(b)}\Big(\int_a^b \alpha^2(u)dF(u)\Big)^{\frac{1}{2}} \to 0 \tag{21}$$

при $b \to \infty$.

Тоді мають місце співвідношення

$$\frac{c(b)}{\alpha(b)}\Big(\int_a^b \alpha^2(u)dF(u)\Big)^{\frac{1}{2}} = c(b)\Big(\int_a^b \alpha^2(u)dF(u)\Big)^{\frac{1}{2}} \int_b^{\infty} d\Big(-\frac{1}{\alpha(u)}\Big) \leq$$

$$\leq \int_b^{\infty} c(u)\Big(\int_a^u \alpha^2(u)dF(u)\Big)^{\frac{1}{2}} d\Big(-\frac{1}{\alpha(u)}\Big). \tag{22}$$

З (20) випливає, що останій інтеграл у (22) прямує до нуля при $b \to \infty$, тобто (21) виконується. Нерівність (17) тепер випливає з нерівності (12) при $a = \Lambda$ та мінімізації по s. $\square$

Розглянемо випадок, коли $T = [0,T]$, $T > 0$, $L_U(T)$ — простір Орліча, що породжується на T C — функцією U. Покладемо $v = \frac{1}{T}$.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови теореми 3. Тоді випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ з ймовірністю одиниця належить простору $L_U(T)$ та для будь-яких $\Lambda > 0$, $r > \frac{1}{2}$ при $\epsilon > \frac{V_{\Lambda,T}}{(sin(1))^r}$ має місце нерівність*

$$P\big\{\|X_\Lambda(t)\|_{L_U(T)} > \epsilon\big\} \leq \exp\Big\{-\frac{1}{2}\Big\}\frac{\epsilon(sin(1))^r}{V_{\Lambda,T}} \exp\Big\{-\frac{\epsilon^2(sin(1))^{2r}}{2V_{\Lambda,T}^2}\Big\}, \tag{23}$$

де

$$V_{\Lambda,T} = T^{\frac{1}{2}} I_r^{\frac{1}{2}} \int_\Lambda^{\infty} c_T(u)\Big(\int_\Lambda^u \alpha^2(u)dF(u)\Big)^{\frac{1}{2}} d\Big(-\frac{1}{\alpha(u)}\Big),$$

$c_T(u)$ дорівнює $c(u)$, що визначено в (17), при $v = T^{-1}$.

Доведення. Оскільки при $|vt| \leq 1$ має місце нерівність $\big|\frac{sin(vt)}{vt}\big|^r \geq (sin(1))^r$, то при $0 \leq t \leq T$

$$|X_\Lambda(t)| \leq (sin(1))^{-r}|X^r_{\frac{1}{T},\Lambda}(t)|.$$

Тепер легко довести, що

$$\|X_\Lambda(t)\|_{L_U(T)} \leq (sin(1))^{-r}\|X^r_{\Lambda,\frac{1}{T}}(t)\|_{L_U(R)}.$$

Тоді нерівність (23) випливає з нерівності (19). □

Умова (18) при $v = T^{-1}$ виконується, коли існує функція $\alpha = \{\alpha(u), u \geq 0\}$ така, що $\alpha(u) > 0, \alpha(u)$ — монотонно не спадає при $u > 0$, $\alpha(u) \to \infty$ при $u \to \infty$ і збігається інтеграл

$$\int_0^\infty c_T(u) d\Big(-\frac{1}{\alpha(u)}\Big) = \int_0^\infty c_T(u) \frac{d\alpha(u)}{\alpha^2(u)} < \infty,$$

для якої

$$\int_0^\infty \alpha^2(u) dF(u) < \infty.$$

Тоді має місце нерівність (23), де

$$V_{\Lambda,T} = T^{\frac{1}{2}} I_r^{\frac{1}{2}} \int_\Lambda^\infty c_T(u) d\Big(-\frac{1}{\alpha(u)}\Big) \Big(\int_\Lambda^\infty \alpha^2(u) dF(u)\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 5. *Нехай $L_U(T)$ — це простір Орліча, що породжується на $T = [0, T]$ C — функцією $U(x)$ такою, що функція $\sqrt{U(x)}$ опукла, $c_T(u)$ задано в (17) при $v = T^{-1}$. Нехай для випадкового процесу X виконується умова*

$$\int_0^\infty c_T(u) \frac{dF(u)}{(F(\infty) - F(u))^{\frac{1}{2}}} < \infty.$$

Тоді з ймовірністю одиниця випадковий процес X належить простору $L_U(T)$ та для будь-яких $\Lambda > 0$, $r > \frac{1}{2}$ при $\epsilon > \frac{V_{\Lambda,T}}{(sin(1))^r}$ має місце нерівність (23), де

$$V_{\Lambda,T} = T^{\frac{1}{2}} I_r^{\frac{1}{2}} \int_\Lambda^\infty c_T(u) \Big(\frac{1}{F(\infty) - F(u)} - \frac{1}{F(\infty) - F(\Lambda)}\Big)^{\frac{1}{2}} dF(u). \qquad (24)$$

Доведення. Доведення теореми випливає з теореми 4. Покладемо $\alpha(u) = \frac{F(\infty)}{F(\infty) - F(u)}$, тоді

$$\int_\Lambda^u \alpha^2(u) dF(u) = \int_\Lambda^u \frac{F^2(\infty)}{(F(\infty) - F(u))^2} dF(u) =$$

$$= F^2(\infty) \Big(\frac{1}{F(\infty) - F(u)} - \frac{1}{F(\infty) - F(\Lambda)}\Big),$$

а

$$d\Big(-\frac{1}{\alpha(u)}\Big) = \frac{dF(u)}{F(\infty)}.$$

Отже, $V_{\Lambda,T}$ визначається за формулою (24). Оскільки при таких $\alpha(u)$

$$\int_0^\infty c_T(u) \Big(\int_0^u \alpha^2(u) dF(u)\Big)^{\frac{1}{2}} d\Big(-\frac{1}{\alpha(u)}\Big) \leq$$

$$\leq \int_0^\infty c_T(u) \frac{dF(u)}{(F(\infty) - F(u))^{\frac{1}{2}}} < \infty,$$

то виконується умова (18). □

Умові опуклості $\sqrt{U(x)}$ задовільняють наступні C — функції

$$U(x) = A|x|^p, \quad x \in R, \quad A > 0, \quad p > 2,$$

$$U(x) = A(\exp\bigl(|x|^p\bigr) - 1), \quad x \in R, \quad A > 0, \quad p \geq 2,$$

$$U(x) = A|x|^p \ln(|x| + 1), \quad x \in R, \quad A \geq 1, \quad p \geq 2.$$

На основі отриманих результатів визначаються параметри A-моделі. Для заданих $0 < \alpha < 1$, $0 < \gamma < 1$ та $\delta > 0$ на основі теореми 2 та леми 2 визначаємо параметри $\Lambda > 0$ та розбиття D_Λ. Використання параметра γ дозволяє знаходити баланс між Λ та n. Перевагу потрібно віддавати тим значенням, де менше n. У випадку, коли процес стаціонарний, для визначення параметра Λ використовуються результати теорем 3–5, в залежності від області визначення випадкового процесу.

Література

1. Козаченко Ю. В. Сходимость стохастических интегралов в пространствах Орлича. // Теория вероятн. и мат. статистика. — 1989. — 40. — С. 37–44.
2. Пашко А. А. Об оценке распределения супремума субгауссовских интегралов. // Теория вероятн. и мат. статистика.— 1992. – 46. — С. 124–132.
3. Пашко А. А. Равномерная сходимость субгауссовских интегралов // Теория вероятностей и ее применения. — 1998. — Т. 43, Вып. 4. — С. 793–798.
4. Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В. Метрические характеристики случайных величин и процессов. — К:ТВиМС, 1998. – 289 с.
5. Ермаков С. М., Михайлов Г. А. Статистическое моделирование. — М: Наука, 1982. – 296 с.
6. Prigarin S. M. Spectral Models of Random Fields in Monte Carlo Methods. — Utrecht:VSP, 2001. – 195p.
7. Prigarin S. M., Martin F., Winkler G. Numerical models of binary random fields on the basis of thresholds of Gaussian functions. // СибЖВМ. — 2004. — Т. 5, №2. — С. 57—67.
8. Prigarin S. M., Winkler G. Numerical solution of boundary value problems for stochastic differential equations on the basis of the Gibbs sampler. // Proc. ICCM-2002, Novosibirsk: ICMMG Publish. — 2002. — Pt. 1. — P. 254–258.
9. Пригарин С. М. Методы численного моделирования случайных процессов и полей. — Новосибирск, 2005. — 259с.
10. Ядренко М. Й. Спектральная теория случайных полей. — К.: Вища школа, 1980. — 208с.
11. Пашко А. О. Чисельне моделювання гауссових однорідних випадкових полів. // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. — 2013. — Вип. 24, №1. — С. 116–120.
12. Козаченко Ю. В., Пашко А. О. Про моделювання випадкових полів І. // Теор. ймов. та мат. статистика. — 1999. — 61. — С. 61–74.
13. Козаченко Ю. В., Пашко А. О. Про моделювання випадкових полів ІІ. // Теор. ймов. та мат. статистика. — 1999. — 62. — С. 61–74.
14. Пашко А. О. Чисельне моделювання субгауссових випадкових полів. // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. науки. —2006. — Вип. №1. — С. 35–39.

15. Пашко А. О. Спектральні моделі гауссових випадкових процесів. // VI міжнародна конференція імені академіка І.І. Ляшка "Обчислювальна та прикладна математика". Матеріали конференції. 5–6 вересня 2013. Київ. — 2013. — С. 177–180.
16. Козаченко Ю. В., Пашко А. О., Розора І. В. Моделювання випадкових полів. — К.: Задруга, 2007. – 232 с.

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна.

Надійшла 01.10.2013