Журнал обчислювальної та прикладної математики | **2013, №4(114)** | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.91

ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

А. Г. Руткас, М. С. Филипковская

Резюме. Для математических моделей двух нелинейных радиотехнических фильтров устанавливаются условия гладкой детерминированной эволюции состояний на бесконечном интервале времени. Выводы опираются на доказанную авторами теорему существования и единственности глобального решения дифференциально-алгебраического уравнения, в котором нелинейная функция может не удовлетворять глобальному условию Липшица. Указанная теорема и проверка ее условий в двух задачах настоящей статьи используют метод продолжения решений с помощью дифференциальных неравенств с функциями Ляпунова и Ла-Салля.

Введение

В предыдущей статье авторов [1] доказана глобальная теорема существования и единственности решения задачи Коши для дифференциально-алгебраического уравнения, основанная на спектральном анализе характеристического пучка матриц линейной части уравнения и методе продолжения решения обыкновенного дифференциального уравнения с помощью дифференциальных неравенств с функциями Ляпунова и Ла-Салля.

Дифференциально-алгебраические уравнения (см. (4)), не разрешенные относительно производных, возникают в теории электрических цепей, радиотехнике и электронике, математической экономике, робототехнике, дескрипторных системах управления [2, 3, 4, 5, 6].

В настоящей статье мы проверяем выполнения условий указанной глобальной теоремы для вырожденных систем дифференциально-алгебраических уравнений двух нелинейных радиотехнических фильтров, характеризуя, с одной стороны, динамику этих физических устройств, с другой стороны — демонстрируя эффективность применения абстрактной теоремы из [1].

1. Модель импедансного нелинейного четырехполюсного фильтра

Рассмотрим импедансную задачу для четырехполюсного нелинейного радиотехнического фильтра с нелинейными сопротивлениями φ_1 и φ_2, проводимостями h_1 и h_2, линейными сопротивлениями r_1 и r_2, проводимостью

g и инерционными элементами — индуктивностью L и емкостью C (см. рис. 1). Параметры L, C, r_1, r_2, g являются положительными и вещественными, токи $I_1(t)$ и $I_2(t)$ заданы и непрерывны при $t \geq 0$.

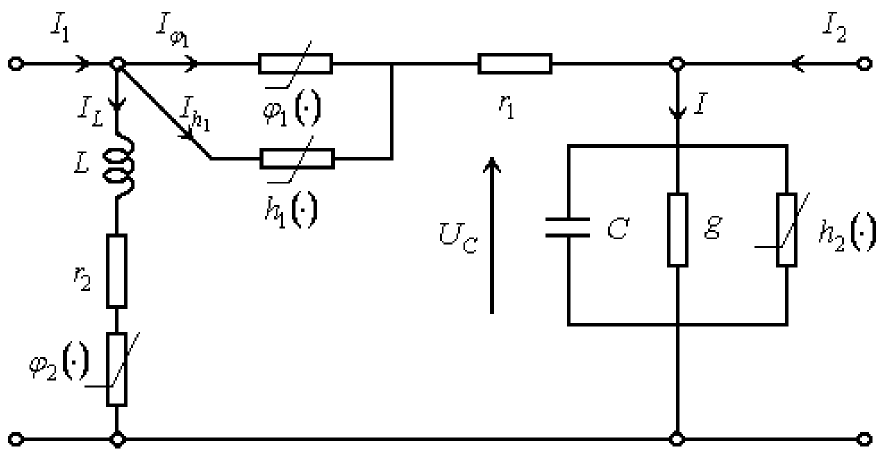

Рис. 1. Схема электрической цепи четырехполюсника

Уравнения Кирхгофа для данной цепи имеют вид:

$$I_1 = I_{\varphi_1} + I_{h_1} + I_L, \quad I_L = I_{r_2} = I_{\varphi_2}, \quad I_{r_1} = I_{\varphi_1} + I_{h_1},$$

$$I = I_2 + I_{r_1}, \quad I = I_C + I_g + I_{h_2},$$

$$U_{\varphi_1} = U_{h_1}, \quad U_C = U_g = U_{h_2}, \quad U_{\varphi_2} + U_{r_2} + U_L - U_{\varphi_1} - U_{r_1} = U_C.$$

Ток и напряжение на каждом элементе связаны следующим образом:

$$U_{r_k} = r_k I_{r_k}, \quad U_{\varphi_k} = \varphi_k\left(I_{\varphi_k}\right), \quad I_{h_k} = h_k\left(U_{h_k}\right), \ k = 1, 2; \quad I_g = g u_g,$$

$$U_L = L\frac{dI_L}{dt}, \quad I_C = C\frac{dU_C}{dt}.$$

С помощью элементарных преобразований из приведенных уравнений легко исключаются все переменные, кроме $x_1 = I_{\varphi_1}$, $x_2 = I_L$, $x_3 = U_C$ и заданных токов I_1, I_2. Эти переменные удовлетворяют системе из трех уравнений:

$$L\frac{d}{dt}x_2 - r_1 x_1 + r_2 x_2 - x_3 = \varphi_1(x_1) + r_1 \gamma(x_1) - \varphi_2(x_2), \tag{1}$$

$$C\frac{d}{dt}x_3 - x_1 + g x_3 = I_2(t) + \gamma(x_1) - h_2(x_3), \tag{2}$$

$$x_1 + x_2 = I_1(t) - \gamma(x_1), \tag{3}$$

где $\gamma(x_1) = h_1(\varphi_1(x_1))$.

Векторная форма системы имеет вид вырожденного дифференциально-алгебраического уравнения

$$\frac{d}{dt}(Ax) + Bx = f(t, x), \tag{4}$$

где $A = \begin{pmatrix} 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & C \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -r_1 & r_2 & -1 \\ -1 & 0 & g \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$,
$f(t,x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) + r_1\gamma(x_1) - \varphi_2(x_2) \\ I_2(t) + \gamma(x_1) - h_2(x_3) \\ I_1(t) - \gamma(x_1) \end{pmatrix}$.

Пусть $\varphi_1(x_1)$, $\varphi_2(x_2)$, $h_2(x_3)$, $\gamma(x_1) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, тогда $f(t,x) \in C\left([0,\infty) \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3\right)$ и $\dfrac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ непрерывна на $[0,\infty) \times \mathbb{R}^3$. Характеристический пучок $\lambda A + B$ является регулярным, поскольку

$$\det(\lambda A + B) = (\lambda C + g)(\lambda L + r_2 + r_1) + 1 \not\equiv 0$$

и имеет индекс 1, т. к. норма резольвенты

$$\begin{aligned} R(\lambda) &= (\lambda A + B)^{-1} = \\ &= \frac{1}{\det(\lambda A + B)} \begin{pmatrix} -(\lambda C + g) & -1 & (\lambda C + g)(\lambda L + r_2) \\ \lambda C + g & 1 & r_1(\lambda C + g) + 1 \\ -1 & \lambda L + r_2 + r_1 & \lambda L + r_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ограничена при больших $|\lambda|$.

Вычислим используемые в [1] спектральные проекторы P_k, Q_k, $k = 1, 2$ [7], операторы $G = AP_1 + BP_2$ [8], G^{-1} и проекции $P_k x$ вектора x на спектральные подпространства $X_k = P_k\mathbb{R}^3$ ($k = 1, 2$), которые в координатном базисе пространства $\mathbb{R}^3$ представимы в виде:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & r_1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -r_1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ G^{-1} = \begin{pmatrix} -L^{-1} & 0 & 1 - r_1 L^{-1} \\ L^{-1} & 0 & r_1 L^{-1} \\ 0 & C^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix},$$

$$z = P_1 x = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix},\ u = P_2 x = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

Найдем

$$Q_1 f(t,x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) - \varphi_2(x_2) + r_1 I_1(t) \\ -h_2(x_3) + I_2(t) \\ 0 \end{pmatrix},\ Q_2 f(t,x) = \begin{pmatrix} r_1(\gamma(x_1) - I_1(t)) \\ \gamma(x_1) - I_1(t) \\ I_1(t) - \gamma(x_1) \end{pmatrix},$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(Q_2 f(t,x)) - B\right] P_2 = \begin{pmatrix} r_1(\gamma'(x_1) + 1) & r_1(\gamma'(x_1) + 1) & 0 \\ \gamma'(x_1) + 1 & \gamma'(x_1) + 1 & 0 \\ -\gamma'(x_1) - 1 & -\gamma'(x_1) - 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\gamma'(x_1) = \dfrac{d\gamma(x_1)}{dx_1}$.

Проверим выполнение условий теоремы 1 из статьи [1].

Уравнение $BP_2x = Q_2f\,(t,x)$ эквивалентно полученному выше уравнению (3), которое можно записать в виде

$$u_1 = I_1\,(t) - \gamma\,(z_1 + u_1)\,. \tag{5}$$

Согласно условию (13) из [1] необходимо, чтобы $\forall t \geq 0\ \forall z \in X_1\ \exists u \in X_2$ такое, что выполнено (5) или, что равносильно, $\forall t \geq 0\ \forall z_1 \in \mathbb{R}\ \exists u_1 \in \mathbb{R}$ такое, что выполнено (5).

В координатном базисе пространства $\mathbb{R}^3$ рассмотрим функцию

$$\hat{\Phi}(u) = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(Q_2f(t,z+u)\right) - B\right]P_2 = \left(\gamma'(z_1+u_1)+1\right)\begin{pmatrix} r_1 & r_1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Найдем ограничения, при которых для любых $u = v,\ u = w \in X_2$, удовлетворяющих (5), сужение функции (6) на X_2 является *базисно обратимым оператором* (см. определение 3 из [1]) на выпуклой оболочке $conv\{v,w\} \subset X_2$. Учитывая, что $\dim X_2 = \dim Y_2 = 1$, а сужение проектора Q_2 на $Y_2 = Q_2\mathbb{R}^3$ является единицей в Y_2, *аддитивным разложением единицы в* Y_2 (см. определение 2 из [1]) будет сужение Θ_1 проектора Q_2 на одномерное подпространство его образов. Сужение Λ оператора $\hat{\Lambda} = Q_2\hat{\Phi}(\tilde{u}) = \hat{\Phi}(\tilde{u})$, где $\tilde{u} \in conv\{v,w\}$ и $u = v,\ u = w \in X_2$ удовлетворяют (5), на одномерное подпространство X_2 является обратимым оператором из X_2 в Y_2, если $\gamma'\,(z_1 + \tilde{u}_1) \neq -1,\ z_1 \in \mathbb{R}$. Действительно, при выполнении последнего условия из равенства $\hat{\Lambda}u = 0,\ u \in X_2$, следует $u = 0$. Тогда Λ является базисно обратимым оператором на $conv\{v,w\} \subset X_2$.

Представим $Q_1f\,(t,x)$ в виде (15) из [1]:

$$Q_1f(t,x) = S_1(t)\,P_1x + \psi(t,x) + \Pi(x)\,e(t),$$

где $S_1(t)$ — нулевая матрица, $\Pi(x)$ — единичная матрица (для которой условие ограниченности (16) из [1] выполняется автоматически),

$$e(t) = \begin{pmatrix} r_1I_1(t) \\ I_2(t) \\ 0 \end{pmatrix},\ \psi(t,x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) - \varphi_2(x_2) \\ -h_2(x_3) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем $G^{-1}\psi(t,x) = \begin{pmatrix} -L^{-1}\left[\varphi_1(x_1) - \varphi_2(x_2)\right] \\ L^{-1}\left[\varphi_1(x_1) - \varphi_2(x_2)\right] \\ -C^{-1}h_2(x_3) \end{pmatrix}.$

Выберем $H = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$. Очевидно, что $H = H^* > 0$, $HP_1x = \begin{pmatrix} -Lx_2 \\ Lx_2 \\ Cx_3 \end{pmatrix}$,

$\left(HP_1x,\, G^{-1}\psi(t,x)\right) = 2\left[\varphi_1(x_1)\,x_2 - \varphi_2(x_2)\,x_2\right] - h_2(x_3)\,x_3.$

Далее найдем ограничения на функции $\varphi_k,\ h_j$, при которых для любого конечного интервала $0 \leq t \leq T$ найдется $R = R_T > 0$ такое, что если $\|P_1x\| = \sqrt{2x_2^2 + x_3^2} \geq R_T$ и выполнено (3), то $\left(HP_1x, G^{-1}\psi(t,x)\right) \leq 0$. В этом случае выполняется условие (17) теоремы 1 из [1].

Пусть $M = \max\limits_{t\in[0,T]} I_1(t)$, тогда, учитывая (3), получим

$$\big(HP_1x, G^{-1}\psi(t,x)\big) = 2\left[\varphi_1(x_1)\left(I_1(t) - \gamma(x_1) - x_1\right) - \varphi_2(x_2)\,x_2\right] - h_2(x_3)\,x_3 \le$$

$$\le 2\left|M\varphi_1(x_1)\right| - 2\left[\varphi_1(x_1)\left(\gamma(x_1) + x_1\right) - \varphi_2(x_2)\,x_2\right] - h_2(x_3)\,x_3.$$

Искомое условие на функции φ_k, h_j таково: для любого $T > 0$ существует R_T такое, что

$$2\left|M\varphi_1(x_1)\right| - 2\left[\varphi_1(x_1)\left(\gamma(x_1) + x_1\right) - \varphi_2(x_2)\,x_2\right] - h_2(x_3)\,x_3 \le 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{2x_2^2 + x_3^2} \ge R_T. \tag{7}$$

Итак, пусть функции нелинейных сопротивлений и проводимостей $\varphi_1(x_1)$, $\varphi_2(x_2)$, $h_2(x_3)$, $\gamma(x_1) \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и внешние токи $I_1(t)$, $I_2(t) \in C([0,\infty),\mathbb{R})$ удовлетворяют следующим условиям: $\forall t \ge 0\, \forall z_1 \in \mathbb{R}\, \exists u_1 \in \mathbb{R}$ такое, что выполнено (5); $\gamma'(z_1 + \tilde{u}_1) \ne -1$ $(z_1 \in \mathbb{R})$ при любом $\tilde{u} \in conv\{v, w\}$ и любых v, $w \in X_2$, удовлетворяющих (5) при $u = v$, $u = w$; для любого $T > 0$ существует $R_T > 0$ такое, что справедливо (7). Тогда по теореме 1 из [1] для всякой начальной точки $\left(t_0, x^0\right) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^3$, удовлетворяющей алгебраическому уравнению (3), существует единственное решение $x(t)$ уравнения (4) на полуоси $t_0 \le t < \infty$ с начальным условием $x(t_0) = x^0$.

Рассмотрим частные случаи.

Пусть

$$\varphi_1(y) = \alpha_1 y^3,\ \varphi_2(y) = \alpha_2 y^3,\ h_2(y) = \alpha_3 y^3,\ \gamma(y) = h_1(\varphi_1(y)) = \alpha_4 y^9, \tag{8}$$

$\alpha_k > 0$, $k = \overline{1,4}$, $y \in \mathbb{R}$. Заметим, что кубические зависимости в нелинейных сопротивлениях и проводимостях часто встречаются в реальных радиотехнических системах. Очевидно, $\forall t \ge 0$ $\forall z_1 \in \mathbb{R}$ $\exists u_1 \in \mathbb{R}$ такое, что $z_1 = I_1(t) - \alpha_4(z_1 + u_1)^9$; $\gamma'(z_1 + \tilde{u}_1) \ne -1$ $(z_1 \in \mathbb{R})$ при любом $\tilde{u} \in conv\{v, w\}$ и любых v, $w \in X_2$, удовлетворяющих (5) при $u = v$, $u = w$. Проверим, что $\big(HP_1x, G^{-1}\psi(t,x)\big) \le 0$ при $x \in \mathbb{R}^3$ таком, что $\|P_1x\| = \sqrt{2x_2^2 + x_3^2} \ge R_T$ и $x_1 + x_2 = I_1(t) - \alpha_4 x_1^9$. Если $M = \max\limits_{t\in[0,T]} I_1(t)$, то для любого $T > 0$ существует R_T такое, что $\big(HP_1x, G^{-1}\psi(t,x)\big) \le 2\alpha_1\left|Mx_1^3\right| - 2\alpha_1\,\alpha_4\,x_1^{12} - 2\alpha_1\,x_1^4 - 2\alpha_2\,x_2^4 - \alpha_3\,x_3^4 \le 0$ при $x \in \mathbb{R}^3$ таком, что $\sqrt{2x_2^2 + x_3^2} \ge R_T$. Значит, выполнено условие (7).

Следовательно, если нелинейные сопротивления и проводимости имеют вид (8), то по теореме 1 из [1] для любой начальной точки $\left(t_0, x^0\right) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^3$ $\left(x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, x_3^0\right)^t\right)$, удовлетворяющей условию согласования $x_1^0 + x_2^0 = I_1(t_0) - \alpha_4\left(x_1^0\right)^9$, существует единственное решение $x(t)$ уравнения (4) на полуоси $t_0 \le t < \infty$ с начальным условием $x(t_0) = x^0$.

Условия теоремы 1 из [1] также выполнены в более общем случае для функций вида $\varphi_1(y) = \alpha_1\, y^{2m-1}$, $\varphi_2(y) = \alpha_2\, y^{2n-1}$, $h_2(y) = \alpha_3\, y^{2r-1}$, $\gamma(y) = h_1(\varphi_1(y)) = \alpha_4\, y^{(2s-1)(2m-1)}$, m, n, r, $s \in \mathbb{N}$, $\alpha_k > 0$, $k = \overline{1,4}$, $y \in \mathbb{R}$.

Аналогичное утверждение верно и для нелинейных функций $\varphi_1(y) = \alpha_1\, y^{\frac{1}{2m+1}}$, $\varphi_2(y) = \alpha_2\, y^{\frac{1}{2n+1}}$, $h_2(y) = \alpha_3\, y^{\frac{1}{2r+1}}$, $\gamma(y) = h_1(\varphi_1(y)) = \alpha_4\, y^{\frac{1}{2m+1}}$, $m,\ n,\ r \in \mathbb{N}$, $\alpha_k > 0$, $k = \overline{1,4}$, $y \in \mathbb{R}$.

Можно построить еще более общий класс допустимых функции φ_k, h_j, $k = \overline{1,2}$, налагая ограничения на скорости роста одних функций относительно других.

2. Модель гибридного нелинейного четырехполюсного фильтра

Рассмотрим гибридную задачу для четырехполюсного нелинейного радиотехнического фильтра с нелинейными сопротивлениями φ_1, φ_3, φ_4, проводимостью h, линейными сопротивлениями r_1, r_2, r_3, проводимостью g и инерционными элементами — индуктивностью L и емкостью C (см. рис. 2). Параметры L, C, r_1, r_2, r_3, g являются положительными и вещественными, ток $I_1(t)$ и напряжение $U_1(t)$ заданы и непрерывны при $t \geq 0$.

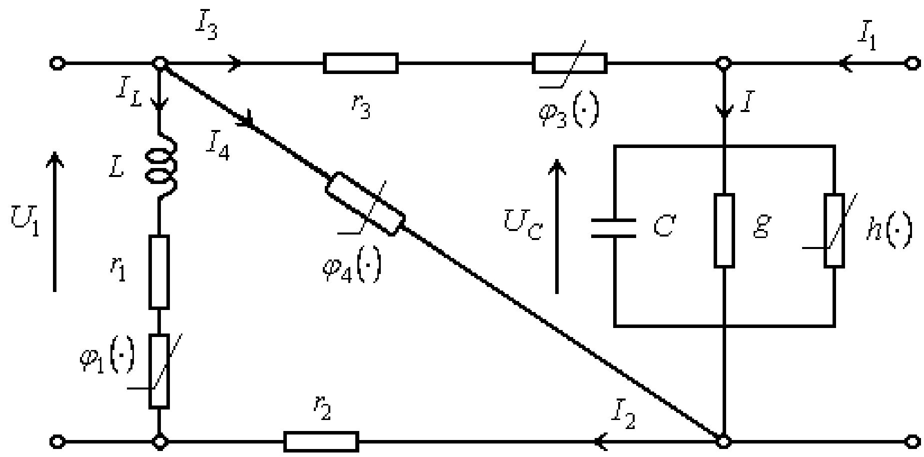

Рис. 2. Схема электрической цепи четырехполюсника

Уравнения Кирхгофа для данной цепи имеют вид:

$$I_3 + I_4 = I_2, \quad I = I_3 + I_1,\ I = I_C + I_g + I_h, \quad U_1 = U_L + U_{r_1} + U_{\varphi_1},$$

$$U_C = U_g = U_h, \quad U_1 = U_{\varphi_4} + U_{r_2}, \quad U_{r_3} + U_{\varphi_3} + U_C = U_{\varphi_4}.$$

Ток и напряжение на каждом элементе связаны следующим образом:

$$U_{r_k} = r_k I_k,\ k = 2,\ 3; \quad U_{\varphi_k} = \varphi_k(I_k),\ k = 3,\ 4; \quad U_{r_1} = r_1 I_L,$$

$$U_{\varphi_1} = \varphi_1(I_L), \quad U_L = L\frac{dI_L}{dt}, \quad I_C = C\frac{dU_C}{dt}, \quad I_h = h(U_h), \quad I_g = gU_g.$$

Используя элементарные преобразования, исключаем из приведенных уравнений все переменные, кроме $x_1 = I_L$, $x_2 = U_C$, $x_3 = I_3$, $x_4 = I_4$, а также заданных тока I_1 и напряжения U_1, получаем систему четырех уравнений:

$$L\frac{d}{dt}x_1 + r_1 x_1 = U_1(t) - \varphi_1(x_1), \tag{9}$$

$$C\frac{d}{dt}x_2 + g\,x_2 - x_3 = I_1(t) - h(x_2), \tag{10}$$

$$-x_2 - r_3 x_3 = \varphi_3(x_3) - \varphi_4(x_4), \tag{11}$$

$$r_2(x_3 + x_4) = U_1(t) - \varphi_4(x_4). \tag{12}$$

Векторная форма системы имеет вид

$$\frac{d}{dt}(Ax) + Bx = f(t,x), \tag{13}$$

где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, $A = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -r_3 & 0 \\ 0 & 0 & r_2 & r_2 \end{pmatrix}$,

$f(t,x) = \begin{pmatrix} U_1(t) - \varphi_1(x_1) \\ I_1(t) - h(x_2) \\ \varphi_3(x_3) - \varphi_4(x_4) \\ U_1(t) - \varphi_4(x_4) \end{pmatrix}$.

Пусть $h(x_2)$, $\varphi_1(x_1)$, $\varphi_3(x_3)$, $\varphi_4(x_4) \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, тогда $f(t,x) \in C\left([0,\infty)\times\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^4\right)$ и $\dfrac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ непрерывна на $[0,\infty)\times\mathbb{R}^4$. Характеристический пучок $\lambda A + B$ уравнения (13) является регулярным, поскольку

$$\det(\lambda A + B) = -r_2(\lambda L + r_1)\left[(\lambda C + g)\,r_3 + 1\right] \not\equiv 0$$

и имеет индекс 1, т. к. норма резольвенты

$$R(\lambda) = (\lambda A + B)^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\lambda L + r_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{r_3}{(\lambda C + g)\,r_3 + 1} & -\dfrac{1}{(\lambda C + g)\,r_3 + 1} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{(\lambda C + g)\,r_3 + 1} & -\dfrac{\lambda C + g}{(\lambda C + g)\,r_3 + 1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(\lambda C + g)\,r_3 + 1} & \dfrac{\lambda C + g}{(\lambda C + g)\,r_3 + 1} & \dfrac{1}{r_2} \end{pmatrix}$$

ограничена при больших $|\lambda|$.

Как и в п. 1 вычислим спектральные проекторы P_k, Q_k, $k = 1, 2$, оператор G^{-1} и проекции $P_1 x$, $P_2 x$, которые в координатном базисе пространства $\mathbb{R}^4$ представимы в виде

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -r_3^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & r_3^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_3^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & -r_3^{-1} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -r_3^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} L^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C^{-1} & -(r_3 C)^{-1} & 0 \\ 0 & -(r_3 C)^{-1} & -r_3^{-1} + r_3^{-2} C^{-1} & 0 \\ 0 & (r_3 C)^{-1} & r_3^{-1} - r_3^{-2} C^{-1} & r_2^{-1} \end{pmatrix},$$

$$z = P_1 x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -r_3^{-1} x_2 \\ r_3^{-1} x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}, \quad u = P_2 x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 + r_3^{-1} x_2 \\ x_4 - r_3^{-1} x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}.$$

Найдем $Q_1 f(t,x) = \begin{pmatrix} U_1(t) - \varphi_1(x_1) \\ I_1(t) - h(x_2) - r_3^{-1} [\varphi_3(x_3) - \varphi_4(x_4)] \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$

$$Q_2 f(t,x) = \begin{pmatrix} 0 \\ r_3^{-1} [\varphi_3(x_3) - \varphi_4(x_4)] \\ \varphi_3(x_3) - \varphi_4(x_4) \\ U_1(t) - \varphi_4(x_4) \end{pmatrix}, \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} (Q_2 f(t,x)) - B \right] P_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_3^{-1} \left(r_3^{-1} [\varphi_3'(x_3) + \varphi_4'(x_4)] + 1 \right) & r_3^{-1} (\varphi_3'(x_3) + r_3) & -r_3^{-1} \varphi_4'(x_4) \\ 0 & r_3^{-1} [\varphi_3'(x_3) + \varphi_4'(x_4)] + 1 & \varphi_3'(x_3) + r_3 & -\varphi_4'(x_4) \\ 0 & r_3^{-1} \varphi_4'(x_4) & -r_2 & -\varphi_4'(x_4) - r_2 \end{pmatrix}.$$

Проверим, что условия теоремы 1 из статьи [1] выполнены.

Уравнение $BP_2 x = Q_2 f(t,x)$ эквивалентно системе уравнений (11), (12), которую можно записать в виде

$$\begin{cases} -r_3 u_3 = \varphi_3 \left(u_3 - r_3^{-1} z_2 \right) - \varphi_4 \left(u_4 + r_3^{-1} z_2 \right), \\ r_2 (u_3 + u_4) = U_1(t) - \varphi_4 \left(u_4 + r_3^{-1} z_2 \right). \end{cases} \tag{14}$$

Согласно условию (13) из [1] необходимо, чтобы $\forall t \geq 0$ $\forall z \in X_1$ $\exists u \in X_2$ такое, что выполнено (14), либо $\forall t \geq 0$ $\forall z_2 \in \mathbb{R}$ $\exists u_3$, $u_4 \in \mathbb{R}$ такие, что выполнено (14).

В координатном базисе пространства $\mathbb{R}^4$ рассмотрим оператор-функцию

$$\hat{\Phi}(u) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\varphi_3'(u_3 - \xi) + \varphi_4'(u_4 + \xi)}{r_3^2} + \dfrac{1}{r_3} & \dfrac{\varphi_3'(u_3 - \xi)}{r_3} + 1 & -r_3^{-1} \varphi_4'(u_4 + \xi) \\ 0 & \dfrac{\varphi_3'(u_3 - \xi) + \varphi_4'(u_4 + \xi)}{r_3} + 1 & \varphi_3'(u_3 - \xi) + r_3 & -\varphi_4'(u_4 + \xi) \\ 0 & r_3^{-1} \varphi_4'(u_4 + \xi) & -r_2 & -\varphi_4'(u_4 + \xi) - r_2 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

где $\xi = r_3^{-1} z_2 \in \mathbb{R}$. Найдем ограничения, при которых для любых $v,\ w \in X_2$, удовлетворяющих (14) при $u = v,\ u = w$, сужение функции (15) на X_2 является базисно обратимым оператором на выпуклой оболочке $conv\{v, w\} \subset \subset X_2$. В координатном базисе пространства $\mathbb{R}^4$ рассмотрим проекторы

$$\Theta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Theta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\Theta_1 + \Theta_2 = Q_2).$$

Учитывая, что $\dim X_2 = \dim Y_2 = 2$, а сужение проектора Q_2 на $Y_2 = Q_2\mathbb{R}^4$ является единицей в Y_2, аддитивным разложением единицы в Y_2 будут сужения проекторов $\Theta_1,\ \Theta_2$ на двумерное подпространство Y_2. Оператор $\hat{\Lambda} = \Theta_1 \hat{\Phi}\left(\tilde{u}^1\right) + \Theta_2 \hat{\Phi}\left(\tilde{u}^2\right)$ в координатном базисе пространства $\mathbb{R}^4$ имеет вид

$$\hat{\Lambda} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\varphi_3'(\tilde{u}_3^1 - \xi) + \varphi_4'(\tilde{u}_4^1 + \xi)}{r_3^2} + \dfrac{1}{r_3} & \dfrac{\varphi_3'(\tilde{u}_3^1 - \xi)}{r_3} + 1 & -r_3^{-1}\varphi_4'(\tilde{u}_4^1 + \xi) \\ 0 & \dfrac{\varphi_3'(\tilde{u}_3^1 - \xi) + \varphi_4'(\tilde{u}_4^1 + \xi)}{r_3} + 1 & \varphi_3'(\tilde{u}_3^1 - \xi) + r_3 & -\varphi_4'(\tilde{u}_4^1 + \xi) \\ 0 & r_3^{-1}\varphi_4'(\tilde{u}_4^2 + \xi) & -r_2 & -\varphi_4'(\tilde{u}_4^2 + \xi) - r_2 \end{pmatrix},$$

где $\tilde{u}^k \in conv\{v, w\}$, $k = 1,\ 2$, $\ \xi = r_3^{-1} z_2 \in \mathbb{R}$.

Найдем условия, при которых оператор $\Lambda = \hat{\Lambda}|_{X_2} : X_2 \to Y_2$ обратим, т. е. из равенства $\hat{\Lambda} u = 0$, $u = P_2 x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 + r_3^{-1} x_2 \\ x_4 - r_3^{-1} x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \in X_2$, следует, что $u = 0$. Из вида вектора u вытекает, что $u_1 = u_2 = 0$. Обозначим $u_3 = \alpha$, $u_4 = \beta$. Из равенства

$$\hat{\Lambda} u = \begin{pmatrix} 0 \\ \left[r_3^{-1}\varphi_3'(\tilde{u}_3^1 - \xi) + 1\right]\alpha - r_3^{-1}\varphi_4'(\tilde{u}_4^1 + \xi)\beta \\ \left[\varphi_3'(\tilde{u}_3^1 - \xi) + r_3\right]\alpha - \varphi_4'(\tilde{u}_4^1 + \xi)\beta \\ -r_2\alpha - \left[\varphi_4'(\tilde{u}_4^2 + \xi) + r_2\right]\beta \end{pmatrix} = 0$$

получается система трех уравнений. Поскольку в $\hat{\Lambda} u$ 2-я и 3-я строки линейно зависимы, то остается система из двух уравнений:

$$\alpha\left[\varphi_3'(\tilde{u}_3^1 - \xi) + r_3\right] - \beta\,\varphi_4'(\tilde{u}_4^1 + \xi) = 0\,, \qquad (16)$$

$$-\alpha\, r_2 - \beta\left[\varphi_4'(\tilde{u}_4^2 + \xi) + r_2\right] = 0\,. \qquad (17)$$

Из (17) следует, что $\alpha = -\beta\left[r_2^{-1}\varphi_4'(\tilde{u}_4^2 + \xi) + 1\right]$. Подставляя α в (16) и умножая полученное выражение на $-r_2$, получаем

$$\beta\left\{\left[\varphi_4'(\tilde{u}_4^2 + \xi) + r_2\right]\left[\varphi_3'(\tilde{u}_3^1 - \xi) + r_3\right] + r_2\,\varphi_4'(\tilde{u}_4^1 + \xi)\right\} = 0\,.$$

Значит $\beta = 0$, а, следовательно, и $\alpha = 0$, если

$$\left[\varphi_4'(\tilde{u}_4^2+\xi)+r_2\right]\left[\varphi_3'(\tilde{u}_3^1-\xi)+r_3\right]+r_2\varphi_4'(\tilde{u}_4^1+\xi)\neq 0, \quad \xi\in\mathbb{R}. \tag{18}$$

Тогда $\hat{\Phi}(u)|_{X_2}$ является базисно обратимым оператором на $conv\{v,w\}\subset X_2$, где $v,\ w\in X_2$ удовлетворяют (14) при $u=v,\ u=w$.

Как и в п. 1 запишем $Q_1 f(t,x) = S_1(t)\,P_1 x + \psi(t,x) + \Pi(x)\,e(t)$, где $S_1(t)$ — нулевая матрица, $\Pi(x)$ — единичная матрица,

$$e(t)=\begin{pmatrix} U_1(t)\\ I_1(t)\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\quad \psi(t,x)=\begin{pmatrix} -\varphi_1(x_1)\\ -h(x_2)-r_3^{-1}\left(\varphi_3(x_3)-\varphi_4(x_4)\right)\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Найдем $G^{-1}\psi(t,x) = \begin{pmatrix} -L^{-1}\varphi_1(x_1)\\ -C^{-1}\left[h(x_2)+r_3^{-1}\left(\varphi_3(x_3)-\varphi_4(x_4)\right)\right]\\ (r_3C)^{-1}\left[h(x_2)+r_3^{-1}\left(\varphi_3(x_3)-\varphi_4(x_4)\right)\right]\\ -(r_3C)^{-1}\left[h(x_2)+r_3^{-1}\left(\varphi_3(x_3)-\varphi_4(x_4)\right)\right]\end{pmatrix}$ и выберем $H=\begin{pmatrix} L&0&0&0\\ 0&C&0&0\\ 0&0&r_3^2C&0\\ 0&0&0&r_3^2C\end{pmatrix}$. Очевидно, что $H=H^*>0$, $HP_1x = \begin{pmatrix} Lx_1\\ Cx_2\\ -r_3Cx_2\\ r_3Cx_2\end{pmatrix}$, $\left(HP_1x, G^{-1}\psi(t,x)\right) = -x_1\varphi_1(x_1) - 3x_2h(x_2) - 3r_3^{-1}x_2(\varphi_3(x_3) - \varphi_4(x_4))$ и, учитывая (11), $\left(HP_1x,\, G^{-1}\psi(t,x)\right) = -x_1\,\varphi_1(x_1) - 3x_2\,h(x_2) + 3r_3^{-1}\,x_2^2 + 3x_2\,x_3$.

Предположим, что для функций $\varphi_1,\ h$ выполнено следующее ограничение: для любого $T>0$ существует R_T такое, что

$$-x_1\,\varphi_1(x_1) - 3x_2\,h(x_2) + 3r_3^{-1}\,x_2^2 + 3x_2\,x_3 \le 0, \tag{19}$$

для любого $x\in\mathbb{R}^4:\ \sqrt{x_1^2+x_2^2\left(1+2r_3^{-2}\right)}\ge R_T$, удовлетворяющего (12), $0\le t\le T$. Тогда выполнено условие (17) из [1].

Итак, пусть нелинейные сопротивления и проводимости непрерывно дифференцируемы, то есть $h(x_2),\ \varphi_1(x_1),\ \varphi_3(x_3),\ \varphi_4(x_4)\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$; $\forall t\ge 0\ \forall z_2\in\mathbb{R}\ \exists u_3,\ u_4\in\mathbb{R}$ такие, что выполнено (14); для любых $u=v,\ u=w\in X_2$, удовлетворяющих (14), выполнено (18) при любых $\tilde{u}^k\in conv\{v,w\}$, $k=1,\,2$; для любого $T>0$ существует $R_T>0$ такое, что выполнено (19) для любого $x\in\mathbb{R}^4$, удовлетворяющего (12) $(0\le t\le T)$ и такого, что $\sqrt{x_1^2+x_2^2\left(1+2r_3^{-2}\right)}\ge R_T$. Тогда по теореме 1 из [1] для всякой начальной точки $\left(t_0,x^0\right)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^4$, удовлетворяющей алгебраическим уравнениям (11), (12), существует единственное решение $x(t)$ уравнения (13) на полуоси $t_0\le t<\infty$ с начальным условием $x\left(t_0\right)=x^0$.

Рассмотрим частные случаи.

Пусть

$$\varphi_1(y)=\alpha_1 y^3,\;\; h(y)=\alpha_2 y^3,\;\; \varphi_3(y)=\alpha_3 y^3,\;\; \varphi_4(y)=\alpha_4 y^3,\;\; \alpha_k>0, \quad k=\overline{1,4},\quad y\in\mathbb{R}. \tag{20}$$

Очевидно, $\forall t\ge 0\;\forall z_2\in\mathbb{R}\;\exists u_3,\; u_4\in\mathbb{R}$ такие, что выполнено (14). Условие (18) принимает вид

$$\left[3\alpha_4(\tilde u_4^2+\xi)^2+r_2\right]\left[3\alpha_3(\tilde u_3^1-\xi)^2+r_3\right]+3\alpha_4\, r_2(\tilde u_4^1+\xi)^2\ne 0,\quad \xi\in\mathbb{R}, \tag{21}$$

где $r_2,\; r_3,\; \alpha_3,\; \alpha_4>0$. Очевидно, для любых $v,\; w\in X_2$, удовлетворяющих (14) при $u=v,\; u=w$, выполнено (21) для любых $\tilde u^k\in conv\{v,w\}$, $k=1,\,2$. Далее необходимо проверить, что $(HP_1x, G^{-1}\psi(t,x))=-\alpha_1\,x_1^4-3\alpha_2\,x_2^4+$ $+3r_3^{-1}x_2^2+3x_2\,x_3\le 0$ при $x\in\mathbb{R}^4$ таком, что $\|P_1x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2\left(1+2r_3^{-2}\right)}\ge R_T$ и $r_2\,(x_3+x_4)=U_1(t)-\alpha_4\,x_4^3,\; 0\le t\le T$. Очевидно, для любого $T>0$ можно выбрать R_T такое, что $-\alpha_1\,x_1^4-3\alpha_2\,x_2^4+3\,r_3^{-1}x_2^2+3\,x_2\,x_3\le 0$ при $x_1,\; x_2,\; x_3\in\mathbb{R}$ таких, что $\sqrt{x_1^2+x_2^2\left(1+2r_3^{-2}\right)}\ge R_T$. Значит, выполнено условие (17) из [1].

Таким образом, если нелинейные сопротивления и проводимости радиотехнического фильтра (рис. 2) имеют вид (20), то по теореме 1 из [1] для любой начальной точки $\left(t_0,x^0\right)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^4$ $\left(x^0=\left(x_1^0,x_2^0,x_3^0,x_4^0\right)^t\right)$, удовлетворяющей условию согласования $\begin{cases}-x_2^0-r_3\,x_3^0=\alpha_3\left(x_3^0\right)^3-\alpha_4\left(x_4^0\right)^3\\ r_2\left(x_3^0+x_4^0\right)=U_1(t)-\alpha_4\left(x_4^0\right)^3\end{cases}$, существует единственное решение $x(t)$ уравнения (13) на полуоси $t_0\le t<\infty$ с начальным условием $x\,(t_0)=x^0$.

Условия теоремы 1 из [1] также выполнены в более общем случае для функций вида $\varphi_1(y)=\alpha_1\,y^{2m+1},\; h(y)=\alpha_2\,y^{2s+1},\; \varphi_3(y)=\alpha_3\,y^{2n-1},\; \varphi_4(y)=$ $=\alpha_4\,y^{2r-1},\; m,\; n,\; r,\; s\in\mathbb{N},\; \alpha_k>0,\; k=\overline{1,4},\; y\in\mathbb{R}$.

Аналогичное утверждение верно для следующих функций: $\varphi_3(y)=a\,y^{\frac{1}{2n+1}},\; \varphi_4(y)=b\,y^{\frac{1}{2r+1}},\; n,\; r\in\mathbb{N},\; a,\; b>0,\; y\in\mathbb{R}$; функции $\varphi_1(y),\; h(y)\in C^1\left(\mathbb{R},\mathbb{R}\right)$ удовлетворяют требованию: для любого $T>0$ существует $R_T>0$ такое, что выполнено (21) для любого $x\in\mathbb{R}^4$, удовлетворяющего (13) $(0\le t\le T)$ и такого, что $\sqrt{x_1^2+x_2^2\left(1+2r_3^{-2}\right)}\ge R_T$.

3. Заключение

Анализ двух рассмотренных задачах показывает, что практическая проверка условий теоремы 1 из [1] является достаточно эффективной и эти условия могут выполняться для нелинейной функции $f(t,x)$ в уравнении (4), не удовлетворяющей глобальному условию Липшица. Установлено, что теорема 1 [1] гарантирует существование глобальных решений уравнений динамики определенных классов нелинейных радиотехнических систем.

В дальнейшем планируется модификация общей теоремы существования и единственности глобального решения дифференциально-алгебраических уравнений вида (4), а также получение аналогичной теоремы в случае сингулярного характеристического пучка матриц линейной части уравнения.

Литература

1. Руткас А. Г., Филипковская М. С. Продолжение решений одного класса дифференциально-алгебраических уравнений. // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2013. — № 1 (111). — С. 135–145.
2. Campbell S. L. Singular systems of differential equations. — San Francisco, CA: Pitman, 1980. — 177 p.
3. Rutkas A. G., Vlasenko L. A. Existence of solutions of degenerate nonlinear differential operador equations. // Nonlinear Oscillations. — 2001. — V. 4, № 2. — P. 252–263.
4. Rutkas A. G., Vlasenko L. A. Existence, uniqueness and continuous dependence for implicit semilinear functional differential equations. // Nonlinear Analysis. TMA. — 2003. — V. 55, № 1-2. — P. 125–139.
5. Власенко Л. А., Лысенко Ю. Г., Руткас А. Г. Об одной стохастической модели динамики предприятий корпорации. // Экономическая кибернетика. — 2011. — № 1-3 (67-69). — С. 4–9.
6. Власенко Л. А. Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями. — Днепропетровск: Системные технологии, 2006. — 273 с.
7. Руткас А. Г. Задача Коши для уравнения $Ax'(t)+Bx(t)=f(t)$. // Дифференциальные уравнения. — 1975. — Т. 11, № 11. — С. 1996–2010.
8. Vlasenko L. Implicit linear time-dependent differential-difference equations and applications. // Mathematical Methods in the Applied Sciences. — 2000. — 23. — P. 937–948.
9. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1974. — 331 с.
10. Ла-Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. — М.: Мир, 1964. — 168 с.
11. Филипковская М. С. Продолжение решений полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений и приложения в нелинейной радиотехнике. // Вісник ХНУ ім. В. Н. Каразіна. Сер. "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління". — 2012. — № 1015, Вип. 19. — С. 306–319.
12. Канторович Л. В., Акилов. Г. П. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1984. — 752 с.
13. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.
14. Шварц Л. Анализ. Т. 1. — М.: Мир, 1972. — 822 с.

Механико-математический факультет, Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, пл. Свободы, 4, Харьков, 61022, Украина.

Поступила 01.10.2013