Журнал обчислювальної та прикладної математики
2013, №4(114)
Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.954

ПРИБЛИЖЁННОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ И ПОЛУОПРЕДЕЛЕННЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

В. Е. Капустян, И. А. Пышнограев

Резюме. В работе построено приближённое оптимальное управление в задаче для параболо-гиперболического уравнения с нелокальными краевыми условиями и полуопределенным критерием качества. Для построенного приближенного управления доказана сходимость, проведены численные эксперименты, характеризующие его свойства.

Введение

Изучение уравнений смешанного типа является одним из важнейших направлений теории уравнений с частными производными. Необходимость исследования краевых задач для уравнений смешанного типа продиктована многочисленными практическими приложениями в газовой динамике, теории бесконечно малых сгибаний поверхностей, в теории оболочек, в магнитной гидродинамике, в теории электронного рассеяния, в математической биологии и других областях ([1], [2]).

Задачи для таких уравнений изучены слабо. В работе [3] найдено решение однородной краевой задачи для параболо-гиперболический уравнений с нелокальными краевыми условиями, в работе [4] результаты расширены на неоднородный случай. Особенностью таких задач при решении является необходимость построения биортогонального базиса. Стоит так же отметить, что были выведены только классические решения, что требует сходимости всех рядов, которые формируют решение краевых задач.

В работе рассматривается приближённое оптимальное управление в задаче для параболо-гиперболического уравнения с нелокальными краевыми условиями и полуопределенным критерием качества.

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$Ly(x,t) = g(x)\hat{u}(t) \tag{1}$$

с начальным

$$y(x,-\alpha) = \varphi(x) \tag{2}$$

и граничным условиями

$$y(0,t)=0,\ y'(0,t)=y'(1,t),\ -\alpha\le t\le T, \tag{3}$$

где функции g,φ считаем задаными, $\hat{u}(t)=v(t),\ t\in[-\alpha,0);\ \hat{u}(t)=u(t)$, $t\in[0,T]$,

$$L\ y\ =\ \begin{cases} y_t\ -\ y_{xx}, & t\ >\ 0,\\ y_{tt}\ -\ y_{xx}, & t\ <\ 0.\end{cases} \tag{4}$$

Пусть управляемый процесс $y(x,t)$ описывается краевой задачей (1)–(3). Требуется найти управления $v^*(t)\in C[-\alpha,0):|v^*(t)|\le 1;|u^*(0)|\le l_0$; $\xi^*(t)\in L_2[0,T]:|\xi^*(t)|\ \le l_1$ почти всюду на $[0,T]$, которые минимизируют функционал

$$I(\hat{u})=0.5((\int\limits_0^1 q(x)(y(x,T)-\psi(x))dx)^2+$$

$$+\gamma(\int\limits_{-\alpha}^0 v^2(t)\ dt+u^2(0)+\int\limits_0^T\xi^2(t)dt)), \tag{5}$$

где $\psi(x)$ — фиксированная функция, $\gamma,l_0,l_1=const\ >0$,

$$u(t)=u(0)+\int\limits_0^t\xi(\tau)d\tau.$$

Сформулированная задача оптимального управления может быть формально сведена к одномерной задаче путём представления решения задачи (1)–(3) в ряд по базису Рисса [4].

Тогда (1)–(5) сводится к задаче определения управлений $v^*(t)\in C[-\alpha,0):$ $|v^*(t)|\le 1;|u^*(0)|\le l_0;\xi^*(t)\in L_2[0,T]:|\xi^*(t)|\ \le l_1$почти всюду на $[0,T]$, минимизирующих критерий качества

$$I(\hat{u})=0.5((\sum_{i=0}^{\infty}q_i\ (y_i(T)-\psi_i))^2+\gamma(\int\limits_{-\alpha}^0 v^2(t)\ dt+u^2(0)+\int\limits_0^T\xi^2(t)dt)), \tag{6}$$

где

$$y_0(T)=\Phi_{1,0}(T)\varphi_0+\Phi_{3,0}(T)\ u(0)+\int\limits_{-\alpha}^0 g_0\Psi_{1,0}(t)v(t)dt+\int\limits_0^T g_0\ \tilde{\Psi}_{1,0}(t)u(t)dt,$$

$$y_{2k-1}(T)=\Phi_{1,2k-1}(T)\varphi_{2k-1}+\Phi_{3,2k-1}(T)u(0)+\int\limits_{-\alpha}^0 g_{2k-1}\Psi_{1,2k-1}(t)\ v(t)dt+$$

$$+\int\limits_0^T g_{2k-1}\tilde{\Psi}_{1,2k-1}(t)\ u(t)dt,$$

$$y_{2k}(T)=\Phi_{1,2k}(T)\varphi_{2k-1}+\Phi_{2,2k}(T)\ \varphi_{2k}+\Phi_{3,2k}(T)u(0)+\int\limits_{-\alpha}^{0}(g_{2k-1}\Psi_{1,2k}(t)+$$

$$+g_{2k}\Psi_{2,2k}(t))v(t)dt+\int\limits_{0}^{T}(g_{2k-1}\tilde{\Psi}_{1,2k}(t)+g_{2k}\ \tilde{\Psi}_{2,2k}(t))u(t)dt. \qquad (7)$$

В представлении (7) приняты такие обозначения:

$$\Phi_{1,0}(T)=1,\Phi_{3,0}(T)=g_0\alpha,\ \Psi_{1,0}(t)=-(\alpha+t),\tilde{\Psi}_{1,0}(t)=\ 1;$$

$$\Phi_{1,2k-1}(T)=\frac{1}{\delta_k(\alpha)\exp\lambda_k^2T},\Phi_{3,2k-1}(T)=\frac{g_{2k-1}\sin\lambda_k\alpha}{\lambda_k\delta_k(\alpha)\exp\lambda_k^2T},$$

$$\Psi_{1,2k-1}(t)=-\frac{\sin\lambda_k(t+\alpha)}{\lambda_k\delta_k(\alpha)\exp\lambda_k^2T},\ \tilde{\Psi}_{1,2k-1}(t)=\exp(-\lambda_k^2(T-t));$$

$$\Phi_{1,2k}(T)=-\frac{\sin\lambda_k\alpha+2\lambda_kT\delta_k(\alpha)+\alpha(\lambda_k\cos\lambda_k\alpha-\sin\lambda_k\alpha)}{\delta_k^2(\alpha)\exp(\lambda_k^2T)},$$

$$\Phi_{2,2k}(T)=\Phi_{1,2k-1}(T),$$

$$\Phi_{3,2k}(T)=\frac{1}{\lambda_k\delta_k^2(\alpha)\exp(\lambda_k^2T)}[-g_{2k-1}(2\sin^2\lambda_k\alpha+2\lambda_kT\delta_k(\alpha)\sin\lambda_k\alpha-$$

$$-\alpha+\frac{\sin 2\lambda_k\alpha}{2\lambda_k})+g_{2k}\delta_k(\alpha)\sin\lambda_k\alpha],$$

$$\Psi_{1,2k}(t)=\frac{1}{\delta_k^2(\alpha)\exp(\lambda_k^2T)}[\delta_k(\alpha)(\frac{\cos\lambda_k\alpha\sin\lambda_kt}{\lambda_k^2}-\frac{t\cos\lambda_k(t+\alpha)}{\lambda_k})+$$

$$+2\sin\lambda_k(t+\alpha)(\frac{\sin\lambda_k\alpha}{\lambda_k}+\delta_k(\alpha))+(\alpha-\frac{\sin 2\lambda_k\alpha}{2\lambda_k})(\sin\lambda_kt-\frac{\cos\lambda_kt}{\lambda_k})],$$

$$\Psi_{2,2k}(t)=\Psi_{1,2k-1}(t),$$

$$\tilde{\Psi}_{1,2k}(t)=-2\lambda_k(T-t)\exp(-\lambda_k^2(T-t)),\tilde{\Psi}_{2,2k}(t)=\ \tilde{\Psi}_{1,2k-1}(t). \qquad (8)$$

С учетом выписанных значений $y_i(T)$ критерий (6) представим в виде

$$I(u)=0.5[(\int\limits_{-\alpha}^{0}A(t)v(t)dt+\int\limits_{0}^{T}(\int\limits_{t}^{T}B(\tau)d\tau)\xi(t)dt+(M+\int\limits_{0}^{T}B(t)\ dt)u(0)+$$

$$+C)^2+\gamma(\int\limits_{-\alpha}^{0}v^2(t)dt+\int\limits_{0}^{T}\xi^2(t)dt+u^2(0))], \qquad (9)$$

где

$$A(t)=q_0g_0\Psi_{1,0}(t)+\sum_{k=1}^{\infty}[q_{2k-1}g_{2k-1}\Psi_{1,2k-1}(t)+q_{2k}(g_{2k-1}\Psi_{1,2k}(t)+$$

$$+g_{2k}\Psi_{2,2k}(t))],$$

$$B(t)=q_0g_0\tilde{\Psi}_{1,0}(t)+\sum_{k=1}^{\infty}[q_{2k-1}g_{2k-1}\ \tilde{\Psi}_{1,2k-1}(t)+q_{2k}(g_{2k-1}\ \tilde{\Psi}_{1,2k}(t)+$$

$$+g_{2k}\tilde{\Psi}_{2,2k}(t))],$$

$$C = q_0\varphi_0\Phi_{1,0}(T) + \sum_{k=1}^{\infty}[q_{2k-1}\varphi_{2k-1}\ \Phi_{1,2k-1}(T) + q_{2k}(\varphi_{2k-1}\Phi_{1,2k}(T)+$$
$$+\varphi_{2k}\Phi_{2,2k}(t))] - \sum_{i=0}^{\infty} q_i\psi_i,$$
$$M = q_0\Phi_{3,0}(T) + \sum_{k=1}^{\infty}(q_{2k-1}\Phi_{3,2k-1}(T) + q_{2k}\Phi_{3,2k}(T)). \tag{10}$$

Необходимые и достаточные условия оптимальности для задачи (9) имеют вид

$$\int_{-\alpha}^{0}[A(t)(\int_{-\alpha}^{0} A(\tau)v^*(\tau)d\tau + \int_{0}^{T}(\int_{\tau}^{T} B(\varrho)d\varrho)\xi^*(\tau)d\tau + (M+\int_{0}^{T} B(\tau)d\tau)u^*(0)+$$
$$+C) + \gamma v^*(t)][v(t) - v^*(t)]dt \geq 0\ \forall|v(t)| \leq 1,$$
$$[(M+\int_{0}^{T} B(\tau)d\tau)(\int_{-\alpha}^{0} A(\tau)v^*(\tau)d\tau + \int_{0}^{T}(\int_{\tau}^{T} B(\varrho)d\varrho)\xi^*(\tau)d\tau + (M+$$
$$+\int_{0}^{T} B(\tau)d\tau)u^*(0) + C) + \gamma u^*(0)][u(0) - u^*(0)] \geq 0\ \forall|u(0)| \leq l_0,$$
$$\int_{0}^{T}[\int_{t}^{T} B(\tau)d\tau(\int_{-\alpha}^{0} A(\tau)v^*(\tau)d\tau + \int_{0}^{T}(\int_{\tau}^{T} B(\varrho)d\varrho)\xi^*(\tau)d\tau + (M+\int_{0}^{T} B(\tau)d\tau)\times$$
$$\times u^*(0) + C) + \gamma\ \xi^*(t)][\xi(t) - \xi^*(t)]dt \geq 0\ \forall\ |\xi(t)| \leq l_1. \tag{11}$$

Система вариационных неравенств (11) эквивалентна таким локальным условиям [5]:

$$v^*(t) = -1, A(t)(\int_{-\alpha}^{0} A(\tau)v^*(\tau)d\tau + \int_{0}^{T}(\int_{\varsigma}^{T} B(\tau)d\tau)\ \xi^*(\varsigma)d\varsigma + C+$$
$$+(M+\int_{0}^{T} B(\tau)d\tau u^*(0)) - \gamma > 0, t \in [\underline{\xi}_i,\ \overline{\xi}_i] \subset [-\alpha,\ 0), i = \overline{1, V_1}, \tag{12}$$
$$|v^*(t)| < 1, v^*(t) = -\frac{A(t)}{\gamma}(\int_{-\alpha}^{0} A(\tau)\ v^*(\tau)d\tau + \int_{0}^{T}(\int_{\varsigma}^{T} B(\tau)d\tau)\ \xi^*(\varsigma)d\varsigma+$$
$$+C + (M+\int_{0}^{T} B(\tau)d\tau u^*(0)), t \in\ [\underline{\xi}_i, \overline{\xi}_i] \subset [-\alpha, 0), i = \overline{V_1 + 1, V_2}, \tag{13}$$
$$v^*(t) = 1, A(t)(\int_{-\alpha}^{0} A(\tau)v^*(\tau)d\tau + \int_{0}^{T}(\int_{\varsigma}^{T} B(\tau)d\tau)\ \xi^*(\varsigma)d\varsigma + C+$$

$$+(M+\int\limits_0^T B(\tau)d\tau\ u^*(0))+\gamma<0, t\in[\underline{\xi}_i,\overline{\xi}_i]\subset[-\alpha,0), i=\ \overline{V_2+1,V_3},$$

$$\cup_{i=1}^{V_3}[\underline{\xi}_i,\ \overline{\xi}_i]=[-\alpha,0); \tag{14}$$

$$u^*(0)=-l_0, (M+\int\limits_0^T B(\tau)d\tau)(\int\limits_{-\alpha}^0 A(\tau)v^*(\tau)d\tau+\int\limits_0^T(\int\limits_\tau^T B(\varrho)d\varrho)\xi^*(\tau)d\tau-$$

$$-(M+\int\limits_0^T B(\tau)d\tau)l_0+\ C)-\gamma l_0>0, \tag{15}$$

$$|u^*(0)|<l_0, u^*(0)=-\frac{1}{\gamma}\ (M+\int\limits_0^T B(\tau)d\tau)\ (\int\limits_{-\alpha}^0 A(\tau)v^*(\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^T(\int\limits_\tau^T B(\varrho)d\varrho)\xi^*(\tau)d\tau+C+(M+\int\limits_0^T B(\tau)d\tau)u^*(0)), \tag{16}$$

$$u^*(0)=l_0, (M+\int\limits_0^T B(\tau)d\tau)(\int\limits_{-\alpha}^0 A(\tau)v^*(\tau)d\tau+\int\limits_0^T(\int\limits_\tau^T B(\varrho)d\varrho)\xi^*(\tau)d\tau+$$

$$+(M+\int\limits_0^T B(\tau)d\tau)\ l_0+C)+\gamma l_0<0; \tag{17}$$

$$\xi^*(t)=-l_1, \int\limits_t^T B(\tau)\ d\tau(\int\limits_{-\alpha}^0 A(\tau)v^*(\tau)d\tau+\int\limits_0^T(\int\limits_\varsigma^T B(\tau)d\tau)\xi^*(\varsigma)d\varsigma+$$

$$+C+(M+\int\limits_0^T B(\tau)d\tau)u^*(0))-\gamma l_1>0, t\in[\underline{\zeta}_i,\ \overline{\zeta}_i]\subset(0,T], i=\overline{1,U_1}, \tag{18}$$

$$|\xi^*(t)|<l_1, \xi^*(t)=-\frac{\int_t^T B(\tau)d\tau}{\gamma}(\int\limits_{-\alpha}^0 A(\tau)v^*(\tau)d\tau+\int\limits_0^T(\int\limits_\varsigma^T B(\tau)d\tau)\xi^*(\varsigma)d\varsigma+$$

$$+C+(M+\int\limits_0^T B(\tau)d\tau)u^*(0)), t\in\ [\underline{\zeta}_i,\overline{\zeta}_i]\subset(0,T],\ i=\overline{U_1+1,U_2}, \tag{19}$$

$$\xi^*(t)=l_1, \int\limits_t^T B(\tau)d\tau(\int\limits_{-\alpha}^0 A(\tau)v^*(\tau)\ d\tau+\int\limits_0^T(\int\limits_\varsigma^T B(\tau)d\tau)\xi^*(\varsigma)d\varsigma+C+$$

$$+(M+\int\limits_0^T B(\tau)d\tau)\ u^*(0))+\gamma l_1<0, t\in\ [\underline{\zeta}_i,\overline{\zeta}_i]\subset(0,\ T], i=\overline{U_2+1,U_3},$$

$$\cup_{i=1}^{U_3}[\underline{\zeta}_i,\ \overline{\zeta}_i]=(0,T]. \tag{20}$$

Рассмотрим сначала случай, когда $|v^*(t)|<1, |u^*(0)|<l_0, |\xi^*(t)|<l_1$. Тогда из (12)–(20) находим

$$v^*(t)=-\frac{A(t)C}{\gamma+(M+\int\limits_0^T B(\tau)d\tau)^2+\int\limits_{-\alpha}^0 A^2(\tau)d\tau+\int\limits_0^T(\int\limits_\tau^T B(\varsigma)d\varsigma)^2d\tau}, t\in[-\alpha,0);$$

$$u^*(0)=-\frac{(M+\int\limits_0^T B(\tau)d\tau)C}{\gamma+(M+\int\limits_0^T B(\tau)d\tau)^2+\int\limits_{-\alpha}^0 A^2(\tau)d\tau+\int\limits_0^T(\int\limits_\tau^T B(\varsigma)d\varsigma)^2d\tau};$$

$$\xi^*(t)=-\frac{\int\limits_t^T B(\tau)d\tau C}{\gamma+(M+\int\limits_0^T B(\tau)d\tau)^2+\int\limits_{-\alpha}^0 A^2(\tau)d\tau+\int\limits_0^T(\int\limits_\tau^T B(\varsigma)d\varsigma)^2d\tau},$$

$$t\in(0,T]. \tag{21}$$

Теперь рассмотрим случай, когда управление выходит на ограничение. Вернемся к условиям оптимальности (12)–(20) и положим $V_1=1$, $V_2=2$, $V_3=0$, $\underline{\xi}_1=-\alpha$, $\overline{\xi}_1=\underline{\xi}_2$, $\overline{\xi}_2=0$, $U_i=0$, $i=\overline{1,3}$. Тогда получим управление

$$v^*(t)=-1,\ t\in[-\alpha,\overline{\xi}_1),$$

$$v^*(t)=-\frac{A(t)\hat{C}(\overline{\xi}_1)}{\gamma+\int\limits_{\overline{\xi}_1}^0 A^2(t)dt},\ t\in[\overline{\xi}_1,0), \tag{22}$$

зависящее от параметра $\overline{\xi}_1$, который определяется из условий

$$\frac{A(\overline{\xi}_1)\hat{C}(\overline{\xi}_1)}{\gamma+\int\limits_{\overline{\xi}_1}^0 A^2(t)dt}=1,\ \frac{dv^*(\overline{\xi}_1+0)}{dt}>0. \tag{23}$$

Другие варианты реализаций управлений анализируются аналогично.

2. Приближенные управления

Полученные в предыдущем пункте управления выражены через функции, которые представлены рядами, т. е. являются нереализуемыми. Поэтому рассмотрим приближенные управления, заменив ряды соответствующими суммами. Рассмотрим управления вида

$$v^{(N)}(t) = -\frac{A^{(N)}(t)C^{(N)}}{\Upsilon^{(N)}}, t \in [-\alpha, 0); u^{(N)}(0) = -\frac{(M^{(N)} + \int\limits_0^T B^{(N)}(\tau)d\tau)C^{(N)}}{\Upsilon^{(N)}};$$

$$\xi^{(N)}(t) = -\frac{\int\limits_t^T B^{(N)}(\tau)d\tau C^{(N)}}{\Upsilon^{(N)}}, t \ \in (0, T], \tag{24}$$

где

$$\Upsilon^{(N)} = \gamma + (M^{(N)} + \int\limits_0^T B^{(N)}(\tau)d\tau)^2 + \int\limits_{-\alpha}^0 (A^{(N)})^2(\tau)d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^T (\int\limits_\tau^T B^{(N)}(\varsigma)d\varsigma)^2 d\tau$$

и при этом

$$|\lim_{N\to\infty} v^{(N)}(t)| < 1, t \ \in [-\alpha, 0),$$

$$|\lim_{N\to\infty} u^{(N)}(0)| < l_0,$$

$$|\lim_{N\to\infty} \xi^{(N)}(t)| < l_1, t \in (0, T]. \tag{25}$$

Управлениям (24) соответствует решение краевой задачи

$$Ly^{(N)}(x, t) = g(x) \ \hat{u}^{(N)}(t), \tag{26}$$

$$y^{(N)}(x, -\alpha) = \varphi(x), \ x \in \ [0, 1], \tag{27}$$

$$y^{(N)}(0, t) = 0, \frac{\partial y^{(N)}(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial y^{(N)}(1, t)}{\partial x}, \ -\alpha \le t \le T. \tag{28}$$

Тогда имеет место

Теорема 1. *Пусть задача оптимального управления (1)–(3), (5) имеет решение и для неё выполнено условие(25). Тогда формулы (24) представляют собой приближенное управление для задачи(1)–(3), (5), т. е.*

$$\lim_{N\to\infty} |v^*(t) - v^{(N)}(t)| = 0, \ t \in [-\alpha, 0), \lim_{N\to\infty} |u^*(0) - u^{(N)}(0)| = 0,$$

$$\lim_{N\to\infty} |\xi^*(t) - \xi^{(N)}(t)| = 0, \ t \in (0, T],$$

$$\lim_{N\to\infty} |y^*(x, t) - y^{(N)}(x, t)| = 0, \ x \in [0, 1], \ t \in [-\alpha, T),$$

$$\lim_{N\to\infty} |I(\hat{u}^*) - I(\hat{u}^{(N)})| = 0. \tag{29}$$

Доказательство. Оценим разность $|v^*(t) - v^{(N)}(t)|$, используя формулы (21) и (24),

$$|v^*(t) - v^{(N)}(t)| \leq \frac{|A^{(N)}(t)C^{(N)}\Upsilon - A(t)C\,\Upsilon^{(N)}|}{\Upsilon^{(N)}\Upsilon} \leq$$

$$\leq (\Upsilon^{(N)}\Upsilon)^{-1}(|A(t)|\ \Upsilon^{(N)}|C - C^{(N)}| + \ \Upsilon^{(N)}|C^{(N)}||A(t) - A^{(N)}(t)| +$$

$$+|A^{(N)}(t)||C^{(N)}||\Upsilon - \ \Upsilon^{(N)}|).$$

Отсюда и сходимости последовательностей $\{A^{(N)}(t)\},\ \{C^{(N)}\},\{\Upsilon^{(N)}\}$ получим первое предельное равенство из (29). Два последующих равенства устанавливаются аналогично.

Разность $\Delta y^{(N)}(x,t) = y(x,t) - y^{(N)}(x,t)$ удовлетворяет краевой задаче

$$L\Delta y^{(N)}(x,t) = g(x)\ \Delta\hat{u}^{(N)}(t), \tag{30}$$

$$\Delta y^{(N)}(x,-\alpha) = 0, x \in\ [0,1], \tag{31}$$

$$\Delta y^{(N)}(0,t) = 0, \frac{\partial \Delta y^{(N)}(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial \Delta y^{(N)}(1,t)}{\partial x}, -\alpha \leq t \leq T, \tag{32}$$

где $\Delta\hat{u}^{(N)}(t) = \hat{u}(t) - \ \hat{u}^{(N)}(t)$.

Решая краевую задачу (30)–(32) в виде ряда и учитывая предыдущие предельные равенства теоремы, получим четвертое предельное равенство из (29). Сходимость по функционалу является следствием предыдущих предельных равенств из (29). $\square$

Рассмотрим далее случай "выхода"управления на ограничение. Определим приближенно управление в виде

$$v^{(N)}(t) = -1, \frac{A^{(N)}(t)\,\hat{C}^{(N)}(\bar{\xi}_1^{(N)})}{\gamma + \int\limits_{\bar{\xi}_1^{(N)}}^{0} (A^{(N)}(\tau))^2 d\tau} > 1,\ t \in [-\alpha, \bar{\xi}_1^{(N)});$$

$$|v^{(N)}(t)| < 1 : v^{(N)}(t) = -\ \frac{A^{(N)}(t)\,\hat{C}^{(N)}(\bar{\xi}_1^{(N)})}{\gamma + \int\limits_{\bar{\xi}_1^{(N)}}^{0} (A^{(N)}(\tau))^2 d\tau},\ t \in\ [\bar{\xi}_1^{(N)}, 0), \tag{33}$$

а число $\xi_1^{(N)}$ определяется как единственное решение уравнения

$$1 = \frac{A^{(N)}(\bar{\xi}_1^{(N)})\,\hat{C}^{(N)}(\bar{\xi}_1^{(N)})}{\gamma + \int\limits_{\bar{\xi}_1^{(N)}}^{0} (A^{(N)}(\tau))^2 d\tau},\ \frac{dv^{(N)}(\bar{\xi}_1^{(N)} + 0)}{dt}\ > 0, \tag{34}$$

где

$$\hat{C}^{(N)}(\bar{\xi}_1^{(N)}) = C^{(N)} - \int\limits_{-\alpha}^{\bar{\xi}_1^{(N)}} A^{(N)}(\tau) d\tau.$$

Предположим, что, как и в предыдущем случае, приближенные управления удовлетворяют условиям

$$\lim_{N\to\infty} v^{(N)}(t) = -1,\ t \in [-\alpha, \lim_{N\to\infty} \overline{\xi}_1^{(N)}); |v^{(N)}(t)| < 1, t \in [\lim_{N\to\infty} \overline{\xi}_1^{(N)}, 0). \quad (35)$$

Тогда имеет место

Теорема 2. *Пусть задача оптимального управления (1)–(3), (5) имеет решение и для неё выполнено условие(35). Тогда формулы (33)–(34) представляют собой приближенное управление для задачи(1)–(3), (5), т. е.*

$$\lim_{N\to\infty} |\overline{\xi}_1 - \overline{\xi}_1^{(N)}| = 0, \lim_{N\to\infty} |v^*(t) - v^{(N)}(t)| = 0, t \in [-\alpha, 0),$$

$$\lim_{N\to\infty} |y^*(x,t) - y^{(N)}(x,t)| = 0, x \in [0,1],\ t \in [-\alpha, T),$$

$$\lim_{N\to\infty} |I(v^*) - I(v^{(N)})| = 0. \quad (36)$$

Доказательство. Прежде всего, из единственности решений уравнений (23), (34) следует, что

$$\overline{\xi}_1 = \lim_{N\to\infty} \overline{\xi}_1^{(N)}.$$

Действительно, последовательность $\{\overline{\xi}_1^{(N)}\}$ ограничена и, согласно теореме Больцано-Вейерштасса, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Ее границу обозначим через $\tilde{\xi}_1$. Если $\tilde{\xi}_1 \neq \overline{\xi}_1$, то уравнение (23) будет иметь более одного решения, что недопустимо.

Предположим, что $\overline{\xi}_1^{(N)} < \overline{\xi}_1$. Рассмотрим разность $\Delta v^{(N)}(t) = v^*(t) - v^{(N)}(t)$. Тогда

$$\Delta v^{(N)}(t) = 0,\ t \in [-\alpha, \overline{\xi}_1^{(N)});$$

$$\Delta v^{(N)}(t) = -1 + \frac{A^{(N)}(t)\ \hat{C}^{(N)}(\overline{\xi}_1^{(N)})}{\gamma + \int\limits_{\overline{\xi}_1^{(N)}}^{0} (A^{(N)}(\tau))^2 d\tau},\ t \in\ [\overline{\xi}_1^{(N)}, \overline{\xi}_1);$$

$$\Delta v^{(N)}(t) = -\frac{A(t)\ \hat{C}(\overline{\xi}_1)}{\gamma + \int\limits_{\overline{\xi}_1}^{0} A^2(t)dt} + \frac{A^{(N)}(t)\hat{C}^{(N)}(\overline{\xi}_1^{(N)})}{\gamma + \int\limits_{\overline{\xi}_1^{(N)}}^{0} (A^{(N)}(\tau))^2 d\tau},\ t \in\ [\overline{\xi}_1, 0). \quad (37)$$

Из (37) следует, что функция $\Delta v^{(N)}(t)$ — непрерывна при $t \in [-\alpha, 0)$. Более того,

$$\lim_{N\to\infty} \Delta v^{(N)}(t) = 0,\ t \in [-\alpha, 0). \quad (38)$$

Действительно, из второго равенства (37) при $t \in\ [\overline{\xi}_1^{(N)}, \overline{\xi}_1)$ получим

$$\Delta v^{(N)}(t) = -\frac{dv^{(N)}(\overline{\xi}_1^{(N)})}{dt}(t - \overline{\xi}_1^{(N)}) + O((t - \overline{\xi}_1^{(N)})^2), \quad (39)$$

а из последнего равенства будем иметь

$$|\Delta v^{(N)}(t)| \leq (\Theta\Theta^{(N)})^{-1} |A(t)\hat{C}(\overline{\xi}_1)\Theta^{(N)} - A^{(N)}(t)\hat{C}^{(N)}(\overline{\xi}_1^{(N)})\Theta|) \leq$$

$$\leq (\Theta\Theta^{(N)})^{-1}(|A(t)\hat{C}(\overline{\xi}_1)|| \int\limits_{\overline{\xi}_1}^{0} (A(\tau))^2 d\tau) -$$

$$- \int\limits_{\overline{\xi}_1^{(N)}}^{0} (A^{(N)}(\tau))^2 d\tau| + \Theta|A(t)\hat{C}(\overline{\xi}_1) - A^{(N)}(t)\ \hat{C}^{(N)}(\overline{\xi}_1^{(N)})|), \qquad (40)$$

где

$$\Theta = \gamma + \int\limits_{\overline{\xi}_1}^{0} A^2(t)dt, \Theta^{(N)} = \gamma + \int\limits_{\overline{\xi}_1^{(N)}}^{0} (A^{(N)}(\tau))^2 d\tau.$$

Так как

$$|\int\limits_{\overline{\xi}_1}^{0} (A(\tau))^2 d\tau) - \int\limits_{\overline{\xi}_1^{(N)}}^{0} (A^{(N)}(\tau))^2 d\tau| \leq \max_{t\in\ [-\alpha,0)} |A(t) - A^{(N)}(t)| \times$$

$$\times \int\limits_{\overline{\xi}_1}^{0} |A(\tau) + A^{(N)}(\tau)| d\tau + \max_{t\in\ [-\alpha,0)} (A^{(N)}(t))^2 |\overline{\xi}_1 -\ \overline{\xi}_1^{(N)}|,$$

$$|A(t)\hat{C}(\overline{\xi}_1) - A^{(N)}(t)\hat{C}^{(N)}(\overline{\xi}_1^{(N)})| \leq |A(t)||\hat{C}(\overline{\xi}_1) -\ \hat{C}^{(N)}(\overline{\xi}_1^{(N)})| +$$

$$+|\hat{C}^{(N)}(\overline{\xi}_1^{(N)})||A(t) - A^{(N)}(t)|,$$

$$|\hat{C}(\overline{\xi}_1) - \hat{C}^{(N)}(\overline{\xi}_1^{(N)})| \leq |C - C^{(N)}| + \max_{t\in[-\alpha,0)} |A(t) - A^{(N)}(t)||\overline{\xi}_1| +$$

$$+ \max_{t\in[-\alpha,0)} |A^{(N)}(t)|\ |\overline{\xi}_1 - \overline{\xi}_1^{(N)}|$$

и, учитывая ограниченность последовательностей $\{A^{(N)}(t), C^{(N)}\}$, из (40) будем иметь $\lim\limits_{N\to\infty} \Delta v^{(N)}(t) = 0,\ t \in\ [\overline{\xi}_1, 0)$.

Для справедливости равенства (39) должен равномерно сходиться ряд $d^2A(t)/dt^2$. Из определения ряда $A(t)$ получим оценку

$$|\frac{d^2A(t)}{dt^2}| \leq |q_0||g_0|\ |\frac{d^2\Psi_{1,0}(t)}{dt^2}| + \sum_{k=1}^{\infty}[|q_{2k-1}||g_{2k-1}||\frac{d^2\Psi_{1,2k-1}(t)}{dt^2}| + |q_{2k}|\times$$

$$\times(|g_{2k-1}|\frac{d^2\Psi_{1,2k}(t)}{dt^2}| +\ |g_{2k}||\frac{d^2\Psi_{2,2k}(t)}{dt^2})] \leq$$

$$\leq C\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\ \frac{|q_{2k-1}||g_{2k-1}| + |q_{2k}|(|g_{2k-1}|\ \lambda_k + |g_{2k}|)}{\exp(\lambda_k^2 T)},$$

т. е. при указанных требованиях на функции $g(x), q(x)$ выписанный выше ряд сходится равномерно. Отсюда следует равенство (38). В случае $\overline{\xi}_1^{(N)} > \overline{\xi}_1$ будет справедлив тот же результат. Оставшиеся равенства из (36) доказываются аналогично теореме 1. □

3. Вычислительные эксперименты

Пусть заданы функции $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 30x$, $q(x) = x$, $g(x) = 5x$, а так же $\alpha = 1$, $T = 10$, $\gamma = 20$. Тогда используя формулы (24), получим для разных N значения критерия I (рис. 1).

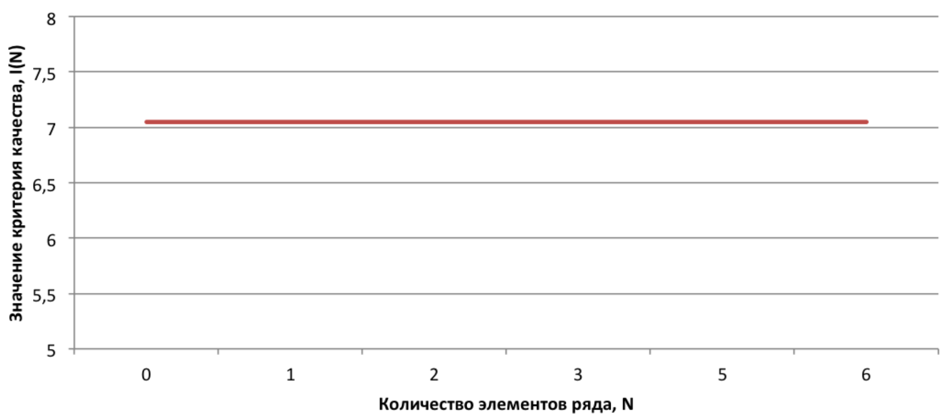

Рис. 1. Значение критерия

Для $N > 1$ значения критерия практически не меняются, потому выберем $N = 1$. Тогда найденные управления представлены на рис. 2, а значение критерия $I = 7,049$.

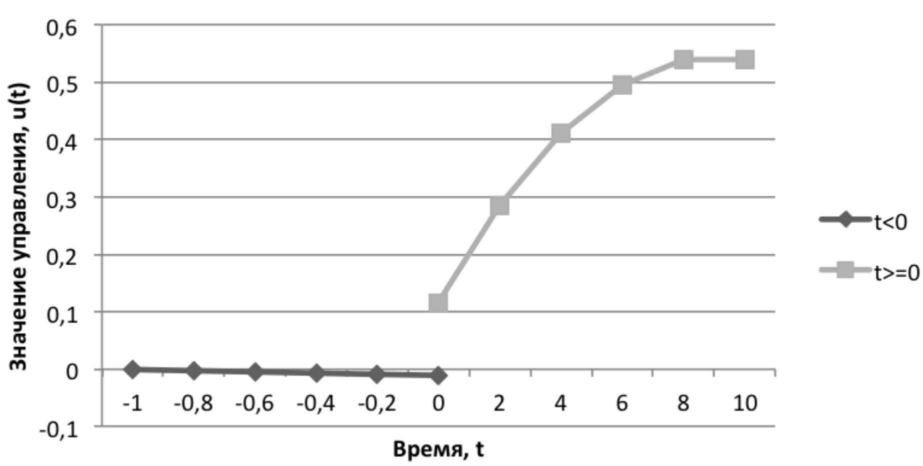

Рис. 2. Значение управления

Пусть теперь заданы функции $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 300x^2$, $q(x) = 5x$, $g(x) = 10x$, а так же $\alpha = 0.5$, $T = 0.5$, $\gamma = 20$. В данном случае управление при $t < 0$ выходит на ограничение. Изменяя N от 2 до 20, время выхода

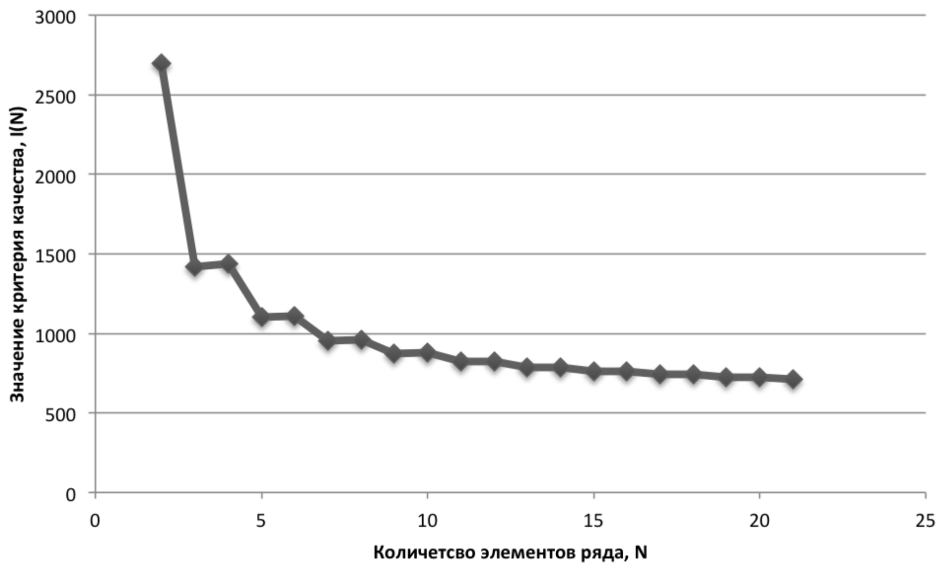

Рис. 3. Значение критерия

на ограничение составляет от -0.285 до -0.15 соответственно. Проследим зависимость значения критерия от количества элементов ряда в решении. Из рис. 3 видим, что в данном случае изменение значения критерия сильно падает при $N \geq 8$, поэтому здесь можно положить $N = 8$.

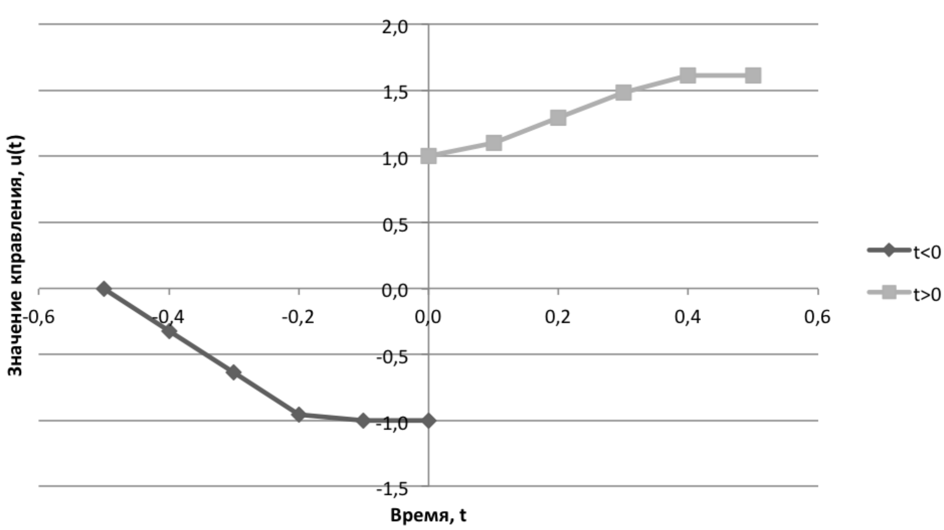

Рис. 4. Значение управления

Построим для этого случая приближенное оптимальное управление. Время выхода на ограничения для этого случая $t = -0.185$, а управление изображено на рис. 4.

Литература

1. Егоров А. И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. — М.: Наука, 1978. — 464 с.
2. Гельфанд И. М. Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений // УМН. — 1959. — Т. 14, №3. — С. 3–19.
3. Сабитов К. Б. Краевая задача для уравнений параболо-гиперболического типа с нелокальными краевыми условиями. // Дифференциальные уравнения. — 2006. — Т. 42, №7. — С. 969–978.
4. Капустян В. О., Пишнограєв I. О. Умови існування і єдиності розв'язку параболо-гіперболічного рівняння з нелокальними граничними умовами // Наукові вісті НТУУ "КПІ". — 2012. — №4. — С. 72–86.
5. Лионс Ж. — Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями в частных производных. — М.: Мир, 1972. — 412 с.

Факультет менеджмента и маркетинга, НТУУ "КПИ", просп. Победы, 37, Киев, 03056, Украина.

Поступила 02.09.2013