

УДК 517.977

НАБЛИЖЕНИЙ МЕТОД ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ В ЗАДАЧАХ НЕСТАЦІОНАРНОГО ТЕРМОЕЛЕКТРИЧНОГО ОХОЛОДЖЕННЯ

М. П. Коцур

РЕЗЮМЕ. Запропоновано спосіб розв'язування задачі оптимального керування об'єктом з розподіленими параметрами, що описується системою нелінійних диференціальних рівнянь з нестандартними крайовими умовами. Варіаційним методом отримано загальний вигляд необхідних умов оптимальності. Розроблено алгоритм чисельного методу послідовних наближень для вирішення такої оптимізаційної задачі. Результати застосовані для оптимізації нестационарного процесу термоелектричного охолодження. Розраховані оптимальні залежності струму живлення термоелектричного модуля від часу, що забезпечують мінімальну температуру охолодження.

ВСТУП

Великий клас оптимізаційних задач стосується об'єктів (систем і процесів) з розподіленими параметрами, поведінка яких описується за допомогою крайової задачі для рівнянь з частинними похідними. Раціональне функціонування таких об'єктів можливе за умов розв'язання задач оптимального керування, результатом яких є побудова оптимальних функцій керування.

Теорія оптимального керування широко застосовується до оптимізації об'єктів із зосередженими параметрами, стан яких описується системами звичайних диференціальних рівнянь [1]–[4]. Для них сформульовані необхідні умови оптимальності, наприклад, принцип максимуму Понтрягіна [5], на основі яких створюються алгоритми і комп'ютерні методи пошуку функцій керування, що оптимізують об'єкт.

Розвиток теорії оптимального керування для об'єктів з розподіленими параметрами, а також методів визначення їх характеристик є значно складнішою задачею, ніж аналогічна проблема для систем із зосередженими параметрами, оскільки доводиться мати справу з диференціальними рівняннями в частинних похідних, враховуючи складність реальних крайових умов, що характеризують роботу об'єкта. Крайові умови задачі можуть включати частинні похідні, функції керування, тощо. Необхідні умови оптимальності отримані лише для окремих задач з розподіленими параметрами з простими граничними умовами [6]–[9]. Тому актуальною задачею є розвиток теорії оптимального керування для об'єктів, які описуються системами

диференційних рівнянь в частинних похідних з оригінальними граничними умовами.

Такі оптимізаційні задачі знаходять широке практичне застосування в багатьох технічних галузях. Прикладом об'єкту з розподіленими параметрами є нестационарний процес термоелектричного охолодження. Аналіз результатів попередніх досліджень [4], [10] показує, що задачі оптимізації цього процесу, наприклад, пошук оптимальних функцій струму, що забезпечують екстремальні значення характеристик охолодження, розв'язувались лише для найпростіших фізичних моделей термоелектричного перетворювача, або взагалі не розглядалися. Це зумовлено складністю математичної моделі процесу нестационарного охолодження, який описується диференційними рівняннями в частинних похідних, крайові умови яких визначаються фізичною моделлю термоелектричного перетворювача і режимом його роботи.

Мета даної роботи полягала в оптимізації нестационарного режиму термоелектричного охолоджувача шляхом розробки методів оптимального керування та алгоритмів чисельного розв'язання відповідної математичної задачі оптимізації нестационарних одновимірних процесів із розподіленими параметрами.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИМ ПРОЦЕСОМ ТЕРМОЕЛЕКТРИЧНОГО ОХОЛОДЖЕННЯ

Розглянемо постановку однієї із задач оптимального керування нестационарним процесом термоелектричного охолодження. Об'єктом дослідження є охолоджувальний модуль (рис. 1а), що складається з термоелементів (рис. 1б), з'єднаних між собою послідовно в електричне коло і паралельно по відношенню до теплового потоку. Кожен термоелемент містить дві вітки з напівпровідникового матеріалу n - і p -типів провідності. За умови протікання електричного струму, вказаної на рис. 1 полярності, внаслідок поглинання тепла Пельтьє спай 1 охолоджується, а протилежний спай нагрівається. Зазвичай шляхом інтенсивного тепловідводу температура гарячого спаю підтримується близькою до температури оточуючого середовища.

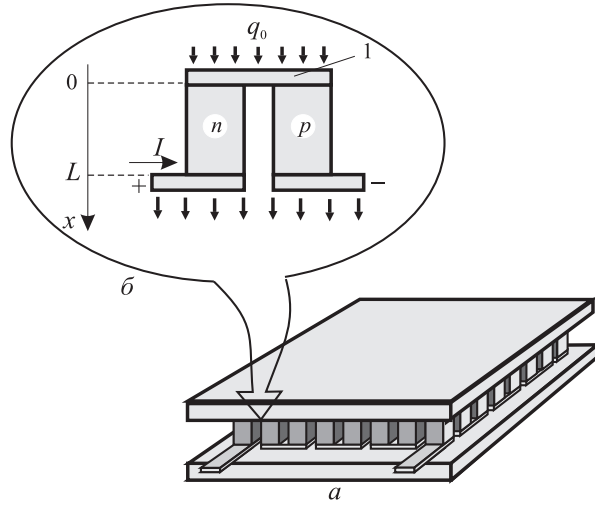


Рис. 1. Схема охолоджувального модуля (а) і термоелемента (б)

За умови рівномірного розподілу теплового навантаження на холодні спаї термоелементів модуля теплові процеси у всіх термоелементах подібні і описуються системою рівнянь нестационарної теплопровідності [4] у вітках термоелементу, що має вигляд

$$\begin{cases} c_n \frac{\partial T_n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa_n \frac{\partial T_n}{\partial x} \right) + \rho_n \frac{I^2(t)}{s_n^2} - T_n \frac{\partial \alpha_n}{\partial T_n} \frac{I(t)}{s_n} \frac{\partial T_n}{\partial x} \\ c_p \frac{\partial T_p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa_p \frac{\partial T_p}{\partial x} \right) + \rho_p \frac{I^2(t)}{s_p^2} - T_p \frac{\partial \alpha_p}{\partial T_p} \frac{I(t)}{s_p} \frac{\partial T_p}{\partial x} \end{cases} \quad (1)$$

У цих рівняннях $T_{n,p}$ — температури, I — струм живлення термоелементу, $c_{n,p}$, $\alpha_{n,p}$, $\rho_{n,p}$, $\kappa_{n,p}$ — характеристики матеріалів n - і p -віток, а саме теплоємність, коефіцієнт Зеебека, питомий опір та теплопровідність відповідно, $s_{n,p}$ — площі перерізу віток.

Якщо ввести безрозмірну координату $x = x/L$, позначити фактор форми $\phi_{n,p} = s_{n,p}/L$ (L — висота віток) і застосувати заміну змінних $q = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} + \alpha \frac{I}{\phi} T$, то система (1) набуває вигляду:

$$\begin{cases} \frac{\partial T_n}{\partial t} + a_n \frac{\partial q_n}{\partial x} = f_{1n}(T_n, q_n, I) \\ \frac{\partial T_p}{\partial t} + a_p \frac{\partial q_p}{\partial x} = f_{1p}(T_p, q_p, I) \\ \frac{\partial T_n}{\partial x} = f_{2n}(T_n, q_n, I) \\ \frac{\partial T_p}{\partial x} = f_{2p}(T_p, q_p, I) \end{cases} \quad (2)$$

де $a_{n,p} = 1/(c_{n,p}L^2)$,

$$f_{1n,p} = a_{n,p} \left(\frac{\alpha_{n,p}^2}{\phi_{n,p}^2 \kappa_{n,p}} I^2 T_{n,p} - \frac{\alpha_{n,p}}{\phi_{n,p} \kappa_{n,p}} I q_{n,p} + \frac{I^2}{\phi_{n,p}^2} \rho_{n,p} \right),$$

$$f_{2n,p} = \frac{\alpha_{n,p}}{\phi_{n,p} \kappa_{n,p}} I T_{n,p} - \frac{q_{n,p}}{\kappa_{n,p}}.$$

Початкові і крайові умови задачі нестационарного термоелектричного охолодження такі:

$$T_n(x, 0) = T_p(x, 0) = T_0, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} T_n(1, t) &= T_p(1, t) = T_0, \\ \frac{\partial T_n(0, t)}{\partial t} &= F_0(T_n(0, t), q_n(0, t), q_p(0, t), I), \\ T_p(0, t) &= T_n(0, t), \end{aligned} \quad (4)$$

де

$$F_0 = \frac{1}{g} \left[q_0 - K(s_n + s_p)(T_n(0, t) - T_0) - \phi_n q_n(0, t) - \phi_p q_p(0, t) + I^2 r_0 \left(\frac{1}{s_n} + \frac{1}{s_p} \right) \right].$$

У цих рівняннях характеристики матеріалів віток $\alpha_{n,p}(T)$, $\rho_{n,p}(T)$, $\kappa_{n,p}(T)$ є функціями температури, а питома теплоємність матеріалів віток термоелементу $c_{n,p}$, фактор форми $\phi_{n,p}$, електричний контактний опір r_0 віток, коефіцієнт теплообміну холодного спаю термоелементу K , теплоємність g та тепловиділення q_0 під'єданого до спаю теплового навантаження — константи.

Залежно від величини струму I , температура в певній точці термоелемента за певний проміжок часу може бути нижчою або вищою за початкову. Струмом можна керувати, змінюючи його величину з часом в межах $0 < I < I_{max}$. Оптимізаційна задача полягає у визначенні оптимальної функції струму $I(t)$ такої, що мінімізує температуру охолодження в точці $x = 0$ в певний момент часу $t = \theta$, тобто функціонал, що мінімізується, $\Phi = T_{n,p}(0, \theta)$.

Аналіз наукової інформації [4, 10, 11] дозволяє стверджувати, що до сьогодні для загального випадку температурно-залежних параметрів матеріалів термоелемента $\alpha_{n,p}(T)$, $\rho_{n,p}(T)$, $\kappa_{n,p}(T)$ способів розв'язання такої задачі не запропоновано.

Оптимізація нестационарного процесу термоелектричного охолодження належить до задач оптимізації об'єктів з розподіленими параметрами, для розв'язання яких можна скористатися методами теорії оптимального керування.

2. ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ОБ'ЄКТОМ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Розглянемо об'єкт з розподіленими параметрами, поведінка якого описується системою нелінійних рівнянь із частинними похідними [7] у вигляді

$$\delta_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + \sum_{j=1}^M a_{kj} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} = f_k(\varphi(x, t), u(t)), \quad k = 1, \dots, M, \quad (5)$$

заданою в області $[0, L] \times [0, \theta]$. Початкові та нестандартні крайові умови на кінцях відрізка L , мають вигляд

$$\delta_k \varphi_k(x, 0) = \varphi_0(x), \quad k = 1, \dots, M, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \delta_{0k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} \Big|_{x=0} &= F_{0k}(\varphi(0, t), u(t)), k = 1, \dots, M/2, \\ \delta_{1k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} \Big|_{x=L} &= F_{1k}(\varphi(L, t), u(t)), k = 1, \dots, M/2. \end{aligned} \quad (7)$$

У рівняннях (5)–(7) $\varphi = \{\varphi_1(x, t), \dots, \varphi_M(x, t)\}$ — вектор-функція стану об'єкта, $u = \{u_1(t), \dots, u_N(t)\}$ — вектор-функція керування, a_{kj} — константи, $f_k(\varphi(x, t), u(t))$, $F_{0k}(\varphi(0, t), u(t))$, $F_{1k}(\varphi(L, t), u(t))$ — неперервно-диференційовані функції своїх аргументів, $\delta_k, \delta_{0k}, \delta_{1k} \in \{0, 1\}$ і це означає, що не обов'язково всі рівняння системи (5) або крайові умови (7) містять похідну по t .

Зауважимо, що крайова задача (5)–(7) є загальним виглядом задачі (2)–(4), що описує процес нестационарного термоелектричного охолодження.

Задамо функціонал Φ , наприклад, у вигляді деякої функції, залежної від вектора стану в крайовій точці $x = 0$ в кінцевий момент $t = \theta$

$$\Phi = \Phi(\varphi(0, \theta)). \quad (8)$$

Задача полягає в мінімізації Φ шляхом вибору вектора $u(t)$ із допустимої області зміни керування G_u .

Одним із способів, яким можна отримати необхідні умови оптимальності для такої задачі, є варіаційний метод. Для цього формується розширений функціонал

$$J = J_1 + J_2, \quad (9)$$

де $J_1 = \int_0^\theta \int_0^L \sum_{k=1}^M \psi_k(x, t) \left[f_k - \delta_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} - \sum_{j=1}^M a_{kj} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right] dx dt$,

$$\begin{aligned} J_2 = & -\Phi(\varphi(0, \theta)) + \int_0^\theta \sum_{k=1}^{M/2} \nu_{0k}(t) \left[F_{0k} - \delta_{0k} \frac{\partial \varphi_k(0, t)}{\partial t} \right] dt + \\ & + \int_0^\theta \sum_{k=1}^{M/2} \nu_{1k}(t) \left[F_{1k} - \delta_{1k} \frac{\partial \varphi_k(L, t)}{\partial t} \right] dt, \end{aligned}$$

$\psi_k(x, t)$, $\nu_{0k}(t)$, $\nu_{1k}(t)$ — невідомі функції, що відіграють роль множників Лагранжа.

Після інтегрування (9) за частинами з умови екстремуму $\delta J = 0$ (δJ — повна варіація J за аргументами φ, u) отримуємо необхідні умови оптимальності, а саме систему диференціальних рівнянь, спряжену до системи (5), якій повинні задовольняти невідомі функції ψ :

$$\delta_j \frac{\partial \psi_j}{\partial t} - \sum_{k=1}^M a_{kj} \frac{\partial \psi_k}{\partial x} = - \sum_{k=1}^M \psi_k \frac{\partial f_k}{\partial \varphi_j}, \quad j = 1, \dots, M, \quad (10)$$

прикінцеві умови у вигляді

$$\begin{aligned} \delta_j \psi_j(x, \theta) &= 0, \quad 0 < x < L, \quad j = 1, \dots, M, \\ \delta_j \psi_j(0, \theta) + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_j(0, \theta)} + \delta_{0j} \nu_{0j}(\theta) &= 0, \quad j = 1, \dots, M/2, \\ \delta_j \psi_j(0, \theta) + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_j(0, \theta)} &= 0, \quad j = M/2 + 1, \dots, M, \\ \delta_j \psi_j(L, \theta) + \delta_{1j} \nu_{1j}(\theta) &= 0, \quad j = 1, \dots, M/2, \\ \delta_j \psi_j(L, \theta) &= 0, \quad j = M/2 + 1, \dots, M, \end{aligned} \quad (11)$$

умови трансверсальності

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M a_{kj} \psi_k(0, t) &= \left. \frac{\partial J_2}{\partial \varphi_j} \right|_{x=0}, \quad j = 1, \dots, M, \\ \sum_{k=1}^M a_{kj} \psi_k(L, t) &= \left. \frac{\partial J_2}{\partial \varphi_j} \right|_{x=L}, \quad j = 1, \dots, M, \end{aligned} \quad (12)$$

де

$$\left. \frac{\partial J_2}{\partial \varphi_j} \right|_{x=0} = \delta_{0j} \frac{\partial \nu_{0j}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{M/2} \nu_{0k}(t) \frac{\partial F_{0k}}{\partial \varphi_j(0, t)}, \quad j = 1, \dots, M/2,$$

$$\left. \frac{\partial J_2}{\partial \varphi_j} \right|_{x=0} = \sum_{k=1}^{M/2} \nu_{0k}(t) \frac{\partial F_{0k}}{\partial \varphi_j(0, t)}, \quad j = M/2 + 1, \dots, M,$$

$$\left. \frac{\partial J_2}{\partial \varphi_j} \right|_{x=L} = \delta_{1j} \frac{\partial \nu_{1j}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{M/2} \nu_{1k}(t) \frac{\partial F_{1k}}{\partial \varphi_j(L, t)}, \quad j = 1, \dots, M/2,$$

$$\left. \frac{\partial J_2}{\partial \varphi_j} \right|_{x=L} = \sum_{k=1}^{M/2} \nu_{1k}(t) \frac{\partial F_{1k}}{\partial \varphi_j(L, t)}, \quad j = M/2 + 1, \dots, M,$$

а також умови для знаходження оптимального вектор-керування:

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (13)$$

де

$$\begin{aligned} &H(\varphi(x, t), \psi(x, t), \nu_0(t), \nu_1(t), u(t)) = \\ &= \sum_{j=1}^M \left[\int_0^L \psi_j(x, t) f_j(\varphi(x, t), u(t)) dx + \nu_{0j}(t) F_{0j}(\varphi(0, t), u(t)) + \right. \\ &\quad \left. + \nu_{1j}(t) F_{1j}(\varphi(L, t), u(t)) \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Умова (13) означає, що для кожного значення t повинна задовольнятися умова максимуму функції H за компонентами вектора u :

$$\begin{aligned} &H(\varphi(x, t), \psi(x, t), \nu_0(t), \nu_1(t), u(t)) = \\ &= \max_{u \in G_u} H(\varphi(x, t), \psi(x, t), \nu_0(t), \nu_1(t), u). \end{aligned} \quad (15)$$

Половина з умов трансверсальності (12) використовуються для визначення функцій ν , а решта є крайовими умовами для системи (10).

Отже, умови (10)–(15) разом з основними рівняннями (5)–(7), що описують об'єкт з розподіленими параметрами, задають розв'язок поставленої оптимізаційної задачі та дають змогу визначити оптимальний вектор керування $u(t)$.

3. АЛГОРИТМ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

Нелінійність в загальному випадку правих частин основних рівнянь (5) і складність задачі в цілому уможливають її розв'язання тільки чисельними методами. Для цього можна запропонувати такий алгоритм методу послідовних наближень.

1. Задаємо початкове наближення вектор-функції керування, наприклад, у вигляді $u^{(0)}(t) = u_0$, де $u_0 \in G_u$.
2. З цим наближенням розв'язуємо основну систему диференціальних рівнянь (5) з умовами (6)–(7) і знаходимо вектор-функцію стану φ . Для чисельного методу розв'язання цієї системи можна використати метод скінчених різниць.
3. Обчислюємо значення функціоналу Φ (8).
4. Знайдену вектор-функцію стану φ і початкове наближення $u^{(0)}(t)$ використовуємо для розв'язання допоміжної системи (10) з умовами (11), (12), щоб знайти вектор-функцію ψ . Для чисельного її розв'язання можна застосувати метод скінчених різниць.
5. Використовуємо розв'язки основної і допоміжної систем для обчислення максимального значення функції H (14) за компонентами вектора u для кожного моменту часу t . Для пошуку оптимальних значень компонент u з області G_u можна запропонувати метод градієнтного спуску, визначаючи замість максимуму H мінімум $(-H)$. Отримаємо нове наближення вектор-функції керування $u^{(1)}(t)$.
6. З новою функцією керування розв'язуємо основну систему (5)–(7) і визначаємо нове значення функціоналу Φ (8). Повторюємо ітераційний процес до досягнення зміни функціоналу Φ в межах заданої похибки.

Такий алгоритм можна реалізувати комп'ютерними методами і визначити розв'язок поставленої оптимізаційної задачі.

4. УМОВИ ОПТИМАЛЬНОСТІ ДЛЯ ЗАДАЧІ НЕСТАЦІОНАРНОГО ТЕРМОЕЛЕКТРИЧНОГО ОХОЛОДЖЕННЯ

Застосуємо отримані вище в загальному вигляді умови оптимальності для об'єкта з розподіленими параметрами (10)–(15) і запишемо співвідношення для розв'язання поставленої задачі нестационарного термоелектричного охолодження.

Згідно (10) допоміжна система рівнянь, спряжена до системи (2), набуває вигляду

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_{1n}}{\partial t} + \frac{\partial \psi_{2n}}{\partial x} = y_{1n} \\ \frac{\partial \psi_{1p}}{\partial t} + \frac{\partial \psi_{2p}}{\partial x} = y_{1p} \\ a_n \frac{\partial \psi_{1n}}{\partial x} = y_{2n} \\ a_p \frac{\partial \psi_{1p}}{\partial x} = y_{2p} \end{cases}, \quad (16)$$

де

$$y_{1n,p} = -a_{n,p} \frac{\alpha_{n,p}^2}{\phi_{n,p}^2 \kappa_{n,p}} R_{2n,p} I^2(t) \psi_{1n,p} - \frac{\alpha_{n,p}}{\phi_{n,p} \kappa_{n,p}} R_{1n,p} I(t) \psi_{2n,p},$$

$$y_{2n,p} = a_{n,p} \frac{\alpha_{n,p}}{\phi_{n,p} \kappa_{n,p}} I(t) \psi_{1n,p} + \frac{\psi_{2n,p}}{\kappa_{n,p}},$$

$$R_{1n,p} = 1 + \frac{d \ln \alpha_{n,p}}{dT} T_{n,p} - \frac{d \ln \kappa_{n,p}}{dT} \left(T_{n,p} - \frac{\phi_{n,p}}{I} \frac{q_{n,p}}{\alpha_{n,p}} \right),$$

$$R_{2n,p} = R_{1n,p} + \frac{d \ln \alpha_{n,p}}{dT} \left(T_{n,p} - \frac{\phi_{n,p}}{I} \frac{q_{n,p}}{\alpha_{n,p}} \right) + \frac{\rho_{n,p} \kappa_{n,p}}{\alpha_{n,p}^2} \frac{d \ln \rho_{n,p}}{dT}.$$

Прикінцеві і крайові умови для системи будуть такими:

$$\psi_{1n}(x, \theta) = 0, \quad 0 < x \leq 1, \quad \psi_{1n}(0, \theta) = -\frac{1}{1 + \frac{a_n g}{\phi_n}}, \quad \psi_{1p}(x, \theta) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{1n}(0, t)}{\partial t} &= \frac{K(s_n + s_p)}{g} \psi_{1n}(0, t) - \frac{\phi_n}{a_n g} (\psi_{2n}(0, t) + \psi_{2p}(0, t)), \\ \psi_{1p}(0, t) &= \frac{a_n s_p}{a_p s_n} \psi_{1n}(0, t), \quad \psi_{1n}(1, t) = 0, \quad \psi_{1p}(1, t) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Оптимальна функція струму $I(t)$ повинна задовольняти умові максимуму функції H в кожний момент часу $t \in \{0, \theta\}$, яка матиме вигляд

$$\begin{aligned} H &= \int_0^1 \sum_{n,p} (\psi_1(x, t, I) f_1(x, t, I) \psi_2(x, t, I) f_2(x, t, I)) dx + \\ &+ \frac{a_n g}{\phi_n} \psi_{1n}(0, t, I) F_0(t, I). \end{aligned} \quad (19)$$

Умови (16)–(19) разом з основними рівняннями нестационарного термоелектричного охолодження (2)–(4) задають розв'язок поставленої оптимізаційної задачі та дозволяють визначити оптимальну функцію струму $I(t)$, що забезпечує мінімальну температуру охолодження об'єкта T_c за певний фіксований проміжок часу θ .

Така задача розв'язується комп'ютерними методами за допомогою запропонованого вище алгоритму методу послідовних наближень з використанням різницевих схем для розв'язання основної і спряженої крайових задач.

5. РЕЗУЛЬТАТИ ОПТИМІЗАЦІЇ НЕСТАЦІОНАРНОГО ПРОЦЕСУ ТЕРМОЕЛЕКТРИЧНОГО ОХОЛОДЖЕННЯ

Оцінки характеристик нестационарного процесу термоелектричного охолодження проводилися на прикладі термоелементу, вітки якого виконані з матеріалів на основі Ві-Те n - і p -типу провідності. Типові експериментальні температурні залежності термоелектричних параметрів $\alpha_{n,p}(T)$, $\rho_{n,p}(T)$, $\kappa_{n,p}(T)$ цих матеріалів [4] апроксимувалися поліномами і використовувалися для комп'ютерних розрахунків. Оцінки проводилися для термоелемента з висотою віток $L = 0.2$ см, площею перерізу $s_{n,p} = 0.1 \times 0.1$ см², величиною контактного опору $r_0 = 5 \cdot 10^{-6}$ Ом · см². Враховувався теплообмін холодного спаю термоелемента з навколишнім середовищем, температура якого $T_0 = 300$ К, коефіцієнт теплообміну $K = 10^{-3}$ Вт/(см² · К). Значення теплоємності та тепловиділення під'єданого до спаю теплового навантаження приймалися $g = 0.0012$ Дж/К і $q_0 = 0$ Вт відповідно.

На рис. 2 наведено приклад результатів розрахунку температури холодного спаю термоелемента $T_c(t) \equiv T_n(0, t) = T_p(0, t)$ в залежності від часу для різних значень постійного струму I . Результати отримані шляхом розв'язування системи рівнянь (2) за умов (3), (4) методом скінчених різниць. З рис. 2 видно, що температура холодного спаю термоелемента

в початкові моменти часу знижується, а надалі залежності $T_c(t)$ досягають насичення, тобто значень температури в стаціонарному режимі. Найнижча температура досягається при значенні струму $I = 3$ А і дорівнює $T_c = 228$ К. Таким чином максимальний перепад температур, що досягається на термоелементі за умови $q_0 = 0$ в стаціонарному режимі, дорівнює $\Delta T_{max} = 72$ К і відповідає рівню охолодження однокаскадних термоелектричних модулів промислового виробництва.

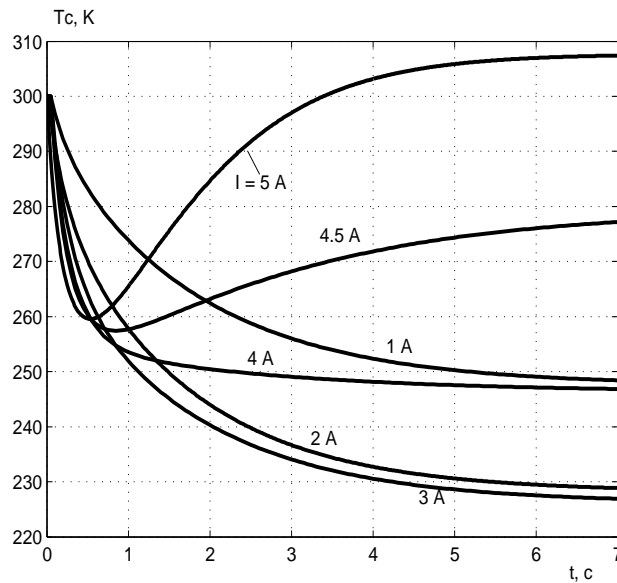


Рис. 2. Залежність температури охолодження T_c термоелемента від часу t за умов постійного струму I

Приклад результатів розрахунку оптимальних функцій струму живлення термоелемента наведено на рис. 3. Тут показані розраховані оптимальні залежності струму від безрозмірного параметра часу $I(t/\theta)$, що мінімізують температуру холодного спаю термоелемента T_c в різні кінцеві моменти часу $\theta=1$ с, 2 с, 5 с. На цьому ж рисунку показано, як знижується температура охолодження T_c в залежності від часу при використанні цих оптимальних залежностей струму. Температура, яка досягається за час $\theta=5$ с дорівнює $T_c=220$ К, що на 8 К нижче за мінімальну температуру в стаціонарному режимі.

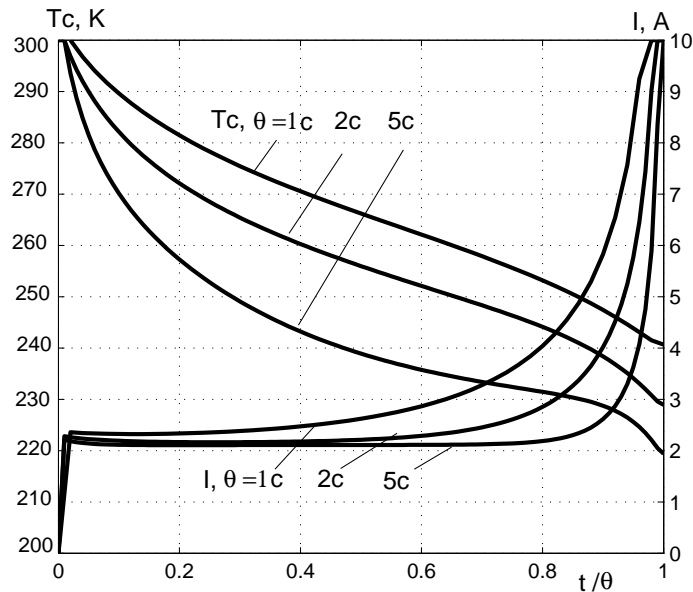


Рис. 3. Оптимальні залежності струму I та відповідні залежності температури охолодження термоелемента T_c від безрозмірного параметра часу t/θ для різних кінцевих моментів часу θ

Порівняння даних рис. 2 і рис. 3 демонструє можливість запропонованого методу оптимізації нестационарного термоелектричного охолодження і доводить, що використання оптимальних функцій струму дозволяє досягти суттєво нижчих температур ніж застосування постійного струму.

Висновки

Застосування варіаційного методу дозволило отримати в загальному вигляді необхідні умови оптимальності для задачі оптимального керування об'єктом з розподіленими параметрами, що описується системою нестационарних одновимірних рівнянь з нестандартними крайовими умовами.

Запропонований алгоритм методу послідовних наближень для чисельного розв'язання задачі дозволяє визначати оптимальні функції керування такими об'єктами.

Розглянуто задачу оптимізації процесу нестационарного термоелектричного охолодження в найбільш загальному її варіанті. Розраховані оптимальні залежності струму живлення термоелектричного модуля від часу, що забезпечують в нестационарному режимі температуру охолодження на 8–10 K нижчу за мінімальну температуру стаціонарного режиму.

ЛІТЕРАТУРА

1. Егоров А. И. Оптимальное управление тепловыми и диффузными процессами. — М: Наука, 1978. — 463 с.
2. Hans P. Geering. Optimal control with Engineering Applications. — New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. — 134 p.
3. Suresh P. Sethi, Gerald L. Optimal Control Theory. Applications to Management Science and Economics. Thompson — Springer Science+Business Media, Inc., 2000. — 505 p.
4. Анатычук Л. И., Семенюк В. А. Оптимальное управление свойствами термоэлектрических материалов и приборов. — Черновцы: Прут, 1992. — 263 с.
5. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимального управления — М: Наука, 1976. — 392 с.
6. Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. — М: Наука, 1965. — 474 с.
7. Сиразетдинов Т. К. Оптимизация систем с распределенными параметрами. — М: Наука, 1977. — 479 с.
8. Фурсиков А. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. — Новосибирск: Научная книга, 1999. — 352 с.
9. Шевяков А. А., Яковлева Р. В. Управление тепловыми объектами с распределенными параметрами. — М: Энергоатомиздат, 1986. — 208 с.
10. Анатычук Л. И. Термоэлектричество. Том II. Термоэлектрические преобразователи энергии. — Киев, Черновцы: Институт термоэлектричества, 2003. — 376 с.
11. Ronggui Yang, Gang Chen, Ravi Kumar A., Jeffrey Snyder G. Jean-Pierre Fleuriat. Transient cooling of thermoelectric coolers and its applications for microdevices. Energy Conversion and Management. — 2005. — 46. — P. 1407–1421.

ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРНЕТИКИ, КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, ВУЛ. ВОЛОДИМИРСЬКА, 64, КИЇВ, 01601, УКРАЇНА.

Надійшла 28.09.2013