Журнал обчислювальної та прикладної математики | **2013, №4(114)** | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.9

СИЛЬНО ЗБІЖНИЙ ДЕКОМПОЗИЦІЙНИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ОПЕРАТОРНОГО ВКЛЮЧЕННЯ З СУМОЮ ДВОХ МАКСИМАЛЬНИХ МОНОТОННИХ ОПЕРАТОРІВ

В. В. Семенов

Резюме. У роботі розглянуто операторне включення з сумою двох максимальних монотонних операторів, що діють у нескінченновимірному гільбертовому просторі. Для цієї задачі запропоновано новий декомпозиційний метод, що є регуляризацією схеми Tseng'a за допомогою гібридної CQ-схеми Nakajo, Takahashi. Доведено теорему про сильну збіжність породжених методом послідовностей до нормального розв'язку операторного включення. Результат отримано за умов, коли один з операторів є максимальним монотонним, а другий — однозначним, монотонним та ліпшицевим.

Ключові слова: операторне включення, максимальний монотонний оператор, декомпозиція, алгоритм, нормальний розв'язок, сильна збіжність.

1. Вступ

Операторні включення та варіаційні нерівності належать до центральних об'єктів дослідження в сучасному нелінійному аналізі [1, 2, 3]. Багато задач дослідження операцій, математичної економіки та математичної фізики можна записати у формі операторних включень, для наближеного розв'язання яких запропоновано та досліджено ряд алгоритмів [4–29].

У даній роботі розглянуто включення

$$0 \in (A + B)\, x$$

з максимальними монотонними операторами A, B, що діють у нескінченновимірному гільбертовому просторі. Грунтуючись на методі декомпозиції Tseng'a (Tseng's modified forward-backward splitting method) [4] та відомому гібридному CQ-методі апроксимації нерухомих точок нерозтягуючих операторів [5], запропоновано новий сильно збіжний декомпозиційний алгоритм розв'язання включень. Раніше подібний прийом було використано у роботі [6] для регуляризації слабко збіжного у нескінченновимірній ситуації екстраградієнтного методу Корпелевич розв'язання варіаційних нерівностей [7] (див. також [8]). Теорема сильної збіжності отримана за умов, коли один з операторів (той, що використовується на „backward"-кроці) є максимальним монотонним, а другий — однозначним, монотонним та ліпшицевим.

Опишемо коротко структуру статті. У другому пункті сформульовано задачу, наведено основні припущення та допоміжні факти, описано запропонований декомпозиційний метод. Третій пункт присвячено доведенню сильної збіжності методу. В останній, четвертий, пункт винесено ряд заключних зауважень стосовно можливих варіантів методу.

2. Постановка задачі та алгоритм

Нехай H — дійсний гільбертовий простір з скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ та нормою $\|\cdot\|$, P_C — оператор метричного проектування простору H на замкнену опуклу множину $C \subseteq H$. Для оператора $T : H \to 2^H$ будемо використовувати позначення:

$$\operatorname{dom}(T) = \{x \in H : \ Tx \neq \emptyset\},$$
$$T^{-1}0 = \{x \in H : \ 0 \in Tx\}.$$

Нагадаємо, що резольвентою оператора $T : H \to 2^H$ називають оператор $J_T = (I+T)^{-1} : H \to 2^H$. Відомо, що для максимального монотонного оператора T резольвента J_T є однозначним, скрізь заданим та міцно нерозтягуючим (firmly nonexpansive) оператором, а множина $T^{-1}0$ — замкненою та опуклою [3]. Корисною є

Лема 1 ([1, 3]). *Нехай $T : H \to 2^H$ — максимальний монотонний оператор, x, $u \in H$. Тоді*

$$(u-v, x-y) \geq 0 \ \ \forall y \in \operatorname{dom}(T) \ \ \forall v \in Ty \quad \Rightarrow \quad x \in \operatorname{dom}(T), \ u \in Tx.$$

Нехай:

A1) $A : H \to 2^H$ — максимальний монотонний оператор;
A2) $B : H \to H$ — монотонний та ліпшицевий оператор.

Розглянемо операторне включення:

$$0 \in (A+B)\,x. \tag{1}$$

Припустимо, що

A3) $(A+B)^{-1}0 \neq \emptyset$.

Типовим прикладом (1) є варіаційні нерівності:

$$\text{знайти } x \in C : \ \ (Tx, y-x) \geq 0 \quad \forall y \in C, \tag{2}$$

де C — замкнена опукла підмножина H, $T : H \to H$. Дійсно, (2) можна подати у вигляді операторного включення [1, 3]:

$$0 \in (T + N_C)\,x,$$

де $N_C x$ — нормальний конус множини C в точці $x \in H$, тобто

$$N_C x = \begin{cases} \{z \in H : \ (z, y-x) \leq 0 \ \ \forall y \in C\}, & \text{якщо } x \in C, \\ \emptyset, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Для побудови сильно збіжних апроксимацій розв'язків включення (1) будемо використовувати

Алгоритм 1. Для заданого $x_1 = x \in H$ генеруємо послідовність елементів $x_n \in H$ за допомогою ітераційної схеми ($\lambda_n > 0$):

$$\begin{cases} y_n = x_n - \lambda_n B x_n, \\ z_n = J_{\lambda_n A} y_n, \\ v_n = x_n - y_n + z_n - \lambda_n B z_n, \\ C_n = \{z \in H : \|v_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ Q_n = \{z \in H : (x_n - z, x - x_n) \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x. \end{cases}$$

Зауваження 1. Алгоритм 1 є регуляризацією за допомогою проекційної CQ-схеми [5, 6] відомого декомпозиційного методу Tseng'a [4].

Зауваження 2. Для варіаційної нерівності (2) алгоритм 1 набуває вигляду[1]:

$$\begin{cases} x_1 = x \in H, \\ z_n = P_C\left(x_n - \lambda_n B x_n\right), \\ v_n = z_n - \lambda_n\left(B z_n - B x_n\right), \\ C_n = \{z \in H : \|v_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ Q_n = \{z \in H : (x_n - z, x - x_n) \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x. \end{cases}$$

Зробимо припущення:

A4) $\lambda_n \in [a, b] \subseteq (0, 1/L)$, де $L > 0$ — константа Ліпшиця оператора B.

3. Теорема сильної збіжності

Сформулюємо основний результат.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови A1)–A4). Тоді породжені алгоритмом 1 послідовності (x_n), (z_n) та (v_n) сильно збігаються до точки $z^* = P_{(A+B)^{-1}0} x$.*

Спочатку доведемо важливу нерівність.

Лема 2. *Для породжених алгоритмом 1 послідовностей (x_n), (z_n) та (v_n) має місце нерівність*

$$\|v_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 - \left(1 - \lambda_n^2 L^2\right) \|x_n - z_n\|^2, \tag{3}$$

де $z \in (A + B)^{-1} 0$.

Доведення. Нехай $z \in (A + B)^{-1} 0$. Маємо

$$\begin{aligned} \|v_n - z\|^2 &= \|x_n - y_n + z_n - \lambda_n B z_n - z\|^2 = \\ &= \|(z_n - z) + \lambda_n\left(B x_n - B z_n\right)\|^2 = \|z_n - z\|^2 + \\ &\quad + 2\lambda_n (B x_n - B z_n, z_n - z) + \lambda_n^2 \|B x_n - B z_n\|^2. \end{aligned} \tag{4}$$

З монотонності оператора $\lambda_n A$ та рівності $z_n = J_{\lambda_n A} y_n$ випливає

$$(z_n - y_n - \lambda_n B z, z_n - z) \leq 0.$$

[1] Оскільки $J_{\lambda N_C} = P_C$, де $\lambda > 0$.

З монотонності оператора B випливає

$$(\lambda_n Bz - \lambda_n Bz_n, z_n - z) \leq 0.$$

Склавши ці нерівності, отримаємо

$$(z_n - y_n - \lambda_n Bz_n, z_n - z) \leq 0. \tag{5}$$

З (5) випливає нерівність

$$\begin{aligned} 2\lambda_n(Bx_n - Bz_n, z_n - z) = 2(z_n - y_n - \lambda_n Bz_n, z_n - z) + \\ + 2(\lambda_n Bx_n + y_n - z_n, z_n - z) \leq 2(x_n - z_n, z_n - z) = \\ = \|x_n - z\|^2 - \|z_n - z\|^2 - \|z_n - x_n\|^2 . \end{aligned} \tag{6}$$

Урахувавши (6) в (4), отримаємо

$$\begin{aligned} \|v_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 - \|z_n - x_n\|^2 + \lambda_n^2 \|Bx_n - Bz_n\|^2 \leq \\ \leq \|x_n - z\|^2 - (1 - L^2\lambda_n^2) \|x_n - z_n\|^2 , \end{aligned}$$

що і треба було довести. □

Перейдемо безпосередньо до доведення теореми 1. Множини Q_n, C_n — опуклі та замкнені. Нехай $z \in (A+B)^{-1}0$. З нерівності (3) випливає $z \in C_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Отже, $(A+B)^{-1}0 \subseteq C_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Тепер за допомогою математичної індукції покажемо, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ має місце вкладення $(A+B)^{-1}0 \subseteq C_n \cap Q_n$. Для $n = 1$ маємо $Q_n = H$. Тому $(A+B)^{-1}0 \subseteq C_1 \cap Q_1$. Нехай для деякого $k \in \mathbb{N}$ маємо $(A+B)^{-1}0 \subseteq C_k \cap Q_k$. Тоді існує єдина точка $x_{k+1} \in C_k \cap Q_k$, така, що $x_{k+1} = P_{C_k \cap Q_k} x$. З $x_{k+1} = P_{C_k \cap Q_k} x$ випливає

$$(x_{k+1} - z, x - x_{k+1}) \geq 0 \quad \forall z \in C_k \cap Q_k.$$

Оскільки $(A+B)^{-1}0 \subseteq C_k \cap Q_k$, то $(A+B)^{-1}0 \subseteq Q_{k+1}$. Таким чином, $(A+B)^{-1}0 \subseteq C_{k+1} \cap Q_{k+1}$.

Покажемо, що послідовність (x_n) обмежена. Існує єдина точка $z^* \in (A+B)^{-1}0$, така, що $z^* = P_{(A+B)^{-1}0} x$. З $x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x$ випливає

$$\|x_{n+1} - x\| \leq \|z - x\| \quad \forall z \in C_n \cap Q_n.$$

Оскільки $z^* \in (A+B)^{-1}0 \subseteq C_n \cap Q_n$, то

$$\|x_{n+1} - x\| \leq \|z^* - x\| \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Звідки випливає обмеженість (x_n).

Доведемо, що

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0. \tag{8}$$

З $x_{n+1} \in C_n \cap Q_n \subseteq Q_n$ та $x_n = P_{Q_n} x$, випливає

$$\|x_{n+1} - x\| \geq \|x_n - x\| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Послідовність $(\|x_n-x\|)$ обмежена і неспадна. Тому існує скінченна границя $\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|$. З іншого боку, оскільки $x_{n+1}\in Q_n$, то $(x_n-x_{n+1},x-x_n)\geq 0$ і

$$\begin{aligned}\|x_n-x_{n+1}\|^2 &= \|(x_n-x)-(x_{n+1}-x)\|^2 = \\ &= \|x_n-x\|^2-2(x_n-x,x_{n+1}-x_0)+\|x_{n+1}-x\|^2 = \\ &= \|x_{n+1}-x\|^2-\|x_n-x\|^2-2(x_n-x_{n+1},x-x_n)\leq \\ &\leq \|x_{n+1}-x\|^2-\|x_n-x\|^2 .\end{aligned}$$

Звідки випливає (8).

Оскільки $x_{n+1}\in C_n$, то

$$\|v_n-x_{n+1}\|\leq\|x_n-x_{n+1}\| .$$

Звідки

$$\|v_n-x_n\|\leq\|v_n-x_{n+1}\|+\|x_{n+1}-x_n\|\leq 2\,\|x_n-x_{n+1}\|\to 0. \tag{9}$$

Використовуючи нерівність з леми 2 отримуємо

$$\begin{aligned}\|x_n-z_n\|^2 &\leq \frac{\|x_n-z\|^2-\|v_n-z\|^2}{(1-\lambda_n^2L^2)} = \\ &= \frac{(\|x_n-z\|-\|v_n-z\|)\,(\|x_n-z\|+\|v_n-z\|)}{(1-\lambda_n^2L^2)} \leq \\ &\leq \frac{(\|x_n-z\|+\|v_n-z\|)}{(1-\lambda_n^2L^2)}\,\|x_n-v_n\| = O\left(\|x_n-v_n\|\right),\end{aligned}$$

де $z\in(A+B)^{-1}0$. З (9) випливає

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-z_n\|=0. \tag{10}$$

Розглянемо довільну підпослідовність (x_{n_k}), що слабко збігається до деякої точки $w\in H$. Покажемо, що $w\in(A+B)^{-1}0$. З (10) випливає

$$z_{n_k}\rightharpoonup w$$

та

$$(A+B)z_{n_k}\ni u_{n_k}=\frac{x_{n_k}-z_{n_k}}{\lambda_{n_k}}+Bz_{n_k}-Bx_{n_k}\to 0.$$

Маємо

$$(u_{n_k}-p,z_{n_k}-y)\geq 0\ \ \forall y\in\operatorname{dom}(A+B)\ \ \forall p\in(A+B)y.$$

Після граничного переходу отримаємо

$$(0-p,w-y)\geq 0\ \ \forall y\in\operatorname{dom}(A+B)\ \ \forall p\in(A+B)y.$$

Оскільки оператор $A+B$ є максимальним монотонним, то, завдяки лемі 1, $0\in(A+B)w$.

Для $z^*=P_{(A+B)^{-1}0}x$ з нерівності (7) випливає

$$\|x-z^*\|\leq\|x-w\|\leq\liminf_{k\to\infty}\|x-x_{n_k}\|\leq\limsup_{k\to\infty}\|x-x_{n_k}\|\leq\|x-z^*\| .$$

Тобто, ми отримали

$$\lim_{k\to\infty} \|x - x_{n_k}\| = \|x - w\| = \|x - z^*\| .$$

Звідки, $x_{n_k} \to w = z^*$. Отже, $x_n \to z^*$. З (9) і (10) випливає $v_n \to z^*$ і $z_n \to z^*$, що і треба було довести.

4. Заключні зауваження

Зауваження 3. Аналогічне теоремі 1 твердження має місце і для такої схеми:

$$\begin{cases} x_1 = x \in H, \ \ C_1 = H, \\ y_n = x_n - \lambda_n B x_n, \\ z_n = J_{\lambda_n A} y_n, \\ v_n = x_n - y_n + z_n - \lambda_n B z_n, \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \|v_n - z\| \le \|x_n - z\|\} , \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x. \end{cases}$$

Подібна схема для задачі рівноважного програмування досліджена в [9]. Основний недолік цих схем — зростаюча складність опуклих множин C_n, на які проектується точка x.

Зауваження 4. Якщо невідома константа Ліпшиця оператора B, то замість алгоритму 1 можна застосувати процес з Арміхо-подібним регулюванням кроку λ_n (див. [4, 10]):

$$\begin{cases} x_1 = x \in H, \\ j(n) = \min\left\{ j \ge 0 : \ \frac{\left\|B J_{\sigma 2^{-j} A}\left(I - \sigma 2^{-j} B\right) x_n - B x_n\right\|}{\left\|J_{\sigma 2^{-j} A}\left(I - \sigma 2^{-j} B\right) x_n - x_n\right\|} \le \frac{2^j \theta}{\sigma} \right\}, \\ \lambda_n = \frac{\sigma}{2^{j(n)}}, \\ z_n = J_{\lambda_n A}\left(I - \lambda_n B\right) x_n, \\ v_n = z_n - \lambda_n \left(B z_n - B x_n\right), \\ C_n = \{z \in H : \|v_n - z\| \le \|x_n - z\|\} , \\ Q_n = \{z \in H : (x_n - z, x - x_n) \ge 0\} , \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x, \end{cases}$$

де $\sigma > 0$, $\theta \in (0, 1)$ — задані параметри.

Зауваження 5. Цікавим та важливим є питання розробки сильно збіжного декомпозиційного методу для включення

$$0 \in (A_1 + A_2 + ... + A_p + B)\, x,$$

де орератори A_i — максимальні монотонні, а оператор B — однозначний, монотонний та ліпшицевий.

Автор вдячний аспіранту Ю. В. Маліцькому за корисні зауваження під час дискусій.

Робота виконана за фінансової підтримки Верховної Ради України (Іменна стипендія ВР України для молодих вчених у 2013 році).

Література

1. Aubin J.-P., Ekeland I. Applied Nonlinear Analysis. — Wiley, New York, 1984.
2. Nagurney A. Network economics: A variational inequality approach. — Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.
3. Bauschke H. H., Combettes P.L. Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces. — Springer, New York, 2011.
4. Tseng P. A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings // SIAM J. Control Optim. — 2000. — V. 38. — P. 431–446.
5. Nakajo K., Takahashi W. Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups // J. Math. Anal. Appl. — 2003. — 279. — P. 372–379.
6. Nadezhkina N., Takahashi W. Strong convergence theorem by a hybrid method for nonexpansive mappings and Lipschitz-continuous monotone mappings // SIAM J. Optim. — 2006. — V. 16. — P. 1230–1241.
7. Korpelevich G. M. The extragradient method for finding saddle points and other problems // Ekonomika i Matematicheskie Metody. — 1976. — V. 12. — P. 747–756 (In Russian).
8. Malitsky Yu. V., Semenov V. V. A hybrid method without extrapolation step for solving variational inequality problems // Journal of Global Optimization. — 2014. — V. 58, №2. — DOI 10.1007/s10898-014-0150-x.
9. Voitova T. A., Denisov S. V., Semenov V. V. Strongly convergent modification of Korpelevich's method for equilibrium programming problems // J. Comp. Appl. Math. — 2011. — №1(104). — P. 10–23 (In Ukrainian).
10. Khobotov E. N. Modification of the extragradient method for solving variational inequalities and certain optimization problems // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1989. — V. 27. — P. 120–127.
11. Konnov I. V. Combined relaxation methods for variational inequalities. — Springer-Verlag, Berlin, 2001.
12. Facchinei F., Pang J.-S. Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problem. V. 2. — Springer, New York, 2003.
13. Vasin V. V., Eremin I. I. Operators and iterative processes of Fejer type. (Theory and Applications). — Regulyarnaya i chaoticheskaya dinamika, Moscow-Izhevsk, 2005 (In Russian).
14. Semenov V. V. About convergence of methods for solving bilevel variational inequalities with monotone operators // J. Comp. Appl. Math. — 2010. — №2(101). — P. 121–129 (In Russian).
15. Voitova T. A., Semenov V. V. Method for solving the bilevel operator inclusions // J. Comp. Appl. Math. — 2010. — №3(102). — P. 34–39 (In Russian).
16. Semenov V. V. A strongly convergent algorithm for approximation of fixed point of multivalued Fejerian operator // J. Comp. Appl. Math. — 2010. — №4(103). — P. 89–93 (In Ukrainian).
17. Malitsky Yu. V., Semenov V. V. The new theorems of strong convergence of proximal method for the problem of equilibrium programming // J. Comp. Appl. Math. — 2010. — №3(102). — P. 79–88 (In Ukrainian).
18. Semenov V. V. On the Parallel Proximal Decomposition Method for Solving the Problems of Convex Optimization // Journal of Automation and Information Sciences. — 2010. — V. 42, Iss. 4. — P. 13—18.

19. Lyashko S. I., Semenov V. V., Voitova T.A. Low-cost modification of Korpelevich's method for monotone equilibrium problems // Cybernetics and Systems Analysis. — 2011. — V. 47. — P. 631–639.
20. Denisov S. V., Semenov V. V. Proximal algorithm for bilevel variational inequalities: strong convergence // J. Comp. Appl. Math. — 2011. — №3(106). — P. 27–32 (In Ukrainian).
21. Apostol R. Ya., Grynenko A. A., Semenov V. V. Iterative algorithms for monotone bilevel variational inequalities // J. Comp. Appl. Math. — 2012. — №1(107). — P. 3–14 (In Ukrainian).
22. Malitsky Yu. V. Approximation of fixed point for Lipschitz semigroup of nonexpansive operators // J. Comp. Appl. Math. — 2012. — №1(107). — P. 35–39. (In Ukrainian).
23. Semenov V. V. Parallel decomposition of variational inequalities with monotone operators // J. Comp. Appl. Math. — 2012. — №2(108). — P. 53–58 (In Russian).
24. Semenov V. V. Convergence of proximal algorithm for bilevel convex minimization problem // J. Comp. Appl. Math. — 2012. — 4 (110). — P. 100–111 (In Ukrainian).
25. Voitova T. A., Denisov S. V., Semenov V. V. Alternating proximal algorithm for the problem of bilevel convex minimization // Reports of the NAS of Ukraine. — 2012. — №2. — P. 56–62 (In Ukrainian).
26. Semenov V. V. About one principal scheme calculation of the generalized projection // Reports of the NAS of Ukraine. — 2013. — №6. — P. 41–46 (In Russian).
27. Malitsky Yu. V., Semenov V. V. Outer approximations scheme for variational inequalities over the fixed point set of Fejer operators // Reports of the NAS of Ukraine. — 2013. — №7. — P. 47–52 (In Russian).
28. Malitsky Yu. V., Semenov V. V. A variant of extragradient algorithm for monotone variational inequalities // Cybernetics and Systems Analysis. — 2014. — V. 50.
29. Semenov V. V. Strongly Convergent Algorithms for Variational Inequality Problem Over the Set of Solutions the Equilibrium Problems // Continuous and Distributed Systems, Solid Mechanics and Its Applications / Eds.: M. Z. Zgurovsky and V. A. Sadovnichiy — Springer International Publishing Switzerland, 2014. — V. 211. — P. 131–146.

Факультет кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, ул. Владимирская, 64, Киев, 01601, Украина, e-mail: semenov.volodya@gmail.com

Надійшла 17.05.2013