Журнал обчислювальної та прикладної математики | **2014, №1(115)** | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.982.22

УЗАГАЛЬНЕНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ОДНОГО ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

А. В. Анікушин

Резюме. У роботі наведено приклад інтегро-диференціального оператору з інтегральним ядром спеціального вигляду. Інтегральний доданок не є додатно або від'ємно визначеним. Використовуючи теорію оснащених просторів та методику апріорних оцінок в негативних нормах, доведено нерівності для вказаного та спряженого операторів. Також сформульовано теорему існування та єдиності узагальненого розв'язку.

Вступ

Сучасні дослідження в фізиці, біології, хімії часто приводять до розгляду деяких інтегро-диференціальних рівнянь. Такі рівняння з одного боку дозволяють більш детально і точно побудувати математичну модель природного явища (напр. при наявності "пам'яті" матеріалу [1], [2]), а з іншого є менш дослідженими ніж диференціальні рівняння з частинними похідними.

Теорія оснащених просторів та метод апріорних оцінок в негативних нормах, що був з успіхом затосований С. І. Ляшком та його школою при вивченні існування та єдиність розв'язку диференціальних рівнянь з частинними похідними [3], [4], виявилися корисними і при дослідженні інтегро-диференціальних рівнянь. Зокрема за допомогою вказаних методів і прийомів у роботі [5] було досліджено коректність узагальненої постановки першої початково-краєвої задачі для еліптичного інтегро-диференціального рівняння (відзначимо, що таке рівняння є узагальненням нових математичних моделей з монографії [6]), а в роботах [7], [8] — для рівняння параболічного типу.

Спільною рисою вказаних досліджень є те, що апріорні оцінки отримані в них (а отже і теореми узагальненої розв'язності) співпадають з результатами для чисто диференціальних операторів з частинними похідними, що стоять у вказаних рівняннях поза інтегралом.

У роботах [9], [10], [11] було розглянуто деякі інтегро-диференціальні рівняння з невід'ємно визначеним інтегральними операторами для яких апріорні оцінки і простори, що фігурують у теоремах узагальненої розв'язності, суттєво залежать від ядер інтегральної частини оператору.

У данній роботі наведено приклад інтегро-диференціального оператора $\mathcal{L} = D + I$ з частинними похідними з інтегральним доданком I типу Вольтерра, для якого інтегральний доданок I не є невід'ємно визначеним та суттєво впливає на існування узагальненого розв'язку. Зокрема сформульовано теореми існування та єдиності узагальненого розв'язку для правих частин з деякого негативного простору.

Основні позначення і простори

Розглянемо лінійний оператор

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \int_0^t \sin(t-\tau) \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x_i^2} d\tau.$$

Тут $u(x,t)$ — функція, що описує стан системи в області $Q = \Omega \times (0,T)$, Ω — обмежена область в n-вимірному просторі з гладкою межею $\partial\Omega$. Областю визначення оператору $\mathcal{L}$ вважатимемо множину нескінченно диференційовних функцій $u(x,t)$, що задовольняють умови

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,T) = 0.$$

Цю множину позначимо через $C_{BR}^{(\infty)}(Q)$. Розглянемо також множину нескінченно диференційовних функцій $v(x,t)$, що задовольняють умови

$$v|_{\partial\Omega} = 0, \quad v(x,0) = 0,$$

яку позначимо через $C_{BR^+}^{(\infty)}(Q)$.

Для дослідження рівняння з оператором $\mathcal{L}$ уведемо до розгляду спеціальні простори. Через $p(u)$ та $p_+(u)$ позначимо напівнорми

$$\left(\sum_{i=1}^n \int_\Omega \left(\int_0^T \int_0^t \cos t u_{x_i}(x,\tau) d\tau dt \right)^2 + \left(\int_0^T \int_0^t \sin t u_{x_i}(x,\tau) d\tau dt \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left(\sum_{i=1}^n \int_\Omega \left(\int_0^T \int_t^T \cos t u_{x_i}(x,\tau) d\tau dt \right)^2 + \left(\int_0^T \int_t^T \sin t u_{x_i}(x,\tau) d\tau dt \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

відповідно. Нехай також

$$q(u) = \left(\int_Q \left(\int_0^t \sin(t-\tau) \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(x,\tau)\, d\tau \right)^2 dQ \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$q_+(u) = \left(\int_Q \left(\int_t^T \sin(t-\tau) \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(x,\tau)\, d\tau \right)^2 dQ \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|u\|^2_{H^+_{BR}} = \|u\|^2_{L_2} + p^2(u), \quad \|u\|^2_{H^+_{BR^+}} = \|u\|^2_{L_2} + p_+^2(u), \quad \|u\|_{W^+} = \|u_t\|_{L_2},$$

$$\|u\|^2_{E^+_{BR}} = \|u\|^2_{L_2} + q^2(u), \quad \|u\|^2_{E^+_{BR^+}} = \|u\|^2_{L_2} + q_+^2(u).$$

Через W^+_{BR}, H^+_{BR}, E^+_{BR} позначимо поповнення простору $C_{BR}^{(\infty)}(Q)$ за нормами $\|\cdot\|_{W^+}, \|\cdot\|_{H^+_{BR}}, \|\cdot\|_{E^+_{BR}}$ відповідно, а через $W^+_{BR^+}$, $H^+_{BR^+}$, $E^+_{BR^+}$ позначимо поповнення простору $C_{BR^+}^{(\infty)}(Q)$ за нормами $\|\cdot\|_{W^+}, \|\cdot\|_{H^+_{BR^+}}, \|\cdot\|_{E^+_{BR^+}}$ відповідно.

Зауваження 1. Має місце щільне і неперервне вкладення $E^+_{BR} \subset H^+_{BR} \subset L_2$.

Доведення. Покажемо, що має місце вкладення просторів. Для цього слід перевірит умову π). Нехай послідовність $u_m \in C^{(\infty)}_{BR}(Q)$ є фундаментальною у просторі E^+_{BR} і збігається до нуля у просторі H^+_{BR}. Тоді, очевидно $u_m \to 0$ у просторі L_2. Позначимо

$$\Phi_m(x,t) = \int_0^t \sin(t-\tau) \sum_{i=1}^n (u_m)_{x_i x_i}(x,\tau)\ d\tau.$$

Оскільки $q(u_m - u_k) \to 0,\ m,k \to \infty$, то $\|\Phi_m - \Phi_k\| \to 0,\ m,k \to \infty$, а отже, послідовність Φ_m є фундаментальною у просторі L_2. Тому Φ_n збігається у просторі L_2 до деякого елементу $\Phi \in L_2$. Нехай $v(x,t)$ довільна гладка функція, що дорівнює нулю на $\partial\Omega$ разом з усіма своїми похідними першого порядку за просторовими змінними v_{x_i}. Розглянемо скалярний добуток $(\Phi_m, v)_{L_2}$ та проінтегруємо частинами:

$$(\Phi_m, v)_{L_2} = \int_Q \int_0^t \sin(t-\tau) \sum_{i=1}^n (u_m)_{x_i x_i}(x,\tau)\ d\tau v(x,t) dQ =$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_Q \int_0^t \sin(t-\tau) u_m(x,\tau)\ d\tau v_{x_i x_i}(x,t) dQ =$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_\Omega \int_0^T \int_0^t \sin(t-\tau) u_m(x,\tau) v_{x_i x_i}(x,t)\ d\tau dt d\Omega =$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_\Omega \int_0^T \int_\tau^T \sin(t-\tau) u_m(x,\tau) v_{x_i x_i}(x,t)\ dt d\tau d\Omega =$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_Q u_m(x,\tau) \int_\tau^T \sin(t-\tau) v_{x_i x_i}(x,t)\ dt dQ.$$

Останній вираз прямує до нуля, оскільки $u_n \to 0$ у просторі L_2. Крім того, $(\Phi_m, v)_{L_2} \to (\Phi, v)_{L_2} = 0$, де v пробігає всюди щільну у L_2 множину. Тому $\Phi = 0$. Отже, $q(u_m) = \|\Phi_m\|_{L_2} \to 0$. Таким чином E^+_{BR} вкладається в H^+_{BR}.

Оскільки E^+_{BR} і H^+_{BR} містять $C^{(\infty)}_{BR}$, то вкладення є щільним. Застосовуючи нерівність Коші-Буняковського нескладно показати, що $\|\cdot\|_{H^+_{BR}} \le c\|\cdot\|_{E^+_{BR}}$, з чого випливає неперервність оператору вкладення.

Аналогічно можна показати справедливість леми для пари просторів $H^+_{BR} \subset L_2$. □

Через $W^-_{BR},\ H^-_{BR},\ E^-_{BR}$ позначимо негативні простори побудовані відносно L_2. Оскільки вкладення $D(\mathcal{L}) = C^{(\infty)}_{BR}(Q) \subset L_2(Q)$ щільне, то можна визначити спряжений оператор. Областю визначення оператору $\mathcal{L}^*$ вважатимемо множину нескінченно диференційовних функцій $C^{(\infty)}_{BR^+}(Q)$. Неважко переконатися, що

$$\mathcal{L}^* u = -\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} - \int_t^T \sin(t-\tau) \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v(x,\tau)}{\partial x_i^2} d\tau.$$

Апріорні нерівності

Лема 1. *Існує така стала* $c_1 > 0$*, що для довільної функції* $u \in C^{(\infty)}_{BR}$ *виконується нерівність* $\|\mathcal{L}u\|_{W^-_{BR^+}} \le c_1 \|u\|_{E^+_{BR}}$.

Доведення. Нехай $u \in C^{(\infty)}_{BR}$. Розглянемо довільну функцію $v \in C^{(\infty)}_{BR^+}$. Оскільки $\mathcal{L}u \in L_2(Q)$, то можна розглянути білінійну форму

$$(\mathcal{L}u, v)_{L_2(Q)} = \int_Q u_t(x,t)v(x,t)\,dQ + \sum_{i=1}^n \int_Q \int_0^t \sin(t-\tau) u_{x_i x_i}(x,\tau)d\tau v(x,t)dQ.$$

Скористаємось нерівністю Шварца:

$$\left|\int_Q u_t(x,t)v(x,t)\,dQ\right| = \left|\int_Q u(x,t)v_t(x,t)\,dQ\right| \le$$

$$\le \left(\int_Q u^2(x,t)\,dQ \int_Q v_t^2(x,t)\,dQ\right)^{\frac{1}{2}} = \|u\|_{L_2} \cdot \|v\|_{W^+_{BR^+}},$$

$$\left|\int_Q \int_0^t \sin(t-\tau) \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(x,\tau)d\tau v(x,t)dQ\right| \le$$

$$\le \left(\int_Q v^2(x,t)\,dQ \int_Q \left(\int_0^t \sin(t-\tau) \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(x,\tau)\,d\tau\right)^2 dQ\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le c \left(\int_Q v_t^2(x,t)\,dQ \int_Q \left(\int_0^t \sin(t-\tau) \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(x,\tau)\,d\tau\right)^2 dQ\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= c \cdot q(u) \|v\|_{W^+_{BR^+}}.$$

Додамо отримані нерівності:

$$|(\mathcal{L}u, v)_{L_2(Q)}| \le \frac{1}{2} c_1 (\|u\|_{L_2} + q(u)) \|v\|_{W^+_{BR^+}} \le c_1 \|u\|_{E^+_{BR}} \|v\|_{W^+_{BR^+}}.$$

Поділивши останню нерівність на $\|v\|_{W^+_{BR^+}}$ та перейшовши до супремуму за функціями $v(x,t) \in C^{(\infty)}_{BR^+}$, отримаємо шукану нерівність. □

Зауваження 2. Отримана в лемі 1 нерівність дозволяє розширити за неперервністю оператор $\mathcal{L}$ з його області визначення $D(\mathcal{L})$ на простір E^+_{BR}. При цьому, зазначена нерівність буде виконуватися вже для всіх елементів $u \in E^+_{BR}$. Зазначимо, що розширення оператору $\mathcal{L}$ буде ін'єктивним. Дійсно, якщо $\mathcal{L}u = 0$, то $u = 0$ у просторі H^+_{BR}. Оскільки простір E^+_{BR} вкладається у простір H^+_{BR}, то $u = 0$ і у просторі E^+_{BR}.

Лема 2. *Існує така стала* $c_1 > 0$*, що для довільної функції* $v \in C^{(\infty)}_{BR^+}$ *виконується нерівність* $\|\mathcal{L}^* v\|_{W^-_{BR}} \le c_1 \|v\|_{E^+_{BR^+}}$.

Доведення. Нехай $v \in C^{(\infty)}_{BR^+}$. Розглянемо довільну функцію $u \in C^{(\infty)}_{BR}$. Аналогічно доведеню попередньої леми, скориставшись нерівністю Шварца, отримаємо

$$\left| \int_Q v_t(x,t)u(x,t)\ dQ \right| \le \|v\|_{L_2} \cdot \|u\|_{W^+_{BR}},$$

$$\left| \int_Q \int_t^T \sin(t-\tau) \sum_{i=1}^n v_{x_i x_i}(x,\tau) d\tau u(x,t) dQ \right| \le c \cdot q_+(v) \|u\|_{W^+_{BR}},$$

$$|(u, \mathcal{L}^* v)_{L_2(Q)}| \le \frac{1}{2} c_1 (\|v\|_{L_2} + q_+(v)) \|u\|_{W^+_{BR}} \le c_1 \|v\|_{E^+_{BR^+}} \|u\|_{W^+_{BR}}.$$

Поділивши останню нерівність на $\|u\|_{W^+_{BR}}$ та перейшовши до супремуму за функціями $u \in C^{(\infty)}_{BR}$, отримаємо шукану нерівність. □

Зауваження 3. Оператор $\mathcal{L}^*$ розширмо за неперервністю на простір $E^+_{BR^+}$. При цьому, зазначена в лемі 2 нерівність буде виконуватися вже для всіх елементів $v \in E^+_{BR^+}$. Зазначимо, що розширення оператору $\mathcal{L}$ буде ін'єктивним.

Лема 3. *Існує така стала $c_0 > 0$, що для довільної функції $u \in E^+_{BR}$ виконується нерівність $\|\mathcal{L}u\|_{W^-_{BR^+}} \ge c_0 \|u\|_{H^+_{BR}}$.*

Доведення. Нехай спочатку $u \in C^{(\infty)}_{BR}$, а $v(x,t) = -\int_0^t u(x,\tau)\ d\tau$. Тоді,

$$(\mathcal{L}u, v)_{L_2(Q)} = \int_Q u_t(x,t)v(x,t)\ dQ + \sum_{i=1}^n \int_Q \int_0^t \sin(t-\tau) u_{x_i x_i}(x,\tau) d\tau v(x,t) dQ.$$

Розглянемо окремо перший доданок:

$$\int_Q u_t(x,t)v(x,t)\ dQ = -\int_Q u_t(x,t) \int_0^t u(x,\tau) d\tau\ dQ =$$

$$= -\int_\Omega \int_0^T u_t(x,t) \int_0^t u(x,\tau) d\tau\ dt dx =$$

$$= -\int_\Omega \int_0^T \int_0^t u_t(x,t) u(x,\tau) d\tau dt\ dx = -\int_\Omega \int_0^T \int_\tau^T u_t(x,t) u(x,\tau) dt d\tau\ dx =$$

$$= -\int_\Omega \int_0^T u(x,\tau) \int_\tau^T u_t(x,t) dt d\tau\ dx = -\int_\Omega \int_0^T u(x,\tau) u(x,t)|_\tau^T d\tau\ dx =$$

$$= \int_\Omega \int_0^T u^2(x,\tau) d\tau\ dx = \int_Q u^2(x,t)\ dQ.$$

Оцінимо другий доданок. Для цього скористаємось тим, що

$$\int_0^t \sin(t-\tau) u_{x_i}(x,\tau) d\tau =$$

$$= \sin(t-\tau) \int_0^\tau u_{x_i}(x,s) ds \Big|_0^t + \int_0^t \cos(t-\tau) \int_0^\tau u_{x_i}(x,s) ds\ d\tau =$$

$$= \int_0^t \cos(t-\tau) \int_0^\tau u_{x_i}(x,s)ds\; d\tau = \int_0^t \int_0^\tau \cos(t-\tau) u_{x_i}(x,s)ds\; d\tau.$$

Проінтегруємо другий доданок частинами:

$$\int_Q \int_0^t \sin(t-\tau) u_{x_i x_i}(x,\tau)d\tau v(x,t)dQ = -\int_Q \int_0^t \sin(t-\tau) u_{x_i}(x,\tau)d\tau v_{x_i}(x,t)dQ =$$

$$= \int_Q \int_0^t \sin(t-\tau) u_{x_i}(x,\tau)d\tau \int_0^t u_{x_i}(x,\tau)d\tau dQ =$$

$$= \int_Q \int_0^t \cos(t-\tau) \int_0^\tau u_{x_i}(x,s)ds\; d\tau \int_0^t u_{x_i}(x,\xi)d\xi\; dQ =$$

$$= \int_\Omega \int_0^T \int_0^t \left(\cos(t-\tau) \int_0^\tau u_{x_i}(x,s)ds \int_0^t u_{x_i}(x,\xi)\; d\xi \right) d\tau dt\; dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_\Omega \int_0^T \int_0^T \left(\cos(t-\tau) \int_0^\tau u_{x_i}(x,s)ds \int_0^t u_{x_i}(x,\xi)\; d\xi \right) d\tau dt\; dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_\Omega \left(\left(\int_0^T \cos\tau \int_0^\tau u_{x_i}(x,s)ds\; d\tau \right)^2 + \left(\int_0^T \sin\tau \int_0^\tau u_{x_i}(x,s)ds\; d\tau \right)^2 \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_\Omega \left(\left(\int_0^T \int_0^t \cos t u_{x_i}(x,s)ds\; dt \right)^2 + \left(\int_0^T \int_0^t \sin t u_{x_i}(x,s)ds\; dt \right)^2 \right) dx.$$

Таким чином

$$(\mathcal{L}u, v)_{L_2(Q)} = \int_Q u^2(x,t)\; dQ + \frac{1}{2} \int_\Omega \left(\int_0^T \int_0^t \cos t u_{x_i}(x,s)ds\; dt \right)^2 dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_\Omega \left(\int_0^T \int_0^t \sin t u_{x_i}(x,s)ds\; dt \right)^2 dx \geq \frac{1}{2} \left(\|u\|_{L_2}^2 + p^2(u) \right).$$

Використаємо нерівність Шварца:

$$\|\mathcal{L}u\|_{W^-_{BR^+}} \|v\|_{W^+_{BR^+}} \geq (\mathcal{L}u, v)_{L_2(Q)} \geq \frac{1}{2} \left(\|u\|_{L_2}^2 + p^2(u) \right) \geq \frac{1}{2} \|u\|_{H^+_{BR}} \|u\|_{L_2}.$$

Оскільки $u(x,t) = -v_t(x,t)$ і $v \in C^{(\infty)}_{BR^+}$, то $\|u\|_{L_2} = \|v\|_{W^+_{BR^+}}$. Отже,

$$\|\mathcal{L}u\|_{W^-_{BR^+}} \|v\|_{W^+_{BR^+}} \geq \frac{1}{2} \|u\|_{H^+_{BR}} \|v\|_{W^+_{BR^+}}.$$

Твердження леми для всіх функцій $u \in E^+_{BR}$ отримаємо граничним переходом. □

Лема 4. *Існує така стала $c_0 > 0$, що для довільної функції $v \in E^+_{BR^+}$ виконується нерівність $\|\mathcal{L}^* v\|_{W^-_{BR}} \geq c_0 \|v\|_{H^+_{BR^+}}$.*

Доведення. Нехай спочатку $v \in C^{(\infty)}_{BR}$, а $u(x,t) = \int_t^T v(x,\tau)\; d\tau$. Тоді, аналогічно доведенню леми 3, інтегруючи частинами, отримаємо:

$$(u, \mathcal{L}^* v)_{L_2(Q)} = -\int_Q u(x,t) v_t(x,t)\; dQ -$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\int_Q\int_t^T \sin(t-\tau)v_{x_ix_i}(x,\tau)d\tau u(x,t)dQ =$$
$$= \int_Q v^2(x,t)\, dQ + \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\int_0^T\int_t^T \cos t v_{x_i}(x,s)ds\, dt\right)^2 dx +$$
$$+\frac{1}{2}\int_\Omega \left(\int_0^T\int_t^T \sin t v_{x_i}(x,s)ds\, dt\right)^2 dx \geq \frac{1}{2}\left(\|v\|^2_{L_2} + p^2_+(v)\right).$$

Решта доведення аналогічна доведенню леми 3. □

Таким чином, справедливий

Наслідок 1. Для операторів $\mathcal{L}, \mathcal{L}^*$ справедливі нерівності

$$\begin{cases} c^{-1}\|u\|_{H^+_{BR}} \leq \|\mathcal{L}u\|_{W^-_{BR^+}} \leq c\|u\|_{E^+_{BR}}, & \forall u \in E^+_{BR}, \\ c^{-1}\|v\|_{H^+_{BR^+}} \leq \|\mathcal{L}^*v\|_{W^-_{BR}} \leq c\|v\|_{E^+_{BR^+}}, & \forall v \in E^+_{BR^+}. \end{cases}$$

Узагальнена розв'язність

Отримані нерівності дозволяють перенести результати, що стосуються узагальненої розв'язності, отримані в [3, 4], на інтегро-диференціальне рівняння, що вивчається.

Сформулюємо відповідні означення та теореми.

Означення 1. Функція $u(x,t) \in H^+_{BR}$ називається узагальненим розв'язком рівняння $\mathcal{L}u = f,\ f \in W^-_{BR^+}$, якщо існує послідовність $u_i \in E^+_{BR}$ така, що

$$\|u - u_i\|_{H^+_{BR}} \to 0,\ \|\mathcal{L}u_i - f\|_{W^-_{BR^+}} \to 0,\ i \to \infty.$$

Через $\overline{\mathcal{L}(E^+_{BR})}$ позначимо замикання образу оператора $\mathcal{L}(E^+_{BR})$ у просторі $W^-_{BR^+}$.

Теорема 1. *Для довільного $f \in \overline{\mathcal{L}(E^+_{BR})}$ існує єдиний узагальнений розв'язок рівняння $\mathcal{L}u = f$ в сенсі означення (1).*

Означення 2. Функція $u(x,t) \in W^+_{BR}$ називається узагальненим розв'язком рівняння $\mathcal{L}u = f,\ f \in H^-_{BR^+}$, якщо рівність

$$(\mathcal{L}^*v, u)_{W^-_{BR}\times W^+_{BR}} = (f, v)_{H^-_{BR^+}\times H^+_{BR^+}}$$

виконується для довільної $v \in E^+_{BR^+}$.

Теорема 2. *Для довільного $f \in H^-_{BR^+}$ існує узагальнений розв'язок рівняння $\mathcal{L}u = f$ в сенсі означення (2).*

Висновок

У роботі досліджено деякі властивості узагальнених розв'язків інтегро-диференціального рівняння з частинними похідними з інтегральним доданком типу Вольтерра. Як бачимо навіть у випадку, коли інтегральна частина рівняння не є знакосталим оператором, для деяких специфічних ядер, метод апріорних оцінок у негативних нормах може бути застосований.

Література

1. Duvant G., Lions J. L. Inequalities in Mechanics and Physics — Springer, 1976. — 397 p.
2. Falaleev M. V., Orlov S. S. Integro-differential equations with degeneration in banach spaces and it's applications in mathematical theory of elasticit // News of Irkutsk State University, Series "Mathematics". — 2011. — №1. — P. 118–134 (in Russian).
3. Lyashko S. I. Generalized optimal control of linear systems with distributed parameters — Boston / Dordrecht / London: Kluwer Academic Publishers, 2002. — 466 p.
4. Lyashko S. I., Nomirovskii D. A., Petunin Ju. I., Semenov V. V. Twentieh Hilbert problem. Generalized solutions of operator equations — Dealektika, 2009. — 192 p. (in Russian).
5. Anikushyn A. V. Generalized solvability of linear elliptic-like integro-differential equation // Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. — 2010. — №3. — P. 163–168 (in Ukrainian).
6. Sveshnikov A. G., Alshin A. B., Korpusov M. O., Pletner Ju. D. Linear and nonlinear equations of Sobolev type — M.: Fizmatlit, 2007. — 734 p. (in Russian).
7. Anikushyn A. V. Optimal control of integro-differential systems of parabolic type // Journ. of comp. and appl. math. — 2010. — №3. — P. 3–16. (in Ukrainian).
8. Anikushyn A. V., Hulianytskyi A. L. Generalized solvability of parabolic integro-differential equations // Differential Equations. — 2014. — №1. — P. 98–109.
9. Anikushyn A. V., Granishak H.M. Generalized solvability of some 4-th order integro-differential equation // VI Int. conference "Comp. and appl. math.". — Kyiv, 2013. — p. 59.
10. Anikushyn A. V., Nomirovskii D. A. Generalized optimal control of systems which are described by linear integro-differential equations with non-negative defined integral operators // Int. conference "Differential equations and their applications". — Lviv, 2010. — P. 38–39.
11. Anikushyn A. V. Generalized Optimal Control for Systems Described by Linear Integro-Differential Equations with Nonnegative Definite Integral Operators // Journal of Automation and Information Sciences. — 2014. — V. 46. — №6. — P. 58–67.

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна.

Надійшла 10.10.2013