Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2014, №1(115) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.9

ЗБІЖНІСТЬ МЕТОДУ ГАЛЬОРКІНА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

А. Л. Гуляницький

Резюме. Доведено збіжність гальоркінських наближень для слабкої постановки параболічних інтегро-диференціальних рівнянь типу Вольтерра. Для доведення коректності відповідної системи звичайних інтегро-диференціальних рівнянь застосовано метод апріорних нерівностей, а також використано відому теорему розв'язності для таких систем у просторі неперервних функцій. Для доведення збіжності методу Гальоркіна використано апріорні нерівності для розв'язків параболічних інтегро-диференціальних рівнянь.

Ключові слова: інтегро-диференціальні рівняння, рівняння Вольтерра, метод Гальоркіна, слабкий розв'язок, апріорні нерівності.

1. Вступ

Дослідження в'язко-пружних систем привзели до появи нового класу математичних моделей — інтегро-диференціальних рівнянь Вольтерра у частинних похідних. Зокрема, дифузія і теплопровідність у деяких системах з пам'яттю відзначається невиконанням класичних законів Фіка і Фур'є (див. напр. [1]–[2] і посилання).

Метод скінченних елементів для таких рівнянь досліджувався, зокрема, у [3]–[4]. Зокрема, одержано оцінки для похибки й запропоновано обчислювальні схеми, які дають змогу економити пам'ять (ця проблема актуальна для рівнянь даного типу, на відміну від диференціальних рівнянь). Слід, однак, відзначити, що у більшості з цих праць припускалася гладкість правої частини за часовою змінною та/або самоспряженість оператора, що діє за просторовими змінними. У даній статті досліджено питання збіжності методу типу Гальоркіна без вказаних припущень.

Структура статті є такою. У ч. 2–3 вводяться основні позначення і формулюються обмеження на коефіцієнти оператора, а також наводиться теорема слабкої розв'язності досліджуваного рівняння розглядається. У ч. 4 формулюється система звичайних інтегро-диференціальних рівнянь, з якої визначаються коефіцієнти гальоркінських наближень, а у ч. 5 доводиться, що ця система має єдиний розв'язок у потрібних просторах. Нарешті, у ч. 6 доводиться збіжність послідовності наближених розв'язків.

2. Основні позначення

Розглянемо рівняння

$$\mathcal{L}u = u_t + \mathcal{A}u + \mathcal{I}u = f. \tag{1}$$

Тут $u = u(x,t)$ — шукана функція стану, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, де Ω — обмежена область з достатньо гладкою межею $\partial\Omega$, $t \in [0,T]$, $f = f(x,t)$; $\mathcal{A}$ — диференціальний оператор другого порядку, що діє за просторовими змінними:

$$\mathcal{A}u = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}(x)u_{x_i}\right)_{x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} a_i(x)u_{x_i} + a(x)u;$$

$$\mathcal{I}u = \int_0^t \left\{ \left(\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t,s)u_{x_i}(x,s) \right)_{x_j} + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t,s)u_{x_i}(x,s) + b(x,t,s)u(x,s) \right\} ds.$$

Рівняння розглядатимемо з однорідними початковими і крайовими умовами:

$$u|_{t=0} = 0, u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

Припустимо виконання умов:

- функції $a_{ij} = a_{ji}$, a_i, $\frac{\partial a_i}{\partial x_i}$, a вимірні й обмежені в Ω;
- функції $b_{ij} = b_{ji}, b_i, \frac{\partial b_i}{\partial x_i}, b, \frac{\partial b_{ij}(x,t,\tau)}{\partial \tau}, \frac{\partial b_i(x,t,\tau)}{\partial \tau}, \frac{\partial b(x,t,\tau)}{\partial \tau}$ вимірні й обмежені в $\Omega \times [0,T] \times [0,T]$;
- оператор $\mathcal{A}$ рівномірно еліптичний, тобто $\exists \alpha > 0\ \forall x \in \Omega$, $\xi_i \in \mathbb{R}$ виконується нервіність

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2.$$

Під $L_2([0,T])^m,\ m \in \mathbb{N}$ розумітимемо простір вектор-функцій $F = (f_1, ..., f_m)^T$, для яких $f_k \in L_2([0,T])$, з нормою $\|F\|^2_{L_2([0,T])^m} = \sum_{k=1}^m \|f_k\|^2_{L_2([0,T])}$. Аналогічно означимо й простори $C([0,T])^m, C^1([0,T])^m$ і $H^1_0([0,T])^m$; останній складається з вектор-функцій, які дорівнюють нулю у момент $t = 0$ і мають похідні в $L_2([0,T])^m$.

Нарешті, введемо позначення $V^+ = L_2([0,T], H^1_0(\Omega))$ і $V^- = L_2([0,T], H^{-1}_0(\Omega))$, $Q = \Omega \times [0,T]$.

3. Слабкий розв'язок

Розглянемо випадок, коли права частина рівняння належить простору узагальнених функцій за просторовою змінною, а за часом інтегровна з квадратом.

Під слабким розв'язком задачі (1)–(2) розумітимемо елемент u, для якого виконуєтсья тотожність

$$(u_t, v) + \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij} u_{x_j}, v_{x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} \left(a_i u_{x_j}, v\right) + (au, v) +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{n} \left(\int_0^t b_{ij}(x,t,s) u_{x_i}(x,s)\ ds, v_{x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^t b_i(x,t,s) u_{x_i}(x,s)\ ds, v\right) +$$
$$+ \left(\int_0^t b(x,t,s) u(x,s)\ ds, v\right) = (f, v) \quad \forall v \in V^+,$$

де через $(\cdot,\cdot)$ позначено скалярний добуток у просторі $L_2(Q)$.

Теорема 1. *Нехай $f \in V^-$. Тоді задача (1)-(2) має єдиний слабкий розв'язок $u \in V^+$. Крім того, справедливі апріорні нерівності*
$C_1 \|f\|_{V^-} \le \|u\|_{V^+} \le C_2 \|f\|_{V^-}$, *де сталі $C_1, C_2 > 0$ не залежать від f.*

Доведення здійснено abc-методом, який раніше застосовувався для диференціальних рівнянь [5]; до інтегро-диференціальних рівнянь його застосовано у [6] і розвинено у [7], де одержано зокрема й цю теорему.

Надалі будемо розглядати функцію стану u і праву частину f як функції змінної t зі значеннями у гільбертовому просторі функцій змінної x.

4. Схема методу Гальоркіна

Виберемо базис $\{\omega_i\}_{i=1}^{\infty}$ у просторі $H_0^1(\Omega)$. Для простоти будемо вважати цей базис ортонормованим у $L_2(\Omega)$, хоча ця вимога не є суттєвою. Через H_m позначимо лінійну оболонку системи $\{\omega_1, ..., \omega_m\}$.

Наближений розв'язок рівняння (1) будемо шукати у вигляді лінійної комбінації $u^m = \sum_{k=1}^{m} g_k(t)\omega_k$. Коефцієнти $g_k(t)$ знаходяться зі співвідношень

$$(u_t^m(t), v)_{L_2(\Omega)} + \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i}^m(t), v_{x_j}\right)_{L_2(\Omega)} + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i}^m(t), v\right)_{L_2(\Omega)} +$$
$$+ (au^m(t), v)_{L_2(\Omega)} + \left(\sum_{i,j=1}^{n} \int_0^t b_{ij} u_{x_i}^m(s)\ ds, v_{x_j}\right)_{L_2(\Omega)} +$$
$$+ \left(\sum_{i=1}^{n} \int_0^t b_i u_{x_i}^m(s)\ ds, v\right)_{L_2(\Omega)} + \left(\int_0^t b u_{x_i}^m(s)\ ds, v\right)_{L_2(\Omega)} = (f(t), v)_{L_2(\Omega)}, \tag{3}$$

де v — довільний елемент простору H_m. Переписавши ці рівності з $v = \omega_l, l = \overline{1,m}$, одержимо систему звичайних інтегро-диференціальних рівнянь відносно $g_k(t)$:

$$(LG)(t) \equiv G^{'}(t) + AG(t) + \int_0^t B(t,s)G(s)\ ds = F(t) \qquad (4)$$

з початковими умовами

$$G(0) = 0, \qquad (5)$$

де $G(t) = (g_1(t), ..., g_m(t))^T$, $F(t) = ((f(t), \omega_1)_{L_2(\Omega)}, ..., (f(t), \omega_m)_{L_2(\Omega)})^T$, A,B – матриці, елементи яких визначаються так:

$$A_{kl} = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}\omega_{l_{x_i}}, \omega_{k_{x_j}})_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} (a_i\omega_{l_{x_i}}, \omega_k)_{L_2(\Omega)} + (a\omega_l, \omega_k)_{L_2(\Omega)},$$

$$B_{kl}(t,s) = \sum_{i,j=1}^{n} (b_{ij}\omega_{l_{x_i}}, \omega_{k_{x_j}})_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} (b_i\omega_{l_{x_i}}, \omega_k)_{L_2(\Omega)} + (b\omega_l, \omega_k)_{L_2(\Omega)}.$$

Легко бачити, що $F \in L_2([0,T])^m$, тобто $(f(t), \omega_k) \in L_2([0,T]), k = \overline{1,m}$.

5. Розв'язність системи звичайних інтегро-диференціальних рівнянь

Доведення того, що система (4)–(5) має єдиний розв'язок достатньої гладкості, здійснимо у два етапи. Спочатку покажемо, що існування і єдиність мають місце для неперервно диференційовних правих частин, що обертаються в нуль у початковий момент часу (така множина щільна у просторі $L_2([0,T])^m$), а потім поширимо це твердження на весь простір $L_2([0,T])^m$ за допомогою апріорних нерівностей.

Лема 1. *Нехай $F \in C^1([0,T])^m$, $F(0) = 0$. Тоді система (4)–(5) має єдиний розв'язок $u \in C^1([0,T])^m$.*

Доведення. У [8] досліджено систему

$$G^{'}(t) + \int_0^t K(t,s,G(s))\ ds = Z(t, G(t))$$

з початковими умовами $G(0) = G_0$, яку можна інтегруванням від 0 до t звести до вигляду

$$\Lambda_1 G(t) \equiv \int_0^t Z(s, G(s))\ ds - \int_0^t \int_0^s K(s,\nu,G(\nu))\ d\nu\ ds = G(t),$$

(при $G_0 = 0$), тобто до пошуку нерухомої точки оператора Λ_1. Доведено ([8], твердження 1 і теорема 2), що цей оператор має єдину нерухому точку $G \in C([0,T])^m$, якщо ядро K і права частина Z неперервні за усіма змінними й задовольняють умову Ліпшіца: $\|Z(t,y) - Z(t,z)\| \le R_1\|y - z\|$, $\|K(t,s,y) - K(t,s,z)\| \le R_2\|y - z\|$. Очевидно, що ці умови виконуються у випадку лінійної системи вигляду (4), тобто при $Z(t, G(t)) = F(t) - AG(t)$, $K(t,s,G(s)) = B(t,s)G(s)$. Крім того, міркування справедливі й для інтегрального оператора дещо більш загального вигляду

$$\Lambda_1 G(t) \equiv \int_0^t F(s) - AG(s)\ ds - \int_0^t \int_0^s K(t,s,\nu)G(\nu)\ d\nu\ ds,$$

де ядро K є обмеженою функцією усіх трьох змінних. У такому випадку твкож виконуєтсья умова Ліпшіца, і можна повторити міркування з [8]. Тепер підставимо у систему (4)–(5) $G(t) = \int_0^t G'(s)ds$. Маємо

$$\Lambda_2 G'(t) \equiv \int_0^t F'(s)\ ds - \int_0^t B(t,s) \int_0^s G'(\nu)\ d\nu\ ds = G'(t).$$

За вказаною теоремою цей оператор має єдину нерухому точку $G' \in C([0,T])^m$, яка і є єдиним розв'язком системи (4). □

Перейдемо до доведення апріорних нерівностей.

Лема 2. *Оператор L діє неперервно з $H_0^1([0,T])^m$ у $L_2([0,T])^m$, $m \in \mathbb{N}$.*

Це твердження доводиться шляхом безпосередньої перевірки.

Тепер наведемо допоміжну нерівність, яка знадобиться для доведення коерцитивності оператора L.

Лема 3. *Нехай $f, g \in C([0,T])$ — невід'ємні функції. Тоді $\forall p > 0$*

$$\int_0^T f(t) \left(\int_0^t e^{p\tau} g(\tau)\ d\tau \right)\ dt \le \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{p}} \left(\int_0^T e^{pt} f^2(t)\ dt + \int_0^T e^{pt} g^2(t)\ dt \right).$$

Доведення цієї леми див. у [7].

Лема 4. *Оператор L коерцитивний, тобто*
$\exists C > 0\ \forall G \in H^1([0,T])^m \quad \|LG\|_{L_2([0,T])^m} \ge C\|G\|_{H_0^1([0,T])^m}$, $m \in \mathbb{N}$.

Доведення. Достатньо довести ланцюжок нерівностей

$$\begin{aligned} C\|LG\|_{L_2([0,T])^m}\|G\|_{H_0^1([0,T])^m} &\ge \|LG\|_{L_2([0,T])^m}\|H\|_{L_2([0,T])^m} \ge \\ &\ge \sum_{k=1}^m \|(LG)_k\|_{L_2([0,T])}\|h_k\|_{L_2([0,T])} \ge \sum_{k=1}^m ((LG)_k, h_k)_{L_2([0,T])} \ge \\ &\ge C\|H\|^2_{L_2([0,T])^m} \ge C\|G\|^2_{H_0^1([0,T])^m}, \end{aligned} \tag{6}$$

де $H = (h_1, ..., h_m)^T$, через C позначено додатну сталу, яка може бути різною для різних нерівностей з ланцюжка, а вектор-функції H і G пов'язані співвідношшенням $G(t) = \int_0^t e^{ps} H(s)ds$, тобто $g_k(t) = \int_0^t e^{ps} h_k(s)ds$. Очевидно, що зі співвідшошення $G'(t) = e^{pt}H(t)$ випливають крайні нерівності у (6). Крім того, друга і третя зліва нерівності — це нерівності Коші та Коші-Буняковського. Залишилось довести другу справа нерівність. Маємо

$$((LG)_k, h_k)_{L_2([0,T])} = \int_0^T g_k'(t) h_k(t)\ dt + \sum_{l=1}^m A_{kl} \int_0^T g_l(t) h_k(t)\ dt +$$

$$+ \sum_{l=1}^m \int_0^T \int_0^t B_{kl}(t,s) g_l(s)\ ds \cdot h_k(t)\ dt = I_{k,1} + I_{k,2} + I_{k,3}.$$

Оцінимо окремо кожний з цих виразів.

$$I_{k,1} = \int_0^T g_k'(t) h_k(t)\ dt = \int_0^T e^{pt} h_k^2(t)\ dt.$$

Інші доданки оцінимо за модулем, використавши лему 3:

$$|I_{k,2}| = \left|\sum_{l=1}^{m} A_{kl} \int_0^T g_l(t)h_k(t)\ dt\right| \le \sum_{l=1}^{m} |A_{kl}| \int_0^T |h_k(t)| \int_0^t e^{ps}|h_l(s)|\ ds\ dt \le$$

$$\le \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{p}} \sum_{l=1}^{m} \int_0^T e^{pt}(h_l^2(t) + h_k^2(t))\ dt.$$

Аналогічно оцінимо й третю групу доданків, позначивши через M сталу, що мажорує величини $|B_{kl}|, k, l = \overline{1, m}$:

$$|I_{k,3}| = \left|\sum_{l=1}^{m} \int_0^T \int_0^t B_{kl}(t,s)g_l(s)\ ds \cdot h_k(t)\ dt\right| =$$

$$= \left|\sum_{l=1}^{m} \int_0^T h_k(t) \int_0^t B_{kl}(t,s) \int_0^\nu e^{p\nu}h_l(\nu)\ d\nu\ ds\ dt\right| \le$$

$$\le MT \sum_{l=1}^{m} \int_0^T |h_k(t)| \int_0^\nu e^{p\nu}|h_l(\nu)|\ d\nu\ dt \le \frac{MT}{2}\sqrt{\frac{T}{p}} \sum_{l=1}^{m} \int_0^T e^{pt}(h_l^2(t)+h_k^2(t))\ dt.$$

Отже,

$$\sum_{k=1}^{m}((LG)_k, h_k)_{L_2([0,T])} = \sum_{k=1}^{m} I_{k,1} + I_{k,2} + I_{k,3} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \int_0^T e^{pt}h_k^2(t)\ dt + O(p^{-1/2}) \sum_{k=1}^{m} \int_0^T e^{pt}h_k^2(t)\ dt.$$

Тому, вибравши достатньо велике p, можна досягти, наприклад, нерівності

$$\sum_{k=1}^{m}((LG)_k, h_k)_{L_2([0,T])} \ge \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \int_0^T e^{pt}h_k^2(t)\ dt \ge \frac{1}{2}\|H\|^2_{L_2([0,T])^m},$$

що завершує доведення. □

Леми 1, 2, 4 дають змогу розширити оператор L до гомеоморфізму між $H_0^1([0,T])^m$ і $L_2([0,T])^m$.

6. Збіжність послідовності наближень

Лема 5. *Послідовність* $\{u^m\}_{m=1}^\infty$ *обмежена за нормою простору* V^+.

Доведення. У [7], лема 4, коерцитивність оператора $\mathcal{L}$ одержано як наслідок допоміжної нернівості $(\mathcal{L}u, v)_{L_2(Q)} \ge C\|v\|^2_{V^+}$, де $v = e^{-pt}u$, для достатньо гладких u. Ця нерівність справедлива й для u^m і $v^m = e^{-pt}u^m$. Зауважимо, що $(\mathcal{L}u^m, v^m)_{L_2(Q)} = (f, v^m)_{L_2(Q)}$, у чому можна переконатися, підставивши $v = e^{-pt}u^m(t)$ у (3) і проінтегрувавши цю рівність від 0 до T. Тому можна записати ланцюжок нерівностей

$$C\|f\|_{V^-}\|u^m\|_{V^+} \ge \|f\|_{V^-}\|v^m\|_{V^+} \ge$$

$$\ge (f, v^m)_{L_2(Q)} = (\mathcal{L}u^m, v^m)_{L_2(Q)} \ge C\|v^m\|^2_{V^+} \ge C\|u^m\|^2_{V^+},$$

звідки випливає твердження леми. □

Тепер перейдемо до головного результату статті.

Теорема 2. *Нехай $f \in V^-$. Тоді послідовність $\{u^m\}$ збігаєтсья до розв'язку u задачі (1)–(2) слабко у просторі V^+.*

Доведення. Міркування в цілому повторюють доведення аналогічної теореми для параболічного оператора ([5], теорема 2.2.1).

За лемою 5 з послідовності $\{u^m\}$ можна виділити слабко збіжну підпослідовність $\{u^{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$, а з неї, відповідно до властивості Банаха-Сакса — підпослідовність $\{u^{m_{k_q}}\}_{q=1}^{\infty}$, таку що послідовність $\overline{u}^r = \frac{1}{r}\sum_{q=1}^{r} u^{m_{k_q}}$ збігається до деякого $\widetilde{u} \in V^+$ за нормою цього простору. Цей самий елемент є границею і послідовності середніх $\widehat{u}^r = \frac{1}{r}\sum_{q=r}^{2r-1} u^{m_{k_q}}$.

За лінійністю й неперервністю оператора $\mathcal{L}$, а також фундаментальністю послідовності $\{\widehat{u}^r\}_{r=1}^{\infty}$ маємо

$$\|\mathcal{L}\widehat{u}^i - \mathcal{L}\widehat{u}^j\|_{V^-} \le C\|\widehat{u}^i - \widehat{u}^j\|_{V^+} \to 0, \quad i, j \to \infty.$$

Отже, послідовність $\{\mathcal{L}\widehat{u}^r\}_{r=1}^{\infty}$ фундаментальна. Позначимо її границю через $\widehat{f}$ і доведемо, що $\widehat{f} = f$. Це означатиме, що $\widehat{u}$ і є розв'язком задачі (1)–(2), тобто $\widehat{u} = u$.

Оскільки система функцій $\{\psi_l = \varphi(t)\omega_l \mid \varphi \in C^{\infty}([0,T])\}_{l=1}^{\infty}$, тотальна у V^+, достатньо показати, що $\left\langle \widehat{f}, \psi_l \right\rangle_{V^- \times V^+} = \langle f, \psi_l \rangle_{V^- \times V^+}$ для будь-якого $l \in \mathbb{N}$.

Така рівність має місце, оскільки з (3) і з побудови функцій ψ_l випливає

$$\langle \mathcal{L}\widehat{u}^r, \psi_l \rangle_{V^- \times V^+} = \langle f, \psi_l \rangle_{V^- \times V^+}, l = \overline{1, m_{k_r}},$$

але з іншого боку, для довільного фіксованого l

$$\left| \left\langle f - \widehat{f}, \psi_l \right\rangle_{V^- \times V^+} \right| = \left| \left\langle \mathcal{L}\widehat{u}^r - \widehat{f}, \psi_l \right\rangle_{V^- \times V^+} \right| \le$$

$$\le \|\psi_l\|_{V^+} \|\mathcal{L}\widehat{u}^r - \widehat{f}\|_{V^-} \to 0, \ r \to \infty$$

(перша рівність справедлива принаймні для $r \ge l$). Отже, $u^{m_k} \rightharpoonup u$, де u — розв'язок задачі (1)–(2). Оскільки за лемою 1 цей розв'язок єдиний, він є слабкою границею усієї послідовності $\{u^m\}$.

$\square$

Зауваження 1. Завдяки компактності вкладення V^+ у простір $L_2(Q) = L_2([0,T], L_2(\Omega))$ має місце і сильна збіжність u^m до u в $L_2(Q)$.

Зауваження 2. До вигляду (1)–(2) зводяться задачі з неоднорідними початковими умовами $u|_{t=0} = u_0 \in H_0^1(\Omega)$.

Література

1. Shaw S., Whiteman J.R. Application and numerical analysis of partial differential Volterra equations: A brief survey // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. — 1997. — V. 150. — P. 397–409.

2. Shaw S., Whiteman J.R. Towards adaptive finite element schemes for partial differential Volterra equation solvers // Advances in Computational Mathematics.— 1996. — V. 6, №1. — P. 309–323.
3. Pani A.K., Thomee V., Wahlbin L.B., Numerical methods for parabolic and hyperbolic partial differential equations // Journal of Integral Equations and Applications.— 1992. — V. 4, №4. — P. 533–584.
4. Thomee V., Zhang N.-Y., Error Estimates for Semidiscrete Finite Element Methods for Parabolic Integro-Differential Equations // Mathematics of Computation. — 1989. — V. 53, №187. — P. 121–139.
5. Ляшко С. И. Обобщенное управление линейными системами — К.: Наукова думка, 1998. — 465 с.
6. Анікушин А. В. Оптимальне керування інтеро-диференціальними системами параболічного типу // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2010. — № 3(102) — С. 3–16.
7. Anikushyn A. V., Hulianytskyi A. L. Generalized Solvability of Parabolic Integro-Differential Equations // Differential Equations. — 2014. — V.50, №1. — P. 98–109.
8. Berenguer M. I., Garralda-Guillem A. I., Ruiz Galan M. An approximation method for solving systems of Volterra integro-differential equations // Applied Numerical Mathematics. — 2013, May. — V. 67. — P. 126–135.

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна, e-mail: andriyhul@gmail.com

Надійшла 01.02.2014.