Журнал обчислювальної та прикладної математики | **2014, №1(115)** | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.6:531:537

ВОЗМОЖНОСТЬ УСТОЙЧИВЫХ ТРАЕКТОРИЙ В МАГНИТНО-ДИПОЛНЫХ КОНФИГУРАЦИЯХ

С. С. Зуб

Резюме. В работе дано аналитическое доказательство устойчивости динамического относительного равновесия подвижного магнитного диполя в поле двух фиксированных диполей. Обсуждается связь данного результата с известной "проблемой $1/R^3$", сформулированной по отношению к взаимодействию магнитных диполей Таммом и Гинзбургом.

Введение

Проблема устойчивости магнитного равновесия естественным образом распадается на задачи статического и динамического равновесия.

Обычно считается, что возможность существования статического равновесия для магнитно взаимодействующих тел исключается теоремой Ирншоу [1]. Однако, в области магнитных явлений существование диамагнетизма и сверхпроводимости нарушают условия применимости данной теоремы. Более того, удалось доказать, что тело, на которое действуют исключительно магнитные силы, может находиться в состоянии устойчивого статического равновесия [2].

Что же касается постоянных магнитов, то теорема Ирншоу справедлива в полной мере. Как показано в [2], система магнитных диполей не может быть статически устойчивой, если хотя бы один диполь не является закрепленным. Однако, вращение может создавать стабилизирующий эффект, а теорема Ирншоу не распространяется на динамические системы.

Поэтому возникает вопрос о существовании устойчивых движений в системе магнитных диполей. Эту проблему, как в классическом, так и в квантовом случае, рассматривали Тамм и Гинзбург в связи с гипотезой о магнитном происхождении ядерных сил [3]. Ими была сформулирована так называемая "проблема $1/R^3$" по отношению к взаимодействию магнитных диполей. Этот результат ставит под сомнение возможность устойчивых движений в системах, состоящих из магнитных диполей.

Отметим, что условия устойчивости, полученные в работе [4], полностью согласуются с выводами Тамма и Гинзбурга. В этой работе рассматривается движение магнитного диполя в поле двух закрепленных магнитных полюсов. Можно трактовать магнитные полюса, разделенные расстоянием $2h$, как "большой" магнитный диполь, а затем, устремляя h к нулю, получить правильное описание магнитного диполя, закрепленного в начале системы координат. Одним из условий устойчивости орбитального движения подвижного диполя вокруг закрепленного "большого" диполя является неравенство $r < 2h$, где r — расстояние между подвижным и закрепленным диполями. Отсюда видно, что при h стремящемся к нулю, это условие не может быть выполнено ни при каком конечном r.

Тогда возникает вопрос: существуют ли системы, состоящие из магнитных диполей, в которых реализуются устойчивые движения?

Оказывается, что такие системы существуют. Однако, противоречия с выводами Тамма и Гинзбурга не возникает, т. к. некоторые диполи в таких системах закреплены, т. е. имеют место связи, которые не рассматривались в теории ядерных сил.

1. Математическая модель

Рассмотрим систему, в которой источниками магнитного поля являются два магнитных диполя, расположенных на оси z в точках $z = \pm h$ с равными магнитными моментами, одинаково ориентированными вдоль оси z. Очевидно, поле этой системы является аксиально-симметричным относительно оси z и зеркально симметричным относительно плоскости $z = 0$.

Поле магнитного диполя хорошо известно [1, (37.26) с. 261]

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3\langle\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{R}\rangle\boldsymbol{R}}{R^5} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{R^3}\right), \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\mu}$ — вектор магнитного момента, а $\boldsymbol{R}$ — радиус-вектор от диполя до точки наблюдения поля.

Для диполей, расположенных на оси z в точках $\pm h$, в декартовых компонентах имеем

$$\begin{cases} B_C^{\pm} = 3\kappa\frac{(x_3 \mp h)x_C}{D_{\mp}^{5/2}}, \quad C = 1, 2; \\ B_3^{\pm} = \kappa\frac{2(x_3 \mp h)^2 - (x_1^2 + x_2^2)}{D_{\mp}^{5/2}}, \quad D_{\pm} = x_1^2 + x_2^2 + (x_3 \mp h)^2; \end{cases} \tag{2}$$

где $\kappa = \frac{\mu_0}{4\pi}|\boldsymbol{\mu}|$ — эквивалентный "магнитный заряд" полюса магнитного диполя.

В частности, в "экваториальной" плоскости для суммарного поля получаем

$$\begin{cases} B_C^0 = 0; \\ B_3^0 = 2\kappa\frac{2h^2 - r^2}{D_0^{5/2}}, \quad D_0 = r^2 + h^2, \end{cases} \tag{3}$$

где метка "0" соответствует $z = x_3 = 0$, а $r^2 = x_1^2 + x_2^2$.

В заданном таким образом поле движется магнитный диполь, представляющий собой малое намагниченное твердое тело — симметрический волчок — с магнитным моментом $\boldsymbol{m} = |\boldsymbol{m}|\boldsymbol{\nu} = m\boldsymbol{\nu}$, где $\boldsymbol{\nu}$ направляющий орт оси симметрии волчка.

Состояние диполя описываются набором $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{n})$ [4], где $\mathbf{x}$ — положение диполя, $\boldsymbol{p}$ — его импульс, $\boldsymbol{n}$ — собственный момент импульса диполя.

Потенциальная энергия взаимодействия диполя с внешним полем имеет классический вид

$$V(\mathbf{x}) = -\langle \boldsymbol{m}, \mathbf{B}(\mathbf{x})\rangle = -m\langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{B}(\mathbf{x})\rangle \tag{4}$$

2. Теоретико-групповые методы в исследовании устойчивости магнитных динамических систем

Теоретико-групповые методы гамильтоновой динамики доказали свою эффективность во многих задачах механики [5, 6, 7, 8] и, в частности, при исследовании устойчивости магнитных динамических систем [4, 9].

Имеется ряд теорем [10, 8], которые дают условия устойчивости относительных равновесий, т. е. таких траекторий гамильтоновой системы, которые одновременно являются орбитами однопараметрических подгрупп группы инвариантности исследуемой системы [5, 10].

Так как магнитное поле, а, значит, и потенциальная энергия описанной выше динамической системы обладают аксиальной симметрией, то группой инвариантности данной системы является S^1 — группа вращений вокруг оси симметрии магнитного поля z.

Таким образом, все физические векторы состояния системы в относительном равновесии вращаются вокруг оси z.

Кроме аксиальной симметрии магнитное поле в данной системе обладает также зеркальной симметрией, что выделяет класс относительных равновесий, пространственно расположенных в плоскости $z = 0$. Такие равновесия можно охарактеризовать, задавая единственную точку на траектории, а именно:

$$z_e = \begin{cases} \boldsymbol{x}_0 = r_0\boldsymbol{e}_1; \\ \boldsymbol{p}_0 = p_0\boldsymbol{e}_2; \\ \boldsymbol{\nu} = \nu\boldsymbol{e}_3, \quad \nu = \pm 1; \\ \boldsymbol{n} = n_0\boldsymbol{e}_3. \end{cases} \tag{5}$$

где $\boldsymbol{e}_i, i = 1, 2, 3$ — орты декартовой системы координат, $\boldsymbol{e}_3$ направлен по оси z.

Исследование устойчивости указанных относительных равновесий может быть проведено на основе energy-momentum метода [10, p. 90]. Благодаря использованию соображений симметрии, применение этого метода сводится к анализу положительной определенности некоторой квадратичной формы от определенного набора вариаций динамических переменных в единственной точке траектории, в нашем случае в точке (5).

3. Устойчивость относительных равновесий для движения магнитного диполя в аксиально и зеркально симметричном магнитном поле.

В работе [11] рассматривается устойчивость относительных равновесий для магнитного диполя, взаимодействующего с аксиально и зеркально симметричным магнитным полем. С помощью energy-momentum метода [10, p. 90] доказана достаточно общая теорема, которая дает условия устойчивости для некоторого класса относительных равновесий.

Теорема 1. *Пусть* $\boldsymbol{B}$ *— магнитное поле, обладающее аксиальной симметрией относительно оси* z*, а также зеркальной симметрией относительно "экваториальной" плоскости* $z = 0$*. Предположим также, что в некотором слое* $|z| < h$ *вне цилиндра* $r \leq \rho$ *отсутствуют источники поля.*

Тогда, если для $z = 0, r_0 > \rho$ *одновременно выполняются условия*

$$\begin{cases} B_{z,zz} = -\frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial r} - \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} < 0; \\ \frac{3}{r}\frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} < 0 \end{cases} \tag{6}$$

либо одновременно выполняются условия

$$\begin{cases} B_{z,zz} = -\frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial r} - \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} > 0; \\ \frac{3}{r}\frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} > 0 \end{cases} \tag{7}$$

то в плоскости $z = 0$ *при* $|\boldsymbol{x}| = r_0$ *возможно* G_μ*-устойчивое* [12, 8] *относительное равновесие для динамики осесимметричного магнитного диполя в данном магнитном поле.*

Замечание 1. В случае (6) диполь ориентирован вертикально вверх ($\nu = 1$), а в случае (7) — вертикально вниз ($\nu = -1$).

Замечание 2. Для того, чтобы указанная в теореме возможность устойчивого орбитального движения осуществилась, необходимо выбрать начальные условия (5) следующим образом ($z = 0, r = r_0$)

$$\begin{cases} p_0 = M\omega_0 r_0, \quad M\omega_0^2 = -\frac{m\nu}{r}\frac{\partial B_z}{\partial r}; \\ n_0 > I_\perp \omega_0 + \frac{m}{\omega_0}\left[\frac{(\partial_r B_z)^2}{(-\nu B_{z,zz})} - B_z\right] \end{cases} \tag{8}$$

где $I_\perp$ — главный момент инерции, соответствующий вращениям вокруг осей, перпендикулярных к оси симметрии тела, ω_0 — угловая частота орбитального движения диполя вокруг оси z.

Физический смысл 1-го условия (8) состоит в том, что центробежная сила должна уравновешиваться центростремительной, а 2-го в том, что диполь, как твердое тело, должен обладать достаточным собственным моментом импульса, т. е. должен быть достаточно раскручен.

При выполнении условий теоремы соотношения (8) всегда могут быть выполнены.

4. Условия устойчивости орбитального движения магнитного диполя

Рассмотрим, какие ограничения на параметры исследуемой системы — дипольтрона — накладывают уловия предыдущего раздела.

Без ограничения общности считаем, что магнитный момент подвижного диполя направлен вверх, т. е. $\nu = 1$.

Используя соотношения (3) можно выразить все интересующие нас величины, беря производные B_z по r при $z = 0$.

$$\begin{cases} B_z = 2\kappa(2h^2 - r_0^2)D_0^{-5/2}; \\ B_{z,r} = B_{r,z} = -6\kappa r_0(-r_0^2 + 4h^2)D_0^{-7/2}; \\ B_{z,zz} = 6\kappa(3r_0^4 - 24r_0^2h^2 + 8h^4)D_0^{-9/2}; \\ \frac{3}{r}\frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} = -6\kappa(r_0^4 - 28r_0^2h^2 + 16h^4)D_0^{-9/2}; \end{cases} \tag{9}$$

Т. к. величины κ, D_0 — положительные, то условиями теоремы при $\nu = 1$ будут

$$\begin{cases} 3(\frac{r_0}{h})^4 - 24(\frac{r_0}{h})^2 + 8 < 0; \\ (\frac{r_0}{h})^4 - 28(\frac{r_0}{h})^2 + 16 > 0; \end{cases} \tag{10}$$

Решением системы (10) являются геометрические условия для системы дипольтрон

$$2\sqrt{1 - \sqrt{5/6}} < \frac{r_0}{h} < \sqrt{9 - \sqrt{65}} \tag{11}$$

или, приближенно,

$$0.5903526768 < \frac{r_0}{h} < 0.9683709269$$

Условия (8) при выполненных геометрических условиях (11) всегда могут быть удовлетворены.

Представляет интерес оценить величину необходимого для этого собственного момента импулса тела n_0 в сравнении с орбитальным моментом импульса $L_0 = r_0p_0 = Mr_0^2\omega_0$.

В сумме

$$I_\perp\omega_0 + \frac{m}{\omega_0}\left[\frac{(\partial_r B_z)^2}{(-\nu B_{z,zz})} - B_z\right] \tag{12}$$

1-м слагаемым можно пренебречь, т. к. $I_\perp \ll Mr_0^2$. 2-е слагаемое можно представить в виде $L_0\psi(d)$

$$\psi(d) = -\frac{2}{3}\frac{(1+d^2)}{d^2(4-d^2)}\frac{3d^4 - 4d^2 + 8}{3d^4 - 24d^2 + 8}, \tag{13}$$

где $d = \frac{r_0}{h}$.

Построен график этой функции. В точке $d = 0.8$ ее значение — 0.5530132634. При $0.724 < d < 0.9683709269$ эта функция < 1.

Т. о. значение собственного момента импульса диполя должно быть сравнимо со значением его орбитального момента импульса.

Используя указанные значений параметров было проведено численное моделирование орбитального движения при отклонениях начальных значений динамических переменных от значений, соответствующих относительному равновесию, в пределах 1%. Методом Монте-Карло (т. е. случайно выбирая начальные значения в данной окрестности) было совершено 1000 бросаний, которые продемонстрировали устойчивость орбитального движения. Подробно о методике такой проверки написано в работе [13].

Литература

1. Матвеев А. Н. Электричество и магнетизм — М.: Высшая школа, 1983. — 463 с.
2. Зуб С. С. Вплив топології надпровідних елементів на стійкість рівноваги вільного тіла : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук . — К., 2005. — 23 с.
3. Ginzburg V. L. The Mesotron Theory and Nuclear Forces // Uspehi Fiz. Nauk., — 1947. — V. 31, № 2, — P. 174–209.
4. Zub S. S., Stable orbital motion of magnetic dipole in the field of permanent magnets // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2014. — V. 275C, — P. 67–73.
5. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. 3-е изд., испр. и доп. — М.: Наука, 1989. — 472 с.
6. Marsden J., Ratiu T. Introduction to mechanics and symmetry. A basic exposition of classical mechanical systems — New York: Springer-Verlag, 1994.
7. Borisov A. V., Mamaev I. S. Poisson Structures and Lie Algebras in Hamiltonian Mechanics — Izhevsk: Izd. UdSU, 1999.
8. Ortega J.-P., Ratiu T. S., Non-linear stability of singular relative periodic orbits in Hamiltonian systems with symmetry // Journal of Geometry and Physics. — 1999. — V. 32, № 2, — P. 160–188.
9. Зуб С. С. Дослідження стійкості орбітального руху в системі двох магнітно взаємодіючих тіл // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки. — 2011. — № 2 — С. 176–184.
10. Marsden J. E. Lectures On Mechanics — London: Cambridge University Press, 1992.
11. Grigoryeva L., Ortega J.-P., Zub S. S., Stability of Hamiltonian relative equilibria in symmetric magnetically confined rigid bodies // The Journal of Geometric Mechanics. — 2014. — V. 6, № 2, — P. 12–74.
12. Patrick G. W., Relative equilibria in Hamiltonian systems: the dynamic interpretation of nonlinear stability on a reduced phase space // Journal of Geometry and Physics. — 1992. — № 9, — P. 111–130.
13. Зуб С. С., Ляшко С. І., Ляшко В. С. Исследование устойчивости орбитального движения магнитно взаимодействующих тел методом численного эксперимента // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2012. — № 1(107) — С. 122–134.

Факультет кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, ул. Владимирская, 64, Киев, 01601, Украина.

Поступила 22.01.2013