Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2014, №1(115) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.85

ОПТИМАЛЬНАЯ УПАКОВКА ЭЛЛИПСОВ С УЧЕТОМ ДОПУСТИМЫХ РАССТОЯНИЙ

А. В. Панкратов, Т. Е. Романова, И. А. Суббота

Резюме. Рассматривается задача оптимальной упаковки эллипсов, допускающих непрерывные вращения. Для аналитического описания основных ограничений размещения используются свободные от радикалов квази-phi-функции и псевдонормализованные квази-phi-функции. Строится математическая модель в виде задачи нелинейного программирования. Предлагается эффективные алгоритмы поиска стартовых точек из области допустимых решений и поиска локальных экстремумов. Приводятся результаты численных экспериментов.

Введение

Задачи оптимального размещения (в частности, задачи упаковки и раскроя [1, 2]) относятся к классу NP-сложных задач [3] и является частью теории исследования операций и вычислительной геометрии. Этот класс задач имеет широкий спектр научных и практических применений (см. например, http://smartimtech.com), в том числе: в современной биологии, минералогии, медицине, материаловедении, нанотехнологии, робототехнике, системах распознавания образов, в химической промышленности, машиностроении, строительстве и т.д.

Предметом исследования данной статьи является задача упаковки в следующей постановке. Пусть задана прямоугольная область $\Omega = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq w\}$ переменной длины l и переменной ширины w, и набор эллипсов E_i, $i \in \{1, 2, ..., n\} = I_n$, которые должны размещаться внутри области Ω . Каждый эллипс E_i задан большой и малой полуосями a_i и b_i. Полюс эллипса E_i совпадает с началом его собственной системы координат, а граница эллипса E_i описывается в параметрическом виде: $x_i = a_i \cos t_i$, $y_i = b_i \sin t_i$, $0 \leq t_i \leq 2\pi$. Полагаем, что система координат контейнера Ω — фиксирована. Положение эллипса E_i характеризуется вектором трансляции (x_i, y_i) и углом поворота θ_i. Между эллипсами E_i и E_j могут быть заданы ограничения на минимально ρ_{ij}^- и/или максимально ρ_{ij}^+ допустимые расстояния, а между эллипсом E_i и границей контейнера Ω — ограничения на минимально допустимые расстояния ρ_i^-.

Задача упаковки эллипсов. Разместить множество эллипсов $E_i(x_i, y_i, \theta_i)$, $i \in I_n$, в контейнере Ω минимальной площади $F = l \cdot w$, учитывая ограничения на заданные допустимые расстояния.

Один из способов решения данной задачи — аппроксимация эллипсов дугами окружностей и использование метода, предложенного в [4, 5], который основан на применении свободных от радикалов phi-функций, приведенных в [6]. Однако в этом случае полученное приближенное решение в значительной степени зависит от точности аппроксимации эллипсов.

Обзор публикаций (см. например, [7–9]) по этой тематике дает возможность сделать вывод о том, что только в недавней работе Josef Kallrath и Steffen Rebennack [9] излагается метод решения задачи упаковки истинных эллипсов (без аппроксимаций), допускающих вращения, с использованием современных NLP solvers, доступных в GAMS. В этой статье приводится достаточно подробный обзор литературы, посвященный задачам упаковки эллипсов. С целью аналитического описания условия непересечения неориентированных эллипсов авторы используют идею разделяющей прямой, предложенную в работе [10] для моделирования отношений кругов и выпуклых многоугольников. В этом исследовании получено глобальное решение для небольшого числа эллипсов ($n \leq 4$). Однако при $n > 14$ авторам не удалось получить локально-оптимального решения. В этой связи авторы предложили эвристический *polylithic*-алгоритм для размещения бо́льшего числа эллипсов ($n \leq 100$) в прямоугольной области фиксированной ширины и переменной длины. Публикаций, посвященных размещению эллипсов с учетом допустимых расстояний, найти не удалось.

В данном исследовании рассматривается новый подход, основанный на математическом моделировании отношений между эллипсами (непересечение, расположение на минимально и максимально допустимом расстоянии) с использованием свободных от радикалов квази-phi-функций (нормализованных, псевдонормализованных квази-phi-функций). Этот подход позволяет представить задачу оптимальной упаковки эллипсов с учетом допустимых расстояний в виде задачи нелинейного программирования и получать локально оптимальные решения при $n \leq 120$. Кроме того, используя квази-phi-функции, удалось улучшить результаты по времени и значению функции цели для многих примеров ($5 \leq n \leq 100$), приведенных в статье [9].

1. Моделирование основных ограничений

В качестве эффективного средства математического моделирования отношений неориентированных замкнутых phi-объектов A и B с переменными метрическими характеристиками используется новый класс функций — квази-phi-функции [11].

Полагаем, что по крайней мере один из объектов ограничен. Размеры объектов могут изменяться в соответствии с коэффициентами гомотетии $\lambda_A, \lambda_B > 0$. Положение объекта A определяется вектором трансляции $v_A = (x_A, y_A)$ и углом поворота θ_A. Обозначим $u_A = (v_A, \theta_A, \lambda_A)$ вектор переменных объекта A.

Определение и основные свойства квази-phi-функций. Квази-phi-функцией для объектов $A(u_A)$ и $B(u_B)$ называется всюду определенная, непрерывная по всем переменным (u_A, u_B, u') функция Φ'^{AB}, для которой при фиксированных λ_A и λ_B функция $\max\limits_{u' \in U \subset R^n} \Phi'^{AB}(u_A, u_B, u')$ является phi-функцией объектов $A(u_A)$ и $B(u_B)$. Здесь u' — вектор вспомогательных переменных.

Квази-phi-функция $\Phi'^{AB}(u_A, u_B, u')$ обладает рядом важных свойств:

1. Если $\Phi'^{AB}(u_A, u_B, u') \geq 0$, то $intA(u_A) \bigcap intB(u_B) = \emptyset$. Здесь $int(\bullet)$ — внутренность объекта $\bullet$.

2. Если $\Phi^{AP}(u_A, u_P)$ — phi-функция для $A(u_A)$ и $P(u_P)$, а $\Phi^{BP^*}(u_B, u_P)$ — phi-функция для $B(u_B)$ и $P^*(u_P) = R^2 \backslash intP(u_P)$, где $P(u_P) = \{(x, y) : \psi_P = \alpha \cdot x + \beta \cdot y + \mu_P \leq 0\}$, $u_P = (\theta_P, \mu_P)$, $\alpha = \cos\theta_P$, $\beta = \sin\theta_P$, то функция, определенная в виде

$$\Phi'^{AB}(u_A, u_B, u_P) = \min\{\Phi^{AP}(u_A, u_P), \Phi^{BP^*}(u_B, u_P)\}, \tag{1}$$

является квази-phi-функцией для пары ограниченных выпуклых объектов $A(u_A)$ и $B(u_B)$. Здесь $u' = u_P$.

3. Если $\Phi'^{AP}(u_A, u_P, u_1')$ и $\Phi'^{BP^*}(u_B, u_P, u_2')$ — квази-phi-функции для пар объектов $A(u_A)$, $P(u_P)$ и $B(u_B)$, $P^*(u_P)$, то функция

$$\Phi'^{AB}(u_A, u_B, u') = \min\{\Phi'^{AP}(u_A, u_P, u_1'), \Phi'^{BP^*}(u_B, u_P, u_2')\} \tag{2}$$

является квази-phi-функцией для пары ограниченных объектов $A(u_A)$ и $B(u_B)$. Здесь $u' = (u_P, u_1', u_2')$.

Определение нормализованной и псевдонормализованной квази-phi-функции. Понятие квази-phi-функции может быть использовано также для моделирования ограничений на допустимые расстояния между объектами. С этой целью используются определения нормализованной и псевдонормализованной квази-phi-функции, основываясь на аналогичных терминах для phi-функций [5].

Пусть $\mathrm{dist}(A, B) = \min\limits_{a \in A, b \in B} d(a, b)$, $d(a, b)$ — евклидово расстояние между точками a и b. Обозначим $\rho^- > 0$, $\rho^+ > 0$ — заданные минимально и максимально допустимые расстояния между объектами $A(u_A)$ и $B(u_B)$.

Квази-phi-функция $\widetilde{\Phi}'^{AB}(u_A, u_B, u')$ для объектов $A(u_A)$ и $B(u_B)$ называется нормализованной, если функция $\max\limits_{u' \in U} \widetilde{\Phi}'^{AB}(u_A, u_B, u')$ является нормализованной phi-функцией.

Таким образом, $\rho^- \leq \max\limits_{u' \in U} \widetilde{\Phi}'^{AB} \leq \rho^+ \Leftrightarrow \rho^- \leq dist(A, B) \leq \rho^+$.

Функция $\widehat{\Phi}'^{AB}(u_A, u_B, u')$ называется псевдонормализованной квази-phi-функцией для объектов $A(u_A)$ и $B(u_B)$, если функция $\max\limits_{u' \in U} \widehat{\Phi}'^{AB}(u_A, u_B, u')$ является псевдонормализованной phi-функцией.

Аналогично понятиям псевдонормализованных phi-функций [6] будем различать псевдонормализованные квази-phi-функции $\widehat{\Phi}'^{AB}_-$ для моделирования ограничений $dist(A, B) \geq \rho^-$ и псевдонормализованные квази-phi-функции $\widehat{\Phi}'^{AB}_+$ для моделирования ограничений $dist(A, B) \leq \rho^+$.

Тогда, $\max\limits_{u'\in U}\widehat{\Phi}'^{AB}_{-} \geq 0 \Leftrightarrow dist(A,B) \geq \rho^{-}$, $\max\limits_{u'\in U}\widehat{\Phi}'^{AB}_{+} \geq 0 \Leftrightarrow dist(A,B) \leq$ $\leq \rho^{+}$.

Пусть квази-phi-функция имеет вид

$$\Phi'^{AB}(u_A,u_B,u_P) = \min\{\widetilde{\Phi}^{AP}(u_A,u_P), \widetilde{\Phi}^{BP^*}(u_B,u_P)\}, \quad (3)$$

где $\widetilde{\Phi}^{AP}(u_A,u_P), \widetilde{\Phi}^{BP^*}(u_B,u_P)$ — нормализованные phi-функции.

Тогда квази-phi-функция $\widetilde{\Phi}'^{AB}(u_A,u_B,u_P) = 2\Phi'^{AB}(u_A,u_B,u_P)$ является нормализованной квази-phi-функцией для объектов $A(u_A)$ и $B(u_B)$, а квази-phi-функция $\widehat{\Phi}'^{AB}_{-}(u_A,u_B,u_P) = \Phi'^{AB}(u_A,u_B,u_P) - 0.5\rho^{-}$ является псевдонормализованной квази-phi-функцией для объектов $A(u_A)$ и $B(u_B)$.

Пусть уравнение $f^A = 0$ ($f^B = 0$) описывает границу множества A (B), при этом для $p_1 \in R^2 (p_2 \in R^2)$, $f^A(p_1) \geq 0$ ($f^B(p_2) \geq 0$), если $p_1 \in A$ ($p_2 \in B$), и $f^A(p_1) < 0$ ($f^B(p_2) < 0$) — в противном случае.

Тогда функция вида

$$\widehat{\Phi}'^{AB}_{+}(u_A,u_B,u' = (p_1,p_2)) = \min\{(\rho^{+})^2 - dist^2(p_1,p_2), f^A(p_1), f^B(p_2)\} \quad (4)$$

является пседонормализованной квази-phi-функцией для моделирования ограничений $dist(A,B) \leq \rho^{+}$.

Квази-phi-функция для эллипсов. Пусть $E_1(u_1)$ и $E_2(u_2)$ — эллипсы с полуосями $\lambda_i a_i$ и $\lambda_i b_i$, $a_i > b_i$ $i = 1,2$. Переменные параметры эллипса $E_i(u_i)$ имеют вид: $u_i = (v_i,\theta_i,\lambda_i)$, где $v_i = (x_{E_i}, y_{E_i})$ — вектор трансляции, θ_i — угол поворота, λ_i — коэффициент гомотетии. Параметр t_i определяет точку $(x_i,y_i) = (\lambda_i a_i \cos t_i, \lambda_i b_i \sin t_i)$ на границе эллипса E_i, $0 \leq t_i \leq 2\pi$, $i = 1,2$.

После поворота эллипса E_i на угол θ_i и трансляции на вектор $v_i = (x_{E_i}, y_{E_i})$ каждая точка (x_i,y_i) преобразуется следующим образом: $(x_i', y_i') = v_i + M(\theta_i)\cdot(x_i,y_i)$, где $M(\theta_i)$ — матрица поворота, т. е. $x_i' = x_{E_i} + x_i\cos\theta_i + y_i\sin\theta_i$, $y_i' = y_{E_i} - x_i\sin\theta_i + y_i\cos\theta_i$.

Пусть $u' = (t_1,t_2)$, тогда квази-phi-функцию для $E_1(u_1)$ и $E_2(u_2)$ можно представить в следующем виде:

$$\Phi'^{E_1E_2}(u_1,u_2,u') = \min\{\chi(\theta_1,\theta_2,u'), \chi^{+}(u_1,u_2,u'), \chi^{-}(u_1,u_2,u')\}, \quad (5)$$

где $\chi = -\left\langle N_1', N_2' \right\rangle = -\alpha_1'\alpha_2' - \beta_1'\beta_2'$, $\alpha_i' = \alpha_i\cos\theta_i + \beta_i\sin\theta_i$, $\beta_i' = -\alpha_i\sin\theta_i +$ $+\beta_i\cos\theta_i$, $\alpha_i = \frac{\cos t_i}{\lambda_i a_i}$, $\beta_i = \frac{\sin t_i}{\lambda_i b_i}$, $\chi^{+} = \alpha_1'(x_2^{+} - x_1) + \beta_1'(y_2^{+} - y_1) - 1$, $\chi^{-} =$ $= \alpha_1'(x_2^{-} - x_1) + \beta_1'(y_2^{-} - y_1) - 1$, $(x_2^{+}, y_2^{+}) = (x_2', y_2') + \eta(-\beta_2', \alpha_2')$, $(x_2^{-}, y_2^{-}) =$ $= (x_2', y_2') - \eta(-\beta_2', \alpha_2')$, $\eta = (\lambda_2 a_2)^2$.

Квази-phi-функция для $E_1(u_1)$ и $E_2(u_2)$ может быть определена также в соответствии с формулой (2) в виде

$$\Phi'^{E_1E_2}(u_1,u_2,u') = \min\{\Phi'^{E_1P}(u_1,u_P,u_1'), \Phi'^{E_2P^*}(u_2,u_P,u_2')\}.$$

Квази-phi-функция для эллипса $E(u_E)$ и полуплоскости $P(u_P)$ имеет вид

$$\Phi'^{EP}(u_E,u_P,t) = \min\{\chi(\theta_E,\theta_P,t), \psi_P(x_E^{+}, y_E^{+}), \psi_P(x_E^{-}, y_E^{-})\},$$

где $0 \leq t \leq 2\pi$ — вспомогательный параметр, $\psi_P(x,y) = \alpha_P x + \beta_P y - 1$, $\chi = -\left\langle N_P, N_E^{'} \right\rangle$, $N_P = (\alpha_P, \beta_P)$ — внешний вектор нормали полуплоскости $P(u_P)$, $N_E^{'} = (\alpha_E^{'}, \beta_E^{'})$ и $(x_E^{\pm}, y_E^{\pm})$ определяется аналогично $(\alpha_2^{'}, \beta_2^{'})$ и $(x_2^{\pm}, y_2^{\pm})$ в (4).

Пусть задано минимально допустимое расстояние ρ^- между эллипсами E_1 и E_2. Полагаем, что $\widehat{\Phi}'^{E_1P}(u_1,u_P)$ и $\widehat{\Phi}'^{E_2P^*}(u_2,u_P)$ — псевдонормализованные квази-phi-функции, причем выполняется $\max\limits_{u_P\in U}\widehat{\Phi}'^{E_1P}(u_1,u_P) \geq 0$, если $dist(E_1,P) \geq 0.5\rho^-$ и $\max\limits_{u_P\in U}\widehat{\Phi}'^{E_2P^*}(u_2,u_P) \geq 0$, если $dist(E_2,P^*) \geq$ $\geq 0.5\rho^-$. Тогда функция

$$\widehat{\Phi}'^{E_1E_2}_{-}(u_1,u_2,u_P) = \min\{\widehat{\Phi}'^{E_1P}(u_1,u_P), \widehat{\Phi}'^{E_2P^*}(u_2,u_P)\} \tag{6}$$

является псевдонормализованной квази-phi-функцией для описания условия $dist(E_1,E_2) \geq \rho^-$.

Пусть уравнение $f^{E_1} = 0$ ($f^{E_2} = 0$) описывает границу эллипса $E_1(u_1)$ ($E_2(u_2)$), при этом для $p_1 \in R^2 (p_2 \in R^2)$, $f^{E_1}(p_1) \geq 0$ ($f^{E_2}(p_2) \geq 0$), если $p_1 \in E_1(u_1)$ ($p_2 \in E_2(u_2)$), и $f^{E_1}(p_1) < 0$ ($f^{E_2}(p_2) < 0$) — в противном случае.

$$\widehat{\Phi}'^{E_1E_2}_{+}(u_{E_1},u_{E_2},u') = \min\{(\rho^+)^2 - dist^2(p_1,p_2), f^{E_1}(p_1), f^{E_2}(p_2)\} \tag{7}$$

является пседонормализованной квази-phi-функцией для моделирования $dist(E_1,E_2) \leq \rho^+$, где

$$u' = (p_1,p_2), f^{E_i}(p_i) = 1 - \frac{x'^2_{p_i}}{a_i^2} - \frac{y'^2_{p_i}}{b_i^2},$$

$$(x_{p_i}^{'}, y_{p_i}^{'}) = M(-\theta_i)\cdot(p_i - v_i), (p_i - v_i) = (x_{p_i} - x_{E_i}, y_{p_i} - y_{E_i}),$$

т. е. $x_{p_i}^{'}=(x_{p_i}-x_{E_i})\cos\theta_i-(y_{p_i}-y_{E_i})\sin\theta_i$, $y_{p_i}^{'}=(x_{p_i}-x_{E_i})\sin\theta_i+(y_{p_i}-y_{E_i})\cos\theta_i$.

Квази-phi-функция для эллипса и объекта Ω^*. Пусть: $E(u_1)$ — эллипс с переменными параметрами $u_1 = (x_1,y_1,\theta_1,\lambda_1)$; Ω — прямоугольный контейнер с соответствующими вершинами $v_1 = (0,0)$, $v_2 = (l,0)$, $v_3 = (l,w)$, $v_4 = (0,w)$; $\Omega^* = R^2 \backslash int\Omega$.

Квази-phi-функция для E и Ω^* имеет вид

$$\begin{aligned}\Phi'^{E\Omega^*}(u) = \min\{&\varphi_{11}(v_1),\varphi_{11}(v_2),\varphi_{12}(v_3),\varphi_{12}(v_4),\varphi_{21}(v_2),\varphi_{21}(v_3),\\ &\varphi_{22}(v_1),\varphi_{22}(v_4)\},\end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $0 \leq t_k^{'} \leq 2\pi$, $\varphi_{k1} = A_k x + B_k y + C_k - 1$, $\varphi_{k2} = -A_k x - B_k y - C_k - 1$, $A_k = \alpha_k \cdot \cos\theta_1 + \beta_k \cdot \sin\theta_1$, $B_k = -\alpha_k \cdot \sin\theta_1 + \beta_k \cdot \cos\theta_1$, $\alpha_k = \frac{\cos t_k^{'}}{\lambda_k a_1}$, $\beta_k = \frac{\sin t_k^{'}}{\lambda_k b_1}$, $C_k = -A_k x_1 - B_k y_1$, $k = 1,2$.

Пусть ρ^- — минимально допустимое расстояние между эллипсом $E(u_1)$ и границей области Ω. Тогда функция

$$\widehat{\Phi}'^{E\Omega^*}_{-} = \min\{\varphi_{11}(p_1^-), \varphi_{11}(p_2^-), \varphi_{12}(p_3^-), \varphi_{12}(p_4^-), \varphi_{21}(p_2^-), \varphi_{21}(p_3^-), \varphi_{22}(p_1^-), \varphi_{22}(p_4^-)\} \tag{9}$$

является псевдонормализованной квази-phi-функцией для моделирования $dist(E_1, \Omega^*) \geq \rho^-$, где p_i^-, $i = 1, 2, 3, 4$ — вершины объекта $\Omega^* \oplus C(\rho^-)$, $C(\rho^-)$ — круг радиуса ρ^-, т. е. $p_1^- = (\rho^-, \rho^-)$, $p_2^- = (l - \rho^-, \rho^-)$, $p_3^- = (l - \rho^-, w - \rho^-)$, $p_4^- = (\rho^-, w - \rho^-)$, $\oplus$ — символ суммы Минковского.

2. Математическая модель

Прежде всего, определим вектор переменных задачи оптимизации. На данном этапе фиксируем коэффициенты гомотетии эллипсов, полагая, что $\lambda_i = 1$ для всех $i = 1, 2, ..., n$.

Вектор переменных $u \in R^\sigma$ определяется так: $u = (l, w, u_1, u_2, ..., u_n, \tau)$, где (l, w) — вектор метрических характеристик прямоугольного контейнера Ω, $u_i = (x_i, y_i, \theta_i)$ — вектор параметров размещения эллипса E_i, $i \in I_n$, τ — вектор дополнительных переменных.

Если не накладываются ограничения на допустимые расстояния, то вектор τ имеет вид: $\tau = t = (t_1^1, t_2^1, ..., t_1^m, t_2^m, t_1'^1, t_2'^1, ..., t_1'^n, t_2'^n)$, где t_1^k, t_2^k – дополнительные переменные для k-й пары эллипсов, в соответствии с формулой (4), $k = 1, ..., m$, $m = \frac{(n-1)n}{2}$, а $t_1'^i$,$t_2'^i$ — вспомогательные переменные для каждого эллипса E_i, $i \in I_n$, в соответствии с формулой (8).

Если накладываются ограничения на допустимые расстояния, то τ=$(t, u_P, p_1^1, p_2^1, ..., p_1^m, p_2^m)$, где u_P=$(u_P^1, ..., u_P^m)$, $u_P^k = (\theta_P^k, \mu_P^k)$, $p_1^k = (x_{p_1}^k, y_{p_1}^k)$, $p_2^k = (x_{p_2}^k, y_{p_2}^k)$, поскольку в этом случае используются псевдонормализованные квази-phi-функции вида (6), (7) и (9). Таким образом, размерность σ-мерного Евклидова пространства R^σ определяется $\sigma = n^2 + 4n + 2$, если не накладываются ограничения на допустимые расстояния и $\sigma = 4n^2 - n + 2$, если учитываются минимально- и максимально- допустимые расстояния для всех пар эллипсов.

Математическая модель поставленной задачи может быть представлена в виде:

$$\min_{u \in W \subset R^\sigma} F(u), \tag{10}$$

$$W = \{u \in R^\sigma : \Upsilon_{ij} \geq 0, \Upsilon_i \geq 0, i < j = 1, 2, ..., n\}, \tag{11}$$

где $F(u) = l \cdot w$, Υ_{ij} — функция отношений для пары эллипсов E_i и E_j, Υ_i — функция отношений для эллипса E_i и объекта Ω^*;

$\Upsilon_{ij} = \Phi'_{ij}$, если $\rho_{ij}^- = 0$, ρ_{ij}^+ не задано, $\Upsilon_{ij} = \widehat{\Phi}'_{-ij}$, если $\rho_{ij}^- > 0$, ρ_{ij}^+ не задано,

$\Upsilon_{ij} = \min\{\Phi'_{ij}, \widehat{\Phi}'_{+ij}\}$, если $\rho_{ij}^- = 0$, $\rho_{ij}^+ > 0$, $\Upsilon_{ij} = \min\{\widehat{\Phi}'_{-ij}, \widehat{\Phi}'_{+ij}\}$, если $\rho_{ij}^+ \geq \rho_{ij}^- > 0$,

$\Upsilon_i = \Phi'_i$, если $\rho_i^- = 0$, $\Upsilon_i = \widehat{\Phi}'_{-i}$, если $\rho_i^- > 0$;

Φ'_{ij} — квази-phi-функция вида (5) для моделирования условия непересечения эллипсов E_i и E_j, $\widehat{\Phi}'_{-ij}$ — псевдонормализованная квази-phi-функция вида (6) для моделирования ограничения на минимально допустимое расстояние ρ^-_{ij} между эллипсами E_i и E_j; $\widehat{\Phi}'_{+ij}$ — псевдонормализованная квази-phi-функция вида (7) для моделирования ограничения на максимально допустимые расстояния ρ^+_{ij} между эллипсами E_i и E_j; Φ'_i — квази-phi-функция вида (8) для моделирования ограничения включения эллипса E_i в область Ω; $\widehat{\Phi}'_{-i}$ — псевдонормализованная квази-phi-функция вида (9) для моделирования ограничения на минимально допустимое расстояние ρ^-_i между эллипсом E_i и объектом Ω^*.

Задача условной оптимизации (10)–(11) является NP-сложной задачей нелинейного программирования. Граница множества W образована нелинейными поверхностями. Матрица системы неравенств, которая описывает W, сильно разрежена и имеет блочную структуру, при этом не может быть сведена к блочно-диагональному виду.

3. Стратегия решения

Стратегия решения состоит из следующих шагов:

Шаг 1. Генерируем набор стартовых точек из области допустимых решений задачи (10)–(11), используя алгоритм (SPA), описанный ниже.

Шаг 2. Ищем локальный минимум функции цели $F(u)$ задачи (10)–(11), стартуя из точек, полученных на шаге 1, применяя процедуру (LOFRT) локальной оптимизации с преобразованием области допустимых решений, описанную ниже.

Шаг 3. Выбираем лучшее локальное решение из полученных на шаге 2, как приближение к глобальному решению задачи (10)–(11).

Важной частью алгоритма локальной оптимизации (Шаг 2) является LOFRT процедура, которая позволяет сократить вычислительные затраты, благодаря сведению задачи (10)–(11) к последовательности подзадач меньшей размерности. Благодаря этому, предложенная стратегия решения задачи (10)–(11) позволяет получать локально оптимальные решения для $n < 120$. Поиск локальных экстремумов осуществляется с помощью программы IPOPT [12], доступной на открытом некоммерческом ресурсе (https://projects.coin-or.org/Ipopt) .

Алгоритм построения стартовых точек (SPA). Для построения стартовой точки u^0, принадлежащей области допустимых решений W, применяем следующий алгоритм, основанный на гомотетических преобразованиях эллипсов. Полагаем, что коэффициенты гомотетии λ_i переменные, при этом $\lambda_i = \lambda$ для $i = 1, 2, ..., n$ и $0 \leq \lambda \leq 1$.

Алгоритм включает следующие итерации:

1. Определяем начальные размеры контейнера Ω^0 достаточно большими, чтобы гарантировать размещение всех заданных эллипсов с учетом допустимых расстояний внутри Ω^0. Например, $l^0 = w^0 = 2\sum_{i=1}^n a_i + (n-1)\rho^-$, $\rho^- = \max\limits_{i,j \in I_n} \rho^-_{ij}$.

2. Полагаем $\lambda = \lambda^0 = \frac{\delta}{\max\limits_i a_i}$, где $\delta = 0.01(\min\limits_i b_i)$.
3. Генерируем множество n непересекающихся кругов радиуса δ со случайно выбранным центром $(x_i^0, y_i^0), i = 1, 2, ..., n$, принадлежащих Ω^0.
4. Генерируем множество случайно выбранных параметров вращения $\theta_i^0, i = 1, 2, ..., n$.
5. Определяем при фиксированных параметрах u_i^0, u_j^0 для $i < j = 1, 2, ..., n$ начальные значения вектора вспомогательных переменных τ^0 при помощи специальной процедуры оптимизации для задачи поиска $\max\limits_{u_i^{'} \in R^2} \Upsilon_i(u_i^0, u_i^{'})$ и $\max\limits_{u_{ij}^{'} \in R^2} \Upsilon_{ij}(u_i^0, u_j^0, u_{ij}^{'})$. Для решения вспомогательных задач в случае, если $\Upsilon \in \{\Phi^{'}, \widehat{\Phi}_-^{'}\}$, используем следующую модель:

$$\max \mu, \ s.t. \, u' \in W_\mu^{'},$$

где $W_\mu^{'} = \{(u', \mu) : \Upsilon(u^0, u^{'}) \geq \mu\}$, $\mu \in R^1$ — вспомогательная переменная, $u^{'}$ — вектор вспомогательных переменных и u^0 — вектор фиксированных параметров для квази-phi-функции (соответственно, псевдонормализованной квази-phi-функции).

Таким образом, все квази-phi-функции (псевдонормализованные квази-phi-функции) в точке $u^0 = (l^0, w^0, u_1^0, u_2^0, ..., u_n^0, \tau^0)$ дают неотрицательные значения, где $\tau^0 = (t^0)$ (или, соответственно, $\tau^0 = (u_P^0, t^0, p_1^{01}, p_2^{01}, ..., p_1^{0m}, p_2^{0m})$.

6. Стартуя из точки u^0, решаем вспомогательную задачу:

$$\kappa(u'^0) = \max_{u' \in W'} \kappa(u'), \kappa(u') = \lambda, \tag{12}$$

$$W' = \{u' \in R^{\sigma+1} : \Upsilon_{ij} \geq 0, \Upsilon_i \geq 0, i < j = 1, 2, ..., n, l = l^0, w = w^0, \\ 1 - \lambda \geq 0, \lambda \geq 0\}, \tag{13}$$

где $u' = (u, \lambda)$ — вектор переменных, λ — переменный коэффициет гомотетии для всех эллипсов, u — вектор переменных задачи (10)–(11).

Таким образом, точка $u^{'0} = (l^0, w^0, u_1^{'0}, u_2^{'0}, ..., u_n^{'0}, \tau^{'0}, 1)$ глобального максимума задачи (12)–(13) генерирует точку $u^0 = (l^0, w^0, u_1^{'0}, u_2^{'0}, ..., u_n^{'0}, \tau^{'0})$ из области допустимых решений W задачи (10)–(11).

7. Вектор u^0 рассматриваем в качестве стартовой точки для поиска следующего локального минимума задачи (10)–(11).

Алгоритм локальной оптимизации с возможной трансформацией области (LOFRT) в задаче упаковки эллипсов. Пусть $u^0 \in W$ — одна из стартовых точек, полученных предыдущим методом. Основная идея последующего алгоритма LOFRT заключается в следующем.

Прежде всего, вокруг каждого эллипса E_i опишем круг C_i радиуса a_i, $i = 1, 2, ..., n$. Далее для каждого круга C_i строим «индивидуальный» прямоугольный контейнер $\Omega_i \supset C_i \supset E_i$ с равными полусторонами длинной

$a_i+\varepsilon$, $i=1,2,...,n$, так, что C_i, E_i и Ω_i имеют один центр в центре симметрии (x_i^0, y_i^0) при условии, что стороны Ω_i параллельны соответствующим сторонам Ω. Здесь ε — наперед заданное положительное число. Строим область допустимых решений для задачи оптимизации следующим образом.

Определяем систему ограничений на вектор трансляции v_i для каждого эллипса E_i в виде $\Phi^{C_i\Omega_i^*}=\min\{-x_i+x_i^0+\varepsilon, -y_i+y_i^0+\varepsilon, x_i-x_i^0+\varepsilon, y_i-y_i^0+\varepsilon\} \geq$ ≥ 0, $i=1,2,...,n$.

Неравенство $\Phi^{C_i\Omega_i^*}\geq 0$ эквивалентно системе из четырех линейных неравенств $-x_i+x_i^0+\varepsilon\geq 0$, $-y_i+y_i^0+\varepsilon\geq 0$, $x_i-x_i^0+\varepsilon\geq 0$, $y_i-y_i^0+\varepsilon\geq 0$.

Определяем систему неравенств (дополнительных ограничений на размеры области размещений): $l\geq l^0-\varepsilon$, $w\geq w^0-\varepsilon$.

Далее формируем область допустимых решений вида

$$W_1=\{u\in R^{\sigma-\sigma_1}:\Upsilon_{ij}\geq 0,(i,j)\in\Xi_1,\Upsilon_i\geq 0,i\in\Xi_2,\Phi^{C_i\Omega_i^*}\geq 0,i=1,2,...,n,$$

$$l\geq l^0-\varepsilon, w\geq w^0-\varepsilon\},\Xi_1=\{(i,j):\Upsilon^{\Omega_i\Omega_j}<0\},\Xi_2=\{i:\Upsilon^{\Omega^*\Omega_i}<0\}.$$

Другими словами, из системы, которая описывает W, удаляем неравенства с квази-phi- функциями для тех пар эллипсов, у которых индивидуальные контейнеры не пересекаются с учетом минимально допустимых расстояний. При этом добавляем вспомогательные неравенства, описывающие условие включения кругов C_i в соответствующий индивидуальный контейнер Ω_i, $i=1,2,...,n$, с учетом минимально допустимых расстояний. Такое преобразование позволяет уменьшить число вспомогательных переменных вектора τ на σ_1. Затем осуществляем поиск точки локального минимума $u_{w_1}^*$ подзадачи $\min\limits_{u_{w_1}\in W_1\subset R^{\sigma-\sigma_1}} F(u_{w_1})$. Точка $u_{w_1}^*$ используется при построения стартовой точки $u^{(1)}$ для второй итерации оптимизационной процедуры (заметим, что ранее удаленные вспомогательные переменные должны быть переопределены с помощью процедуры, используемой в SPA, см. пункт 5). На данном этапе вновь определяем все пары эллипсов с непересекающимися индивидуальными контейнерами, формирующие соответствующую подобласть W_2 (аналогично W_1) и находим точку локального минимума $u_{w_2}^*\in W_2$, которая используется для построения стартовой точки $u^{(2)}$ для третьей итерации, и т.д.

Итерационная процедура заканчивается, когда $F(u_{w_k}^*)=F(u_{w_{k+1}}^*)$, при этом $u_{w_k}^*$ — точка локального минимума задачи

$$\min_{u_{w_k}\in W_k\subset R^{\sigma-\sigma_k}} F(u_{w_k}),$$

$$W_k=\{u\in R^{\sigma-\sigma_k}:\Upsilon_{ij}^k\geq 0,(i,j)\in\Xi_{k1},\Upsilon_i^k\geq 0,i\in\Xi_{k2},\Phi^{C_i\Omega_{ki}^*}\geq 0,i=1,$$

$$2,...,n,l\geq l_{w_k}^*-\varepsilon,w\geq w_{w_k}^*-\varepsilon\},\Xi_k=\{(i,j):\Phi^{\Omega_{ki}\Omega_{kj}}<0,i>j=1,2,...,n\}.$$

Точка $u^* = u^{(k)*} = (u^*_{w_k}, \tau_k) \in R^\sigma$ является точкой локального минимума задачи (10)–(11), где точка $u^*_{w_k} \in R^{\sigma-\sigma_k}$ является точкой локального минимума на последней итерации, а $\tau_k \in R^{\sigma_k}$ — вектор удаленных ранее дополнительных переменных. Это утверждение следует из того факта, что размещение каждой пары эллипсов E_i и E_j при $(i,j) \in \Xi \backslash \Xi_k$ и гарантирует существование вектора τ_k дополнительных переменных, при которых $\widehat{\Phi}'_{ij} \geq 0, (i,j) \in \Xi \backslash \Xi_k$ в точке $u^{(k)*}$. Здесь $\Xi = \{(i,j) : i > j = 1, 2, ..., n\}$. Следовательно, значение дополнительных переменных вектора τ_k не влияет на значение функции цели, т.е $F(u^*_{w_k}) = F(u^{(k)*})$. В этой связи нет необходимости переопределять значение дополнительных переменных вектора τ_k на последней итерации.

Для $\mathrm{O}(n^2)$ пар эллипсов в контейнере алгоритм проверяет квази-phi-функции в общем случае только для $\mathrm{O}(n)$ пар эллипсов (это зависит от размеров эллипсов и величины ε). Таким образом, LOFRT алгоритм позволяет свести задачу (10)-(11) с $\mathrm{O}(n^2)$ неравенствами и пространством решений W размерности $\mathrm{O}(n^2)$ к последовательности задач с $\mathrm{O}(n)$ неравенствами и пространством решений W_k размерности $\mathrm{O}(n)$. Это приводит к значительному сокращению вычислительных ресурсов при решении задач нелинейного программирования.

4. Результаты вычислительных экспериментов

Приведем ряд примеров, чтобы продемонстрировать эффективность предлагаемого подхода. Эксперименты проводились на компьютере с процессором AMD Athlon 64 X2 5200+, для локальной оптимизации применялась программа IPOPT (https://projects.coin-or.org/Ipopt) на основе метода внутренней точки, приведенного в [9]. Полагаем $\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} b_i/n$ в вычислительных экспер684иентах, приведенных ниже.

Установленное ограничение по времени составляет 1 час. Для каждого примера вычисляется не менее 10 локальных минимумов.

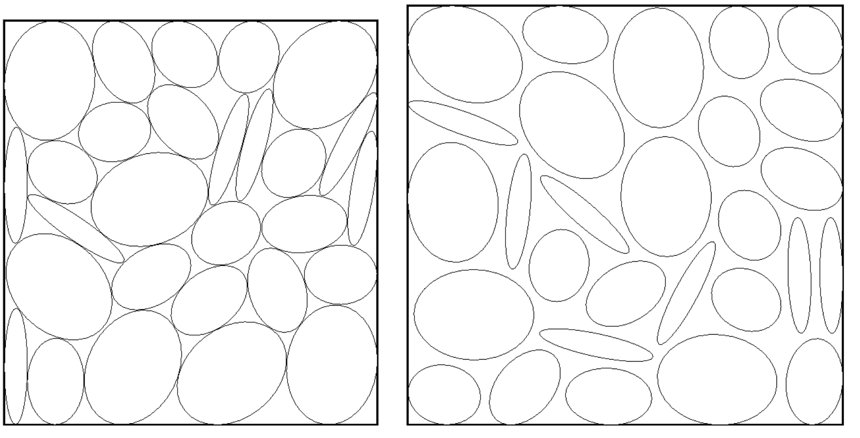
Пример 1.

n=28, $\{(a_i, b_i)$=(2.2, 1.80), $i = 1, ..., 7\}$, $\{(a_i, b_i)$=(2.60, 1.70), $i = 8, ..., 14\}$, $\{(a_i, b_i)$=(3.5, 0.7), $i = 15, ..., 21\}$, $\{(a_i, b_i)$=(3.6, 2.7), $i = 22, ..., 28\}$. Размещение эллипсов в прямоугольном контейнере без учета допустимых расстояний, соответствующее локальному минимуму, приведено на рис. 1а. Контейнер имеет размеры (l^*, w^*)= (22.273763, 24.126932) и площадь $F(u^*) = 537.397581$. Размещение эллипсов с учетом допустимых расстояний $\rho^- = 0.5$ в прямоугольном контейнере, соответствующее локальному минимуму, приведено на рис. 1б. Контейнер имеет размеры (l^*, w^*)= (25.984532, 25.024524) и площадь $F(u^*)$ =650.250548.

Пример 2.

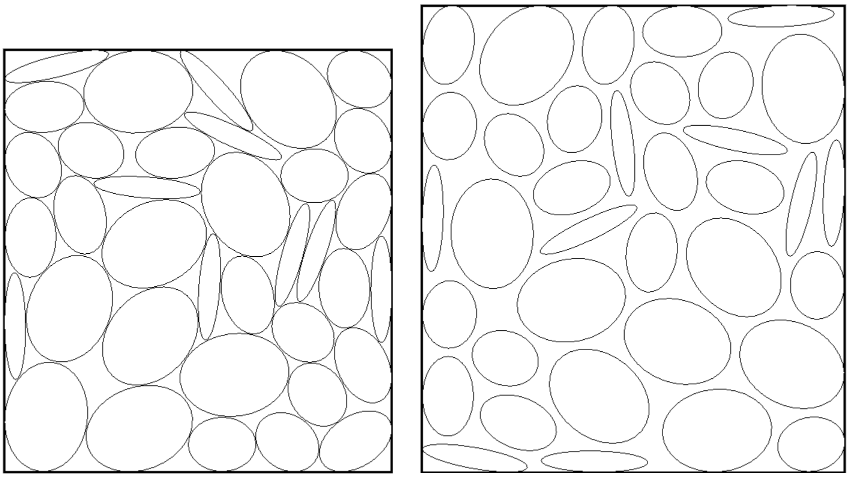
n=36, $\{(a_i, b_i)$=(2.2, 1.80), $i = 1, ..., 9\}$, $\{(a_i, b_i)$=(2.60, 1.70), $i = 10, ..., 18\}$, $\{(a_i, b_i)$=(3.5, 0.7), $i = 19, ..., 27\}$, $\{(a_i, b_i)$=(3.6, 2.7), $i = 28, ..., 36\}$. Размещение эллипсов в прямоугольном контейнере без учета допустимых расстояний, соответствующее локальному минимуму, приведено на рис. 2а. Контейнер имеет размеры (l^*, w^*)= (25.176786, 27.380105) и площадь

$F(u^*) = 689.343044$. Размещение эллипсов с учетом допустимых расстояний $\rho^- = 0.5$ в прямоугольном контейнере, соответствующее локальному минимуму, приведено на рис. 2б. Контейнер имеет размеры (l^*, w^*)= (27.498755, 30.282542) и площадь $F(u^*)$ =832.732196.



а) б)

Рис. 1. Локально-оптимальное размещение эллипсов для примера 1: (а) — без учета допустимых расстояний между эллипсами, (б) — с учетом минимально допустимых расстояний между эллипсами



а) б)

Рис. 2. Локально-оптимальное размещение эллипсов для примера 2: (а) — без учета допустимых расстояний между эллипсами, (б) — с учетом минимально допустимых расстояний между эллипсами

Для задачи упаковки эллипсов без учета допустимых расстояний предложенный алгоритм позволяет улучшить результаты по значению функции цели для многих примеров, приведенных в работе [4]: в частности, для небольших наборов эллипсов (от 5 до 20) — на 1%–2%, для бо́льших наборов эллипсов (от 14 до 100) — на 8%–9%. По времени решения получены рекорды для всех наборов данных.

Литература

1. Wascher G., Hauner H. and Schumann H. An improved typology of cutting and packing problems // European Journal of Operational Research. — 2007. — V. 183, Issue 3. — P. 1109–1130.
2. Bennell J. and Oliveira J. The geometry of nesting problems: A tutorial // European J. Operational Research. — 2008. — V. 184, Issue 2. — P. 397–415.
3. Chazelle B., Edelsbrunner H., Guibas L. J. The complexity of cutting complexes // Discrete & Computational Geometry. — 1989. — V. 4, Issue 1. — P. 139–181.
4. Chernov N., Stoyan Y., Romanova T. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem // Computational Geometry: Theory and Applications.— 2010. — V. 43, Issue 5. — P. 535–553.
5. Bennell J., Scheithauer G., Stoyan Y., Romanova T. and Pankratov A. Optimal clustering of a pair of irregular objects // Journal of Global Optimization. — 2014. DOI: 10.1007/s10898-014-0192-0. (Has been accepted for publication).
6. Chernov N., Stoyan Y., Romanova T., Pankratov A. Phi-Functions for 2D Objects Formed by Line Segments and Circular Arcs // Advances in Operations Research. Article ID 346358. — 2012. — V. 2012. — 26 pages. — doi:10.1155/2012/346358.
7. Birgin E. G., Bustamante L. H., Callisaya H. F., Mart J. M. Packing circles within ellipses // International transactions in operational research. — 2013. — V. 20, Issue 3. — P. 365–389.
8. Xu W. X., Chen H. S., Lv Z. An overlapping detection algorithm for random sequential packing of elliptical particles // Physica A. — 2011. — V. 390, № 13. — P. 2452–2467.
9. Josef K. and Steffen R. Cutting Ellipses from Area-Minimizing Rectangles // Journal of Global Optimization. — V. 59, Issue 2–3. — 2014. — P. 405-437.
10. Kallrath J. Cutting Circles and Polygons from Area-Minimizing Rectangles. Journal of Global Optimization. — V. 43, Issue 2–3. — 2009. — P. 299–328.
11. Стоян Ю. Г., Панкратов А. В., Романова Т. Е., Чернов Н. И. Квази-phi-функции для математического моделирования отношений геометрических объектов // Доповіді Національної академії наук України. — № 9. — 2014. (Прийнято до опублікування).
12. Wachter A., Biegler L. T. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming // Mathematical Programming. — V. 106, Issue 1. — 2006. — P. 25–57.

Отдел математического моделирования, Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, ул. Дм. Пожарского, 2/10, г. Харьков, 61046, Украина.