Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2014, № 1(115) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.2:519.6

ОЦІНКА ТОЧНОСТІ МОДЕЛЮВАННЯ ГАУССОВИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ В РІВНОМІРНІЙ МЕТРИЦІ

А. О. Пашко

Резюме. Вивчаються строго субгауссові випадкові процеси, що допускають зображення у вигляді стохастичних інтегралів. Будуються моделі таких процесів у вигляді строго субгауссових випадкових рядів. В роботі досліджуються оцінки точності і надійності моделей гауссових випадкових процесів в нормі простору неперервних функцій.

Вступ

В работі досліджуються строго субгауссові випадкові процеси, що зображуються у вигляді стохастичних інтегралів. Моделі випадкових процесів будуються у вигляді строго субгауссових випадкових рядів. Ці моделі наближають випадкові процеси із заданими точністю і надійністю в просторі неперервних функцій. При отриманні результатів істотньо використовувались роботи [1–2]. В роботах [3–5] розглядались деякі модифікації стохастичних інтегралів, їх властивості та умови рівномірної збіжності. Більш детально з методами моделювання випадкових процесів та полів можна познайомитись в роботах [6–10].

1. Основні поняття і визначення

Нехай $(\Omega, \mathbf{B}, P)$ — стандартний ймовірносний простір.

Означення 1. Випадкова величина ξ називається субгауссовою, якщо існує таке $a \ge 0$, що для всіх $\lambda \in R$ виконується нерівність

$$E\exp\{\lambda\xi\} \le \exp\left\{\frac{a^2\lambda^2}{2}\right\}.$$

Простір субгауссових величин $Sub(\Omega)$ є банаховим відносно норми

$$\tau(\xi) = \sup_{\lambda\neq 0}\left[\frac{2\ln E\exp\{\lambda\xi\}}{\lambda^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Означення 2. Сім'я випадкових величин $\Theta \subset Sub(\Omega)$ називається строго субгауссовою, якщо для кожної скінченної або зліченної множини випадкових величин $\{\xi_i, i \in I\} \subseteq \Theta$ та всіх $\lambda \in R$ виконується співвідношення

$$\tau^2\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\xi_i\right) = E\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\xi_i\right)^2.$$

Нехай (T, ρ) — компактний метричний простір.

Означення 3. Випадковий процес $X(t), t \in T$ називається строго субгауссовим, якщо сім'я випадкових величин $\{X(t), t \in T\}$ є строго субгауссовою.

Відомості з теорії субгауссових випадкових величин та процесів містяться в [11].

Нехай $X(t)$ — строго субгауссовий сепарабельний випадковий процес. Нехай існує така неперервна монотонно неспадна функція $\sigma(h)$, що $\sigma(h) > 0, h > 0, \sigma(h) \to 0$, коли $h \to 0$, що виконується умова

$$\sup_{\rho(t,s) \le h} \big(E(X(t) - X(s))\big)^{\frac{1}{2}} \le \sigma(h). \tag{1}$$

З умови (1) випливає, що процес $X(t)$ неперервний за ймовірністю. Нехай θ — довільна точка з T. Позначимо $\gamma_\theta = (E|X(\theta)|^2)^{\frac{1}{2}}$, $\chi = \sigma(\sup_{t\in T} \rho(t, \theta))$. Нехай $\varepsilon_k = \sigma^{(-1)}(\chi p^k), k = 0, 1, 2, ...$ та $0 < p < 1$. V_{ε_k} — множина центрів мінімального покриття простору замкненими кулями радіуса $\varepsilon_k > 0$, а множина V_{ε_0} складається з точки θ, $N(\varepsilon_k)$ — число точок в множині V_{ε_k}. Нехай $V = \bigcup_{k=0}^{\infty} V_{\varepsilon_k}$. Множину V можна розглядати як множину сепарабельності процесу $X(t)$.

Оцінки супремума субгауссового сепарабельного випадкового процесу

Має місце

Теорема 1. *Нехай $X(t)$ — строго субгауссовий сепарабельний випадковий процес. Якщо*

$$\int_0^p \ln^{\frac{1}{2}}(N(\sigma^{(-1)}(u)))du < \infty,$$

то для будь-якого $\lambda > 0$ та $0 < p < 1$ має місце нерівність

$$P\Big\{\sup_{t\in T} |X(t)| > x\Big\} \le \tag{2}$$

$$\le 2\exp\left\{-\frac{x^2}{2\left(\frac{\gamma_\theta^2}{1-p} + \frac{\chi^2}{p(1-p)^2}\right)}\right\} \exp\left\{\frac{\sqrt{2}x\int_0^{\chi p} \ln^{\frac{1}{2}}(N(\sigma^{(-1)}(u)))du}{\gamma_\theta^2 p + \frac{\chi^2}{1-p}}\right\}.$$

Доведення. Побудуємо відображення $\alpha_k(t)$ таким чином. Нехай $t \in T$, тоді $\alpha_k(t)$ це точка з V_{ε_k} така, що $\rho(t, \alpha_k(t)) \le \varepsilon_k$. Якщо $t \in V_{\varepsilon_k}$, то $\alpha_k(t) = t$. Для довільної точки $t \in V$, аналогічно, як і в роботах [1–2], доводиться нерівність

$$\sup_{t\in T} |X(t)| = \sup_{t\in V} |X(t)| \le |X(\theta)| + \sum_{k=1}^{\infty} \max_{u\in V_{\varepsilon_k}} |X(u) - X(\alpha_{k-1}(u))|.$$

Використовуючи нерівність Гельдера, для всіх $\lambda > 0$ отримаємо співвідношення

$$E\exp\left\{\lambda \sup_{t\in T} |X(t)|\right\} \le \tag{3}$$

$$\leq 2\exp\left\{\frac{\lambda^2\gamma_\theta^2 g_0}{2}\right\}\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^2 g_k^2\sigma^2(\varepsilon_{k-1})}{2g_k}\right\}\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln(N(\varepsilon_k))}{g_k}\right\},$$

де $\{g_k\}$ задовольняють нерівності $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{g_k}\leq 1$.

Покладемо

$$g_0=\frac{1}{1-p},\quad g_k=\frac{\sqrt{2}}{\lambda\chi p^{k-1}}\left(\frac{\lambda^2\chi^2}{2(p(1-p))^2}+\ln(N(\varepsilon_k))\right)^{\frac{1}{2}},\quad k=1,2,\ldots\ .$$

При такому виборі $\{g_k\}$ маємо $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{g_k}\leq 1$. Оскільки $\sigma^2(\varepsilon_k)=\chi^2p^{2k}$ та

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^2 g_k^2\chi^2p^{2k-2}}{2g_k}=\frac{\lambda^2\chi^2}{2p^2(1-p)^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{g_k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln(N(\varepsilon_k))}{g_k},$$

то із (3) випливає нерівність

$$E\exp\left\{\lambda\sup_{t\in T}|X(t)|\right\}\leq$$

$$\leq 2\exp\left\{\frac{\lambda^2\gamma_\theta^2}{2(1-p)}\right\}\exp\left\{\frac{\lambda^2\chi^2}{2p(1-p)^2}\right\}\exp\left\{2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln(N(\varepsilon_k))}{g_k}\right\}.$$

Маємо

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln(N(\varepsilon_k))}{g_k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda\chi p^{k-1}\ln(N(\varepsilon_k))}{\sqrt{2}}\left(\frac{\lambda^2\chi^2}{2p^2(1-p)^2}+\ln(N(\varepsilon_k))\right)^{-\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq\frac{\lambda\chi}{\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{\infty}p^{k-1}(\ln(N(\varepsilon_k)))^{\frac{1}{2}}.$$

Через те, що $\sigma(h)$ — монотонно неспадна функція, а $N(\varepsilon_k)$ незбільшується при зростанні ε_k, то $\ln^{\frac{1}{2}}(N(\sigma^{(-1)}(u)))$ монотонно незростаюча функція. Має місце оцінка

$$\chi p^{k-1}\ln^{\frac{1}{2}}(N(\sigma^{(-1)}(\chi p^k)))\leq\frac{1}{p(1-p)}\int_{\chi p^{k+1}}^{\chi p^k}\ln^{\frac{1}{2}}(N(\sigma^{(-1)}(u)))du.$$

Отже,

$$\frac{\lambda\chi}{\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{\infty}p^{k-1}(\ln(N(\varepsilon_k)))^{\frac{1}{2}}\leq\frac{\lambda}{\sqrt{2}p(1-p)}\int_0^{\chi p}\ln^{\frac{1}{2}}(N(\sigma^{(-1)}(u)))du$$

і нерівність (3) запишеться у вигляді

$$E\exp\left\{\lambda\sup_{t\in T}|X(t)|\right\}\leq 2\exp\left\{\frac{\lambda^2\gamma_\theta^2}{2(1-p)}\right\}\exp\left\{\frac{\lambda^2\chi^2}{2p(1-p)^2}\right\}\times \tag{4}$$

$$\times\exp\left\{\frac{\sqrt{2}\lambda}{p(1-p)}\int_0^{\chi p}\ln^{\frac{1}{2}}(N(\sigma^{(-1)}(u)))du\right\}.$$

За нерівністю Чебишева

$$P\{\sup_{t\in T}|X(t)|>x\}\leq E\exp\left\{\lambda\sup_{t\in T}|X(t)|\right\}\exp\{-\lambda x\},$$

тобто

$$P\{\sup_{t\in T}|X(t)|>x\}\le 2\exp\left\{\frac{\lambda^2\gamma_\theta^2}{2(1-p)}\right\}\exp\left\{\frac{\lambda^2\chi^2}{2p(1-p)^2}\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{\frac{\sqrt{2}\lambda}{p(1-p)}\int_0^{\chi p}\ln^{\frac{1}{2}}(N(\sigma^{(-1)}(u)))du\right\}\exp\{-\lambda x\}.$$

Виберемо $\lambda=\frac{x}{A_p}$, де

$$A_p=\frac{\gamma_\theta^2}{1-p}+\frac{\chi^2}{p(1-p)^2}, \tag{5}$$

і отримаємо оцінку (2). □

Наслідок 1. *Якщо виконуються умови теореми 1, то для $x>D_p$ має місце нерівність*

$$P\Big\{\sup_{t\in T}|X(t)|>x\Big\}\le 2\exp\left\{-\frac{(x-D_p)^2}{2A_p}\right\} \tag{6}$$

де

$$D_p=\frac{\sqrt{2}}{p(1-p)}\int_0^{\chi p}\ln^{\frac{1}{2}}(N(\sigma^{(-1)}(u)))du,$$

A_p визначено в (5).

Доведення. Якщо в(4) покласти $\lambda=\frac{x-D_p}{A_p}$, то при $x>D_p$ отримаємо необхідну нерівність. □

Позначимо $\gamma_0=\sup_{t\in T}(E(X(t))^2)^{\frac{1}{2}}$ і виберемо $\beta>0$ — деяке довільне число таке, що $\beta\le\sigma\big(\inf_{s\in T}\sup_{t\in T}\rho(t,s)\big)$.

Теорема 2. *Нехай $X(t)$ — строго субгауссовий сепарабельний випадковий процес. Якщо виконуються умови теореми 1, то для будь-якого $\lambda>0$ та $0<p<1$ при $x>D1_p$ має місце нерівність*

$$P\{\sup_{t\in T}|X(t)|>x\}\le 2\exp\left\{-\frac{(x-D1_p)^2}{2A1_p}\right\}, \tag{7}$$

де

$$A1_p=\frac{\gamma_0^2}{1-p}+\frac{p\beta^2}{(1-p)^2},$$
$$D1_p=\sqrt{2}\left(\gamma_0\ln^{\frac{1}{2}}N(\sigma^{(-1)}(p\beta))+\frac{1}{p(1-p)}\int_0^{p^2\beta}\ln^{\frac{1}{2}}(N(\sigma^{(-1)}(u)))du\right).$$

Доведення. Теорема доводиться аналогічно з теоремою 1. Використовуючи відображення $\alpha_k(t)$, доводиться нерівність

$$\sup_{t\in T}|X(t)|=\sup_{t\in V}|X(t)|\le\max_{u\in V_{\varepsilon_1}}|X(u)|+\sum_{k=2}^{\infty}\max_{u\in V_{\varepsilon_k}}|X(u)-X(\alpha_{k-1}(u))|.$$

За нерівністю Гельдера, для всіх $\lambda>0$ отримаємо співвідношення

$$E\exp\left\{\lambda\sup_{t\in T}|X(t)|\right\}\le \tag{8}$$

$$\leq 2\exp\left\{\frac{\lambda^2\gamma_0^2}{2}g_1 + \frac{\lambda^2}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{g_k^2\beta^2p^{2k-2}}{g_k} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln(N(\varepsilon_k))}{g_k}\right\},$$

де $\{g_k\}$ задовольняють нерівність $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{g_k}\leq 1$.

Покладемо

$$g_1 = \frac{\sqrt{2}}{\lambda\gamma_0}\left(\frac{\lambda^2\gamma_0^2}{2(1-p)^2} + \ln(N(\varepsilon_1))\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$g_k = \frac{\sqrt{2}}{\lambda\beta p^{k-1}}\left(\frac{\lambda^2\beta^2}{2(1-p)^2} + \ln(N(\varepsilon_k))\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad k = 2, 3, ... \quad .$$

При такому виборі $\{g_k\}$ маємо $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{g_k}\leq 1$. Оскільки

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{g_k^2\beta^2p^{2k-2}}{g_k} = \frac{\lambda^2\beta^2}{2(1-p)^2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{g_k} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\ln(N(\varepsilon_k))}{g_k}$$

та

$$\frac{\lambda^2\gamma_0^2}{2}g_1 = \frac{\lambda^2\gamma_0^2}{2g_1(1-p)^2} + \frac{\ln(N(\varepsilon_1))}{g_1},$$

то із (8) випливає нерівність

$$E\exp\left\{\lambda\sup_{t\in T}|X(t)|\right\}\leq$$

$$\leq \exp\left\{\frac{\lambda^2}{2(1-p)}\left(\gamma_0^2 + \frac{p\beta^2}{1-p}\right) + 2\frac{\ln(N(\varepsilon_1))}{g_1} + 2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\ln(N(\varepsilon_k))}{g_k}\right\}.$$

Так як і при доведенні теореми 1, отримаємо

$$\exp\left\{2\frac{\ln(N(\varepsilon_1))}{g_1} + 2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\ln(N(\varepsilon_k))}{g_k}\right\}\leq$$

$$\leq \exp\left\{\sqrt{2}\lambda\gamma_0\ln(N(\varepsilon_1))\left(\frac{\lambda^2\gamma_0^2}{2(1-p)^2} + \ln(N(\varepsilon_1))\right)^{-\frac{1}{2}} +\right.$$

$$\left.+\sqrt{2}\sum_{k=2}^{\infty}\lambda\beta p^{k-1}\ln(N(\varepsilon_k))\left(\frac{\lambda^2\beta^2}{2(1-p)^2} + \ln(N(\varepsilon_k))\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}\leq$$

$$\leq \exp\left\{\sqrt{2}\lambda\gamma_0\ln^{\frac{1}{2}}(N(\varepsilon_1)) + \sqrt{2}\sum_{k=2}^{\infty}\lambda\beta p^{k-1}\ln^{\frac{1}{2}}(N(\varepsilon_k))\right\}\leq$$

$$\leq \exp\left\{\sqrt{2}\lambda\gamma_0\ln^{\frac{1}{2}}(N(\sigma^{(-1)}(p\beta))) + \frac{\sqrt{2}\lambda}{p(1-p)}\int_0^{p^2\beta}\ln^{\frac{1}{2}}(N(\sigma^{(-1)}(u)))du\right\}.$$

Покладемо $\lambda = \frac{x-D1_p}{A1_p}$. Скористаємось нерівністю Чебишева, нерівністю (8) та останньою нерівністю і отримаємо необхідну оцінку (7). $\square$

Точність та надійність моделювання в рівномірній метриці

Нехай $X(t), t \in T$ — випадковий процес, що зображується у вигляді

$$X(t) = \sum_{r=1}^{N} \int_0^{\infty} f_r(t,u)\, d\xi_r(u), \tag{9}$$

де $\xi_r(u), r = 1, ..., N$ — випадкові процеси з незалежними приростами, підпорядковані мірі ν, а функції $f_r(t,u)$ при кожному $u > 0$ неперервні по t, і при кожному $t \in T$ належать класу $L_2(R,\nu)$.

Означення 4. Нехай $\xi_r = \{\xi_r(u), u \geq 0\}$, $r = 1, \ldots, N$, сумісно строго субгауссові випадкові процеси, $E|\xi_r(t)\xi_r(s)| < \infty$, $t, s \in T$, $r = 1, \ldots, N$, а функції $f_r = \{f_r(t,u),\ t \in T,\ u \geq 0\}$ такі, що $f_r(t,u)$ неперервна по t і неперервно диференційована по $u \geq 0$. Такий процес X називається регулярним строго субгауссовим процесом.

Нехай $X = \{X(t), t \in T\}$ — регулярний строго субгауссовий випадковий процес, що має зображення (9), де ξ_r, $r = 1, \ldots, N$ — сумісно строго субгауссові випадкові процеси. Для таких процесів розроблено алгоритм знаходження параметрів моделі, що наближає процес із заданими точністю та надійністю в рівномірній метриці.

Означення 5. Нехай $\Lambda > 0$, $D_{\Lambda,n}$ — розбиття інтервалу $[0,\Lambda]$, $D_{\Lambda,n}\colon\ 0 = u_0 < u_1 < \ldots < u_{n-1} < u_n = \Lambda$. Випадковий процес $X_n(t,\Lambda)$, $t \in T$, де

$$X_n(t,\Lambda) = \sum_{r=1}^{N} \sum_{i=0}^{n-1} f_r(t,u_i)(\xi_r(u_{i+1}) - \xi_r(u_i))$$

називається апроксимаційною моделлю процесу $X(t)$ (A– моделлю).

Тобто, A-модель процесу $X(t)$ моделюється у вигляді

$$\sum_{r=1}^{N} \sum_{i=0}^{n-1} f_r(t,u_i)\zeta_{r,i},$$

де $\zeta_{r,i}$, $r = 1, 2, \ldots, N$, $i = 0, \ldots, n-1$, — сім'я строго субгауссових випадкових величин із відомими коваріаціями $E\zeta_{r,i}\zeta_{r_1,i_1}$.

При $x > 0$ виконується нерівність

$$P\Big\{\sup_{t\in T} \mid X(t) - X_n(t,\Lambda) \mid > x\Big\} \leq \inf_{0\leq\delta\leq 1}\big(G_1(x\delta) + G_2(x(1-\delta))\big),$$

де

$$X_\Lambda(t) = \sum_{r=1}^{N} \int_0^{\Lambda} f_r(t,u) d\xi_r(u),$$

$$G_1(x) = P\Big\{\sup_{t\in T} \mid X_\Lambda(t) - X_n(t,\Lambda) \mid > x\Big\},$$

$$G_2(x) = P\Big\{\sup_{t\in T} \mid X_\Lambda(t) - X(t) \mid > x\Big\}.$$

Модель $X_n(t,\Lambda)$ є A-моделлю, що наближає процес $X(t)$ з точністю $x>0$ і надійністю $1-\alpha$, $\quad 0<\alpha<1$ в рівномірній метриці, якщо область Λ та її розбиття $D_{\Lambda,n}$ вибрані так, що виконується нерівність

$$\inf_{0\le\delta\le 1}\big(G_1(x\delta)+G_2(x(1-\delta))\big)\le\alpha.$$

Для оцінювання ймовірності $G_1(x)$ доцільно використовувати теорему 1, а для оцінювання ймовірності $G_2(x)$ доцільно використовувати теорему 2.

Для отримання необхідних оцінок потрібно оцінити величини

$$E(X_\Lambda^\infty(t))^2=\sum_{r=1}^N\int_\Lambda^\infty f_r^2(t,u)d\nu(u)$$

та

$$E(X_\Lambda^\infty(t)-X_\Lambda^\infty(s))^2=\sum_{r=1}^N\int_\Lambda^\infty(f_r(t,u)-f_r(s,u))^2d\nu(u),$$

а також величини

$$E(Y_n(t))^2=\sum_{r=1}^N\sum_{i=0}^{n-1}\int_{u_i}^{u_{i+1}}(f_r(t,u_i)-f_r(t,u))^2d\nu(u),$$

та

$$E(Y_n(t)-Y_n(s))^2=\sum_{r=1}^N\sum_{i=0}^{n-1}\int_{u_i}^{u_{i+1}}(f_r(t,u_i)-f_r(t,u)-f_r(s,u_i)+f_r(s,u))^2d\nu(u),$$

де

$$Y_n(t)=X_\Lambda(t)-X_n(t,\Lambda).$$

Нехай T це деякий відрізок $[a,b]$ із R. В цьому випадку

$$N(\varepsilon)\le\frac{b-a}{\varepsilon}+1.$$

Якщо θ — довільна фіксована точка в T, а $\chi=\sigma\big(\sup_{t\in T}\rho(t,\theta)\big)$, то при $u<\chi$ має місце $\sigma^{(-1)}(u)\le\sigma^{(-1)}(\chi)\le b-a$. Оскільки $\frac{b-a}{\sigma^{(-1)}(u)}\ge 1$ при $u\le\chi$, то

$$N(\sigma^{(-1)}(u))\le\frac{2(b-a)}{\sigma^{(-1)}(u)}.$$

В якості $\sigma(u)$ можна розглядати функції $\sigma(u)=Cu^\gamma$, $\quad 0\le\gamma\le 1$ або $\sigma(u)=C(\ln(\frac{a}{u}))^{-\gamma}$, $\quad \gamma>\frac{1}{2}$.

Розглянемо приклад. Нехай $X=\{X(t),t\in R\}$ стаціонарний центрований випадковий процес, $EX(t+\tau)X(t)=B(\tau)=\int_0^\infty\cos u\tau\,dF(u)$, де $F(u)$ — спектральна функція процесу. Випадковий процес X має зображення.

$$X(t)=\int_0^\infty\cos(tu)\,d\xi_1(u)+\int_0^\infty\sin(tu)\,d\xi_2(u),$$

де $\xi_1(u)$ та $\xi_2(u)$ центровані некорельовані випадкові процеси з некорельованими приростами такі, що для довільних $0\le u_1<u_2$

$$E(\xi_1(u_2)-\xi_1(u_1))^2=E(\xi_2(u_2)-\xi_2(u_1))^2=F(u_2)-F(u_1).$$

Якщо $\xi_1(u)$ та $\xi_2(u)$ сумісно строго субгауссові вимірні випадкові процеси, то $X(t)$ — регулярний строго субгауссовий випадковий процес.

Тоді A-модель такого процесу має вигляд

$$X_n(t,\Lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} \big(\cos(tu_i)\xi_{1i} + \sin(tu_i)\xi_{2i}\big), \tag{10}$$

де $\xi_{1i}, \xi_{2i}, i = 0, 1, ..., n-1,$ — некорельовані або незалежні строго субгауссові величини такі, що $E\xi_{1i} = E\xi_{2i} = 0$ та $E\xi_{1i}^2 = E\xi_{2i}^2 = F(u_{i+1}) - F(u_i)$.

Оцінимо необхідні величини.

$$E(Y_n(t))^2 =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{u_i}^{u_{i+1}} (\cos(ut) - \cos(u_i t))^2 dF(u) + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{u_i}^{u_{i+1}} (\sin(ut) - \sin(u_i t))^2 dF(u) \leq$$

$$\leq 4 \sum_{i=0}^{n-1} \int_{u_i}^{u_{i+1}} \sin^2\left(\frac{t(u-u_i)}{2}\right) dF(u) \leq t^2 \left(\frac{\Lambda}{n}\right)^2 F(\Lambda),$$

$$E(Y_n(t) - Y_n(s))^2 = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{u_i}^{u_{i+1}} (\cos(u_i t) - \cos(ut) - \cos(u_i s) + \cos(us))^2 dF(u) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1} \int_{u_i}^{u_{i+1}} (\sin(u_i t) - \sin(ut) - \sin(u_i s) + \sin(us))^2 dF(u) \leq$$

$$\leq \frac{(t-s)^2}{4} \left(\frac{\Lambda}{n}\right)^2 (1 + \Lambda^2 T^2) F(\Lambda).$$

В якості $\sigma(h)$ розглянемо функцію $\sigma(h) = Ch$, де $C = \frac{\Lambda}{2n}\big((1+\Lambda^2T^2)F(\Lambda)\big)^{\frac{1}{2}}$, а ймовірність $G_1(x\delta)$ можна оцінити за теоремою 1.

В якості θ можна вибрати точку $t = 0$. Тоді $\gamma_\theta^2 = 0$, $\chi = \sigma(T) = CT$.

Для оцінки ймовірності $G_2(x(1-\delta))$ скористаємось теоремою 2.

$$E(X_\Lambda^\infty(t))^2 = \int_\Lambda^\infty \cos^2(ut) dF(u) + \int_\Lambda^\infty \sin^2(ut) dF(u) =$$

$$= \int_\Lambda^\infty dF(u) = F(\infty) - F(\Lambda),$$

Отже, β — будь-яке число таке, що $\beta < F(\infty) - F(\Lambda)$.

$$E(X_\Lambda^\infty(t) - X_\Lambda^\infty(s))^2 =$$

$$= \int_\Lambda^\infty (\cos(ut) - \cos(us))^2 dF(u) + \int_\Lambda^\infty (\sin(ut) - \sin(us))^2 dF(u) \leq$$

$$\leq 4 \int_\Lambda^\infty \sin^2\left(\frac{u(t-s)}{2}\right) dF(u).$$

В якості $\sigma(h)$ можна розглянути

$$\sigma(h) = 2\left(\int_\Lambda^\infty \sin^2\left(\frac{h}{2}u\right) dF(u)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Задачі статистичного моделювання випадкових процесів використовуються при розв'язуванні задач атмосферної турбулентності, неоднорідностях земної поверхні, метеорології, обчисленні інтегралів [8–10]. Представляє інтерес використання методів статистичного моделювання при розв'язуванні задач фінансової та актуарної математики, математичної статистики. Саме ці задачі і лягли в основу для подальших досліджень.

Література

1. Козаченко Ю. В., Пашко А. О. Про моделювання випадкових полів I. // Теор. ймов. та мат. статистика. — 1999. — 61. — С. 61–74.
2. Козаченко Ю. В., Пашко А. О. Про моделювання випадкових полів II. // Теор. ймов. та мат. статистика. — 1999. — 62. — С. 61–74.
3. Козаченко Ю. В. Сходимость стохастических интегралов в пространствах Орлича. // Теория вероятн. и мат. статистика. — 1989. — 40. — С. 37–44.
4. Пашко А. А. Об оценке распределения супремума субгауссовских интегралов. // Теория вероятн. и мат. статистика.— 1992. — 46. — С. 124–132.
5. Пашко А. А. Равномерная сходимость субгауссовских интегралов // Теория вероятностей и ее применения. — 1998. — Т. 43, Вып. 4. — С. 793–798.
6. Козаченко Ю. В., Пашко А. О., Розора І. В. Моделювання випадкових полів. — К.: Задруга, 2007. — 232 с.
7. Пашко А. О. Чисельне моделювання субгауссових випадкових полів. // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. науки. —2006. — Вип. №1. — С. 35–39.
8. Ермаков С. М., Михайлов Г. А. Статистическое моделирование. — Москва:Наука, 1982. — 296 с.
9. Prigarin S. M. Spectral Models of Random Fields in Monte Carlo Methods. — Utrecht:VSP, 2001. — 195 p.
10. Пригарин С. М. Методы численного моделирования случайных процессов и полей. — Новосибирск, 2005. — 259 с.
11. Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В. Метрические характеристики случайных величин и процессов. — К.:ТВиМС, 1998. — 289 с.

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна.

Надійшла 01.12.2013