Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2014, №1(115) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.9

АЛГЕБРАЇЧНІ КРИТЕРІЇ АСИМПТОТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ З ВИПАДКОВИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Ю. В. Шушарін

Резюме. Досліджуються умови асимптотичної стійкості в середньому та середньому квадратичному розв'язків лінійних різницевих рівнянь із марковськими коефіцієнтами. Дослідження асимптотчної стійкості зводиться до дослідження асимптотичні стійкості частинних моментів першого порядку та їх частинних дисперсійних матриць. Використовуючи рекурентні рівняння для моментів першого порядку розв'язків різницевих рівнянь з випадковими коефіцієнтами, одержані необхідні та достатні умови асимптотичної стійкості в середньому. Показано, що із рекурентних рівнянь для частинних дисперсійних матриць можна одержати алгебраїчні критерії у вигляді необхідних і достатніх умов для стійкості в середньому квадратичному. В просторі матриць вводиться аналог функцій Ляпунова, за допомогою яких приводяться достатні умови стійкості в середньому квадратичному розв'язків лінійних різницевих рівнянь із випадковими коефіцієнтами.

Вступ

Дослідженням стійкості стохастичних різницевих рівнянь займалися К. Г. Валеєв [1]–[6], І. І. Гіхман, А. В. Скороход [7], І. А. Джаладова, Д. Г. Коренівський [8, 9], Д. Я. Хусаїнов [10] та інші.

В роботі досліджується проблема одержання алгебраїчних критеріїв асимптотичної стійкості в середньому та середньому квадратичному розв'язків загальних лінійних різницевих рівнянь з марковськими коефіцієнтами.

Алгебраїчні критерії асимптотичної стійкості в середньому та середньому квадратичному

Нехай послідовність X_n є розв'язком різницевого рівняння

$$X_{n+1} = A(\xi_{n+1}, \xi_n) X_n + \sum_{j=1}^{r} B_j(\xi_{n+1}, \xi_n) \eta_{jn} X_n, \quad X_0 = \zeta_0, \qquad (1)$$

де ξ_n — випадкові величини. Вектори $\eta_k, k = 0, ..., n$, де $\eta_k = (\eta_{1_k}, ..., \eta_{r_k})^*$, є послідовність незалежних величин, що не залежать від ξ_k і від випадкового вектора ζ_0. $A(\theta_k, \theta_s), B_j(\theta_k, \theta_s)$ — матриці розмірності $m \times m$.

Означення 1. Нульовий розв'язок рівняння (1) назвемо асимптотично стійким в середньому та середньоквадратичному відповідно, якщо

$$\lim_{n\to\infty} \langle X_n \rangle = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \left\langle |X_n|^2 \right\rangle = 0$$

для довільного детермінованого вектора X_0.

Оскільки $\langle X_n \rangle = \sum_{k=1}^{q} m_k(n)$, а $\left\langle |X_n|^2 \right\rangle = spD(n) = \sum_{k=1}^{q} spD_k(n)$, то для асимптотичної стійкості в середньому достатньо, щоб виконувалась умова $\lim\limits_{n\to\infty} m_k(n) = 0, \quad k = \overline{1,q}$. Зауважимо також, що матриці $D_k(n)$ є невід'ємно визначеними, а із того, що $spD_k(n) \to 0$ випливає рівність $\lim\limits_{n\to\infty} D_k(n) = 0$. Таким чином, для асимптотичної стійкості в середньому квадратичному необхідно та достатньо, щоб виконувалась умова $\lim\limits_{n\to\infty} D_k(n) = 0$.

Оскільки частинні моменти $m_k(n)$ є розв'язком рівняння

$$m_k(n+1) = \sum_{s=1}^{q} A_{ks} m_s(n) \pi_{ks},$$

то для вектора $(m_1(n), ..., m_q(n))^* = M(n)$ можна записати рівняння:

$$M(n+1) = AM(n),$$

де A — матриця вигляду

$$A = \begin{pmatrix} \pi_{11}A_{11} & \pi_{12}A_{12} & ... & \pi_{1q}A_{1q} \\ ... & ... & ... & ... \\ \pi_{q1}A_{q1} & \pi_{q2}A_{q2} & ... & \pi_{qq}A_{qq} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, враховуючи рівняння (1), можна зробити висновок, що має місце

Твердження 1. *Для асимптотичної стійкості в середньому нульового розв'язку рівняння* (1) *необхідно та достатньо, щоб виконувалася умова*

$$Re\lambda_i(A) < 1, \quad i = \overline{1,q},$$

де $\lambda_i(A)$ *— власні числа матриці* A.

Приведемо далі необхідні та достатні умови стійкості в середньому квадратичному.

Введемо спочатку поняття тензорного добутку матриць. Якщо A та B — матриці з елементами a_{ij}, b_{ij} відповідно, $i,j = \overline{1,n}$, то під тензорним добутком матриць A та B будемо розуміти функцію $f(A,B)$, що приймає значення в просторі R^{n4}, компоненти якої мають вигляд $c_{ijkl} = a_{ij}b_{kl}$, $\; i,j,k,$ $l = \overline{1,n}$. Тензорний добуток матриць A та B будемо позначати у вигляді $A \otimes B$. Зауважимо, що має місце рівність

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & ... & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & ... & a_{2n}B \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1}B & a_{n2}B & ... & a_{nn}B \end{pmatrix}.$$

Нехай далі $\langle \eta_{kn}\eta_{jn} \rangle = \delta_{kj}$, де $\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j. \end{cases}$

Позначимо через $d_k(n) n^2$-вимірний вектор-стовбець

$$d_k(n) = (d_{11}^{(k)}(n), ..., d_{1m}^{(k)}(n), d_{21}^{(k)}(n), ..., d_{1m}^{(k)}(n), ..., d_{mm}^{(k)}(n))^*,$$

де $d_{ij}^{(k)}(n)$ — елементи матриці $D_k(n)$. Тоді систему рекурентних рівнянь

$$D_k(n+1) = \sum_{s=1}^{q} \pi_{ks}(A_{ks} D_s(n) A_{ks}^* + \sum_{ij} B_{i_{ks}} D_s(n) B_{j_{ks}}^* E\eta_{in}\eta_{jn}, \quad D_k = E\zeta_0\zeta_0^* p_s. \tag{2}$$

можна записати у вигляді

$$d_k(n+1) = \sum_{s=1}^{q} \pi_{ks}(A_{ks} \otimes A_{ks} + \sum_{j=1}^{r} B_{jks} \otimes B_{jks}) d_k(n), \quad k = \overline{1, q}, \tag{3}$$

або

$$d(n+1) = A_1 d(n), \tag{4}$$

де $d(n) = (d_1, ..., d_q(n))^*$, A_1 — матриця вигляду

$$A_1 = \begin{pmatrix} \pi_{11}C_{11} & \pi_{12}C_{12} & ... & \pi_{1q}C_{1q} \\ ... & ... & ... & ... \\ \pi_{q1}C_{q1} & \pi_{q2}C_{q2} & ... & \pi_{qq}C_{qq} \end{pmatrix},$$

$$C_{ks} = A_{ks} \otimes A_{ks} + \sum_{j=1}^{r} B_{jks} \otimes B_{jks}.$$

Твердження 2. *Для того, щоб нульовий розв'язок рівняння* (1) *був асимптотично стійким в середньому квадратичному необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова* $\lambda_i(A_1) < 1 \quad \forall i$, *де* λ_i *— власні числа матриці* A_1.

Доведення цього твердження випливає з того факту, що умова асимптотичної стійкості в середньому квадратичному в нашому випадку еквівалентна умові асимптотичної стійкості нульового розв'язку рівняння для вектора $d(n)$.

Приведемо далі алгебраїчні критерії асимптотичної стійкості.

Нехай $d_k(n), \quad k = \overline{1, q}$ — розв'язок рівняння (3). Візьмемо функцію Ляпунова у вигляді

$$V(d) = \sum_{i,k=1}^{q} (Q_{ik} d_i, d_k),$$

$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & ... & Q_{1q} \\ ... & ... & ... \\ Q_{q1} & .. & Q_{qq} \end{pmatrix}$ — додатно визначена матриця.

Твердження 3. *Для того, щоб нульовий розв'язок стохастичного рівняння* (1) *був асимптотично стійким в середньому квадратичному необхідно та достатньо, щоб існувала додатно визначена матриця Q, що є розв'язком рівняння*

$$Q_{ik} - \sum_{s_1=1}^{q}\sum_{s_2=1}^{q} \pi_{is_1}\pi_{is_2}(A^*_{ks_1} \otimes A^*_{ks_2} + \sum_{j=1}^{q} B^*_{jks_2} \otimes B^*_{jks_2})Q_{ik}(A_{is_1} \otimes A_{is_2} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{r} B_{jis_1} \otimes B_{jis_1}) = E\delta_{ik}, \delta_{ik} = \begin{cases} 1, \ i = k, \\ 0, \ i \neq k. \end{cases} \qquad (5)$$

Доведення. Розглянемо різницю

$$\Delta V = V(d(n)) - V(d(n+1)) =$$
$$= \sum_{i,k=1}^{q} (Q_{ik} d_i(n), d_k(n)) - \sum_{i,k=1}^{q} (Q_{ik} d_i(n+1), d_k(n+1)).$$

Оскільки

$$(Q_{ik} d_i(n+1), d_k(n+1)) =$$
$$= \sum_{s_1=1}^{q}\sum_{s_2=1}^{q} \pi_{is_1}\pi_{ks_2} \Bigg(Q_{ik}(A_{is_1} \otimes A_{is_1} + \sum_{j=1}^{r} B_{jis_1} \otimes B_{jis_1}) d_i(n),$$
$$(A_{ks_2} \otimes A_{ks_2} + \sum_{j=1}^{r} B_{jks_2} \otimes B_{jks_2}) d_k(n) \Bigg) = (\bar{Q}_{ik} d_i(n), d_k(n)),$$

де

$$\bar{Q}_{ik} = \sum_{s_1=1}^{q}\sum_{s_2=1}^{q} \pi_{is_1}\pi_{ks_2}(A^T_{ks_2} \otimes A^T_{ks_2} + \sum_{j=1}^{r} B^*_{jks_2} \otimes B^*_{jks_2}) \times$$
$$\times Q_{ik}(A_{is_1} \otimes A_{is_1} + \sum_{j=1}^{r} B_{jis_1} \otimes B_{jis_1}),$$

то ΔV — додатна, коли виконується умова (5). В силу лінійності системи для $d_k(n)$ ця умова є і необхідною. □

Твердження 4. *Для того, щоб нульовий розв'язок рівняння* (1) *був асимптотично стійким в середньому квадратичному достатньо, щоб існували додатно визначені матриці Q_k розмірності $m \times m$, що є розв'язками рівнянь*

$$Q_k - \sum_{s=1}^{q} \pi_{sk}(A^*_{sk} Q_k A_{sk} + \sum_{j=1}^{r} B^*_{jsk} Q_s B_{jsk}) = E, \quad k = \overline{1,q}. \tag{6}$$

Доведення. В просторі матриць розмірності $q \times q$, що є невід'ємно визначеними, введемо функції

$$f(n) = V(D_1, ..., D_q) = \sum_{k=1}^{q} spQ_k D_k(n) = \sum_{k=1}^{q} V_k\left(D_k(n)\right),$$

де $V_k\left(D_k(n)\right) = spQ_k D_k(n)$.

Якщо матриця Q_k — додатно визначена, то $spQ_k D \geq 0$, а в тому випадку, коли D також додатно визначена, то $spQ_k D > 0$. Нехай $D_k(n)$ — розв'язок системи рівнянь (1). Розглянемо різницю

$$f(n) - f(n+1) = \Delta f_n.$$

Оскільки

$$V_k(D_k(n+1)) = spQ_k \sum_{s=1}^{q} \pi_{ks} \left[A_{ks} D_k(n) A^*_{ks} + \sum_{j=1}^{r} B_{jks} D_k(n) B^*_{jks} \right],$$

то

$$f(n+1) = \sum_{k=1}^{q} V_k\left(D_k(n+1)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{q} \sum_{j=1}^{r} spQ_k \left[A_{ks} D_s(n) A^*_{ks} + \sum_{j=1}^{r} B_{jks} D_k(n) B^*_{jks} \right] \pi_{ks} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} sp \left[\sum_{s=1}^{q} A^*_{sk} Q_k(n) A_{sk} + \sum_{j=1}^{r} B^*_{jsk} Q_s B_{jsk} \right] \pi_{sk} D_k(n),$$

а значить

$$f(n) - f(n+1) = \sum_{k=1}^{n} spD_k(n) \left[Q_k - \sum_{s=1}^{q} \left(A^*_{sk} Q_k A_{sk} + \sum_{j=1}^{r} B^*_{jsk} Q_s B_{jsk} \right) \pi_{sk} \right].$$

При умові, що існує додатно означена матриця Q_k, що є розв'язком системи рівнянь (6), одержимо

$$f(n) - f(n+1) = \sum_{k=1}^{n} spD_k(n) > 0,$$

а значить $\lim\limits_{n\to\infty} D_k(n) = 0$. Тобто розв'язок рівняння (1) асимптотично стійкий. $\square$

Наслідок. Нехай виконується умова

$$\sum_{s=1}^{q}(A_{ks}^{*}A_{ks}+\sum_{j=1}^{r}B_{jks}^{*}B_{jks})\pi_{ks}<E, \quad k=\overline{1,q},$$

тоді $\lim\limits_{n\to\infty} D_k(n)=0$.

Висновки

В роботі одержані необхідні та достатні умови асимптотчної стійкості в середньому та середньому квадратичному загальних лінійних рівнянь з марковськими коефіцієнтами. За допомогою функцій Ляпунова із матричним аргументом одержані достатні умови асимптотичної стійкості в середньому квадратичному таких рівнянь.

Література

1. Валеев К. Г. Расщепление спектра матриц — Киев: Вища школа, 1986. — 272 с.
2. Валеев К. Г. Устойчивость линейных динамических систем со случайными параметрами — Киев: Общ."Знание" УССР, 1986. — 24 с.
3. Валеев К. Г., Саннуфи М. А. Синтез оптимального управления для системы разностных уравнений со случайными коэффициентами — Киев: 1988. — 7 с. /Деп. в УкрНИИНТИ 02.01.89. №93 — Ук 89/.
4. Валеев К. Г., Стрижак О. Л. Метод моментных уравнений — Киев: Препринт, 1986. — 56 с.
5. Валеев К. Г., Финин Г. С. Построение функций Ляпунова — Киев: Наукова думка, 1981. — 412 с.
6. Валеев К. Г., Хайтхам А. М. Построение функций Ляпунова для системы линейных разностных уравнений с нестационарными марковскими или полумарковскими случайными коэффициентами — Киев, 1991. — 11 с.
7. Гихман И. И., Скороход А. В. Стахостические дифференциальные уравнения — Киев: Наукова думка, 1968. — 354 с.
8. Кореневский Д. Г. Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии — Киев: Наукова думка, 1989. — 208 с.
9. Коренівський Д. Г. Стійкість розв'язків систем різницевих рівнянь при стохастичних збуреннях їх коефіцієнтів. Алгебраїчні критерії — Київ: Ін-т математички НАН України, 2010. — 210 с.
10. Хусаинов Д. Я., Ивохин Е. В. Об оценке решений линейных систем с использованием функций Ляпунова — Киев: Кибернетика, 1985. №2. — С. 7–10.

Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана, пр-т Перемоги, 54/1, м. Київ, 03680, Україна.

Надійшла 8.01.2014