Журнал обчислювальної та прикладної математики
2014, №1(115)
Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.71:519.6

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ТОЧКОВИХ ДЖЕРЕЛ З НЕВІДОМИМИ КООРДИНАТАМИ ТА ІНТЕНСИВНОСТЯМИ

О. Ю. Грищенко, В. В. Оноцький, Н. І. Ляшко

Резюме. Запропоновано ефективний підхід розв'язання задачі ідентифікації точкових джерел з невідомими координатами та інтенсивностями. Отримано явний вигляд критерію якості. Побудований ітераційний алгоритм. Проведений чисельний експеримент з використанням двокрокового симетризованого різницевого алгоритму (ДС-алгоритму).

Постановка задачі

Розглядається задача відновлення точкових джерел для параболічного рівняння другого порядку, яка є оберненою до задачі знаходження стану системи

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{2}c_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}-\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+a(x)u=-\sum_{\beta=1}^{p}\delta(x-r^\beta)q^\beta(t), \qquad (1)$$

$$x\in\Omega,\ 0<t<T,$$

$\Omega=\{x=(x_1,x_2)|0\le x_\alpha\le l_\alpha,\alpha=1,2\}$, $k_\alpha(x)\ge k_0>0$, $k_\alpha(x)$, $c_\alpha(x)$, $a(x)$, $\alpha=\overline{1,2}$ — неперервні функції в замиканні $\overline{\Omega}$; крім того, вважаємо, що середовище є нестислим, тому маємо $\sum\limits_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial c_\alpha}{\partial x_\alpha}=0,\ \ x\in\Omega$. Тут r^β — координати джерел, $q^\beta(t)$ — потужності, $\beta=\overline{1,p}$. У початковий момент часу відоме значення розв'язку в області Ω

$$u(x,0)=g(x),\ x\in\Omega. \qquad (2)$$

А на границі області у кожен момент часу $t\in[0,T]$ відомий стан системи

$$u(x,t)=0,\ x\in\partial\Omega. \qquad (3)$$

Відомими вважаємо вимірювання $\varphi_j(t)$, $j=\overline{1,J}$ функції $u(x,t)$ в деяких окремих точках z_j області Ω

$$\tilde{u}(z_j,t)=\varphi_j(t),\ \ 0\le t\le T,\ j=\overline{1,J}, \qquad (4)$$

де $\tilde{u}(z_j,t)\equiv\int\limits_{\varpi_j}u(x,t)dx/\int\limits_{\varpi_x}dx$ — усереднення $u(x,t)$ в деякому околі ϖ_j точки z_j [2].

Задача ідентифікації полягає у визначенні невідомих параметрів точкових джерел: інтенсивностей $q^{\beta}(t)$ та координат r^{β} за додатковим спостереженням (4) у деяких точках області. Наведемо схему чисельного розв'язання задачі ідентифікації точкових джерел на основі варіаційного підходу, запропонованого в роботі [1].

Згідно введених раніше позначень стан системи $u(x,t;V,r)$ описується рівнянням

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{2} c_{\alpha}(x)\frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}}-\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}k_{\alpha}(x)\frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}}+au=F(x,r)V^{T}(t),\ x\in\Omega,\ 0<t<T, \tag{5}$$

де $V(t)=\big(V^{1}(t),V^{2}(t),...,V^{p}(t)\big)$ — вектор інтенсивностей, $r=\big(r^{1},r^{2},...,r^{p}\big)$ — вектор координат джерел, $F(x,r)=\big(\delta(x-r^{1}),\delta(x-r^{2}),...,\delta(x-r^{p})\big)$ — вектор дельта-функцій.

Будемо вважати, що керування $h=(V(t),r)\in H_{VR}$, де $H_{VR}=\big\{h=\{(V^{\beta}(t),r^{\beta}),\beta=\overline{1,p}\}\big\}\subset L_2^p(0,T)\otimes R^p$ — гільбертів простір із скалярним добутком $\langle h_1,h_2\rangle=\sum_{\beta=1}^{p}\left(\int_0^T V_{(1)}^{\beta}(t)\,V_{(2)}^{\beta}(t)dt+r_{(1)}^{\beta}r_{(2)}^{\beta}\right)$ і нормою $\|h\|_p=\langle h,h\rangle^{1/2}$.

Функціонал якості розглядаємо у вигляді

$$\mathcal{I}_{\alpha,\gamma}(V,r)=\sum_{j=1}^{J}\int_0^T(\tilde{u}(z_j,t;V,r)-\varphi_j(t))^2dt+\alpha\,\|V\|^2_{L_2^p(0,T)}+\gamma^2\,\|r\|_p^2. \tag{6}$$

Тут $\alpha>0$, $\gamma>0$ — параметри регуляризації.

Оптимальне керування $h^*=(V^*,r^*)$ визначається як мінімум функціоналу $\mathcal{I}_{\alpha,\gamma}(V,r)$, тобто

$$\mathcal{I}_{\alpha,\gamma}(V^*,r^*)=\min_{(V,r)\in H_{VR}}\mathcal{I}_{\alpha,\gamma}(V,r), \tag{7}$$

а за розв'язок варіаційної задачі (5)—(7), (2), (3) беремо $u(x,t;\ V^*,r^*)$ та сам вектор $(V^*(t),\ r^*)$.

Алгоритм ідентифікації

Теорема 1. *Критерій якості (6) для задачі оптимального керування (7), (5), (2), (3) диференційовний за Гато. При цьому*

$$\mathrm{grad}\ \mathcal{I}_{\alpha,\gamma}(V,r)=\begin{pmatrix}\frac{\partial\mathcal{I}_{\alpha,\gamma}}{\partial V}\\ \frac{\partial\mathcal{I}_{\alpha,\gamma}}{\partial r}\end{pmatrix}^{T}=\begin{pmatrix}\Psi(r,t)+2\alpha V\\ grad\Psi(r,t)\cdot V+2\gamma r\end{pmatrix}^{T},$$

де

$$grad\Psi(r,t)=\left(\frac{\partial\Psi}{\partial r_1},\frac{\partial\Psi}{\partial r_2}\right).$$

Доведення. Для варіаційної задачі (5)—(7), (2), (3) розв'язок $u(x,t;V,r)$ шукаємо у просторі $L_2(\Omega)$ (при фіксованих t, $V(t)$ та r). Рівняння (5) з урахуванням граничних умов (7) записується в H_{VR} у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{C}u + \mathcal{D}u + au = FV, \qquad 0 < t \leq T. \tag{8}$$

Оператор дифузійного переносу $\mathcal{D}$ самоспряжений та додатньо визначений в $L_2(\Omega)$: $\mathcal{D} = \mathcal{D}^* \geq k_0 E$, де E — тотожній оператор. Оператор конвективного переносу є кососиметричним: $\mathcal{C} = -\mathcal{C}^*$ в $L_2(\Omega)$. Введемо функцію $\chi = \sum\limits_{j=1}^{J} \delta(x - z_j)$, де $\delta(x)$ — дельта-функція Дірака, і нехай вектор-функція

$$\varphi(t) \in [L_2(\Omega)]^J$$

така, що $\chi\varphi(t) = \sum\limits_{j=1}^{J} \delta(x - z_j)\varphi_j(t)$. З урахуванням цих позначень функціонал (6) набуває вигляду

$$\mathcal{I}_{\alpha,\gamma}(V, r) = \int\limits_0^T (\chi,\, u(t; V, r) - \varphi(t))^2 dt + \alpha \|V\|^2_{L_2^p(0,T)} + \gamma \|r\|^2_p. \tag{9}$$

Рівняння (8) з врахуванням (2) доповнюється початковою умовою

$$u(0) = g. \tag{10}$$

Отже, приходимо до задачі мінімізації (9) на розв'язках задачі (5), (2), (3).

Для даної задачі оптимального керування сформулюємо умови оптимальності, тобто, надамо конкретного змісту рівнянню Ейлера для квадратичного функціоналу $\mathcal{I}_{\alpha,\gamma}(V, r)$, яке в покомпонентному вигляді є системою

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{I}_{\alpha,\gamma}}{\partial V}(V^*, r^*) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{I}_{\alpha,\gamma}}{\partial r}(V^*, r^*) = 0 \end{cases}. \tag{11}$$

Для знаходження градієнта $\operatorname{grad} \mathcal{I}_{\alpha,\gamma}(V, r)$ розглянемо приріст $\delta\mathcal{I}_{\alpha,\gamma}(V, r) = \mathcal{I}_{\alpha,\gamma}(V + \delta V, r + \delta r) - \mathcal{I}_{\alpha,\gamma}(V, r)$. Через $u + \delta u$ позначимо розв'язок задачі (5), (7), який відповідає правій частині з $V + \delta V$ та $r + \delta r$. Внаслідок лінійності задачі маємо

$$\frac{\partial \delta u}{\partial t} + \mathcal{C}\delta u + \mathcal{D}\delta u + a\delta u = \sum_{\beta=1}^{p} [(V^\beta + \delta V^\beta)\delta(x - r^\beta - \delta r^\beta) - V^\beta \delta(x - r^\beta)], \tag{12}$$

$$0 < t < T, \quad \delta u(0) = 0. \tag{13}$$

Тоді для приросту функціоналу отримаємо

$$\delta\mathcal{I}_{\alpha,\gamma}(V, r) = \int\limits_0^T \left(\chi,\; (u + \delta u - \varphi)^2\right) dt + \alpha \|V + \delta V\|^2_{L_2^p(0,T)} + \gamma \left\|r^\beta + \delta r^\beta\right\|^2_p -$$

$$- \int\limits_0^T (\chi,\, u - \varphi)^2 dt - \alpha \|V\|^2_{L_2^p(0,T)} - \gamma \left\|r^\beta\right\|^2_p = 2\int\limits_0^T (\chi,\; (u - \varphi)\delta u)\, dt +$$

$$+\int_0^T \Big(\chi,\ (\delta u)^2\Big)\, dt + 2\alpha\, \langle V,\ \delta V\rangle + \alpha\, \|\delta V\|^2_{L_2^p(0,T)} + 2\gamma\, \langle r,\ \delta r\rangle + \gamma\, \|\delta r\|_p^2\,. \quad (14)$$

Для знаходження виразу градієнту функціоналу $\mathcal{I}_{\alpha,\gamma}(V,r)$ необхідно виразити приріст δu через прирости керування. З цією метою введемо нову вектор-функцію $\psi(t) \in L_2(\Omega)$, яка визначає спряжений стан і перетворюється в нуль на границі $\partial\Omega$. Помножимо рівняння (12) скалярно в $L_2(\Omega)$ на $\psi(t)$ і проінтегруємо за часом від 0 до T. Маємо

$$\int_0^T \left(\left(\frac{\partial \delta u}{\partial t},\, \psi\right) + (\mathcal{C}\delta u,\, \psi) + (\mathcal{D}\delta u,\, \psi) + (a\delta u,\, \psi)\right) dt =$$

$$= \int_0^T \left(\sum_{\beta=1}^p [(V^\beta + \delta V^\beta)\delta(x - r^\beta - \delta r^\beta) - V^\beta \delta(x - r^\beta)],\ \psi\right) dt. \quad (15)$$

Для першого доданку з урахуванням (13) маємо

$$\int_0^T \left(\frac{\partial \delta u}{\partial t},\ \psi\right) dt = (\delta u(T),\ \psi(T)) - \int_0^T \left(\delta u,\ \frac{d\psi}{dt}\right) dt. \quad (16)$$

Оскільки

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}^* \text{ та } \mathcal{C} = -\mathcal{C}^*, \quad (17)$$

то

$$(\mathcal{C}\delta u,\, \psi) + (\mathcal{D}\delta u,\, \psi) + (a\delta u,\, \psi) = -\,(\delta u,\, \mathcal{C}\psi) + (\delta u,\, \mathcal{D}\psi) + (\delta u, a\,\psi)\,. \quad (18)$$

Нехай

$$\psi(T) = 0. \quad (19)$$

Тоді після підстановки (16)—(19) в (15) приходимо до рівності

$$\int_0^T \left(\delta u,\ \left(-\frac{\partial\psi}{\partial t} - \mathcal{C}\psi + \mathcal{D}\psi + a\psi\right)\right) dt =$$

$$= \int_0^T \left(\sum_{\beta=1}^p [(V^\beta + \delta V^\beta)\delta(x - r^\beta - \delta r^\beta) - V^\beta \delta(x - r^\beta)],\ \psi\right) dt. \quad (20)$$

Функції ψ будемо визначати так, щоб ліва частина (20) давала перший доданок в (14), тобто

$$-\frac{\partial\psi}{\partial t} - \mathcal{C}\psi + \mathcal{D}\psi + a\psi = 2\chi(u - \varphi(t)), \quad T > t \geq 0. \quad (21)$$

Для перетворення правої частини (21) введемо вектор-функцію спряженого стану $\Psi(r,t) = (\psi(r^1,\, t),\, \psi(r^2,\, t),\, ...,\, \psi(r^p,\, t))$. Тоді для правої частини

(20) маємо

$$\int_0^T \left(\sum_{\beta=1}^{p} [(V^\beta + \delta V^\beta)\delta(x - r^\beta - \delta r^\beta) - V^\beta \delta(x - r^\beta)],\ \psi \right) dt =$$

$$= \int_0^T \sum_{\beta=1}^{p} [(V^\beta + \delta V^\beta)\psi(r^\beta + \delta r^\beta) - V^\beta \psi(r^\beta)]dt =$$

$$= \int_0^T \sum_{\beta=1}^{p} [V^\beta(\psi(r^\beta + \delta r^\beta) - \psi(r^\beta)) + \delta V^\beta \psi(r^\beta + \delta r^\beta))]dt =$$

$$= \int_0^T \sum_{\beta=1}^{p} \Bigg[V^\beta \Bigg(\frac{(\psi(r_1^\beta + \delta r_1^\beta, r_2^\beta + \delta r_2^\beta) - \psi(r_1^\beta, r_2^\beta + \delta r_2^\beta))}{\delta r_1^\beta} \delta r_1^\beta -$$

$$- \frac{(\psi(r_1^\beta, r_2^\beta + \delta r_2^\beta) - \psi(r_1^\beta, r_2^\beta))}{\delta r_2^\beta} \delta r_2^\beta \Bigg) + \delta V^\beta \psi(r^\beta + \delta r^\beta) \Bigg] dt. \qquad (22)$$

Задачу (12), (13) поставлено коректно [3], отже, з (5) випливає, що $\|\delta u\| \leq const_1 \|\delta V\|_p$ та $\|\delta u\| \leq const_2 \|\delta r\|_p$. Тоді з (14) та (20)–(22) для задачі (12), (13) визначимо градієнт функціоналу (9)

$$\text{grad } \mathcal{I}_{\alpha,\gamma}(V, r) = \left(\frac{\partial \mathcal{I}_{\alpha,\gamma}}{\partial V}, \frac{\partial \mathcal{I}_{\alpha,\gamma}}{\partial r} \right) = \begin{pmatrix} \Psi(r,t) + 2\alpha V \\ grad\Psi(r,t)V + 2\gamma r \end{pmatrix}^T, \qquad (23)$$

де $\Psi(r,t)$ визначається за розв'язком задачі (19), (21). □

Необхідну і достатню умову (11) мінімуму функціоналу (9) подамо у вигляді двох рівнянь у векторній формі

$$\begin{cases} \Psi(r,t) + 2\alpha V(t) = 0, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial r}(r,t)\, V(t) + 2\gamma r = 0 \end{cases} \qquad (24)$$

або системи $2p$ скалярних рівнянь

$$\begin{cases} \psi(r^\beta, t) + 2\alpha V^\beta(t) = 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial r}(r^\beta, t)\, V^\beta(t) + 2\gamma r^\beta = 0, \quad \beta = 1, 2, ..., p. \end{cases} \qquad (25)$$

Резюмуючи викладене, запишемо ітераційний алгоритм визначення потужностей V^β та координат r^β. При переході з k ітерації на (k+1):

1. Розв'язується пряма задача для визначення стану системи

$$\frac{\partial u^k}{\partial t} + \mathcal{C}u^k + \mathcal{D}u^k + au^k = \sum_{\beta=1}^{p} V^{\beta,k} \delta(x - r^{\beta,k}), \qquad 0 < t \leq T; \qquad (26)$$

$$u^k(0) = 0. \qquad (27)$$

2. Знаходиться спряжений стан, що відповідає (V^*, r^*)

$$-\frac{\partial \psi^k}{\partial t} - \mathcal{C}\psi^k + \mathcal{D}\psi^k + a\psi^k = 2\chi(u^k - \varphi(t)), \qquad T > t \geq 0. \qquad (28)$$

$$\psi^k(T) = 0. \tag{29}$$

3. Визначаються нові наближення для координат r та потужностей джерел V

$$\frac{V^{\beta,k+1} - V^{\beta,k}}{s_{k+1}} + \Psi^k(r^{\beta,k}) + 2\alpha V^{\beta,k} = 0,$$

$$\frac{r^{\beta,k+1} - r^{\beta,k}}{\sigma_{k+1}} + \frac{\partial \psi^k(r^{\beta,k})}{\partial r} V^{\beta,k} + 2\gamma r^{\beta,k} = 0, \quad \beta = 1, 2, ..., p. \tag{30}$$

Тут s_{k+1} та σ_{k+1} — крокові множники, що обираються з умов $\sum_{k=1}^{\infty} s_k = +\infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k = +\infty$, $s_k \to 0$, $\sigma_k \to 0$, $k \to \infty$.

4. Обчислюється значення $\mathcal{I}_\alpha(V^{k+1})$ за формулою (9).

При виконанні умови $\left|\mathcal{I}_\alpha(V^{k+1})\right| < \varepsilon$ обчислення зупиняємо та приймаємо (V^{k+1}, r^{k+1}) за шуканий розв'язок, інакше переходимо на крок 1.

Чисельний метод

Для наближеного розв'язування прямої (26), (27) та спряженої (28), (29) задач було застосовано різницеві схеми ДС-алгоритму [4]. Пошук невідомих інтенсивностей та координат джерел здійснюється так. Покладаємо в $V(t)$ та $r(t)$ початкові наближення інтенсивностей та координат і проводимо ітераційний процес:

1) обчислюємо u за схемами ДС-алгоритму [4];
2) знаходимо ψ за схемами ДС-алгоритму [4];
3) уточнюємо інтенсивності та координати джерел за формулами

$$V^{\beta,n,s+1} = V^{\beta,n,s} - s_k(\Psi^{n,s}(r_x^{\beta,n,s}, r_y^{\beta,n,s}) + 2\alpha V^{\beta,n,s}),$$

$$r_x^{\beta,n,s+1} = r_x^{\beta,s} - \sigma_k \left(\bar{\nabla}_x \psi^{n,s}(r_x^{\beta,n,s}, r_y^{\beta,n,s}) \, V^{\beta,n,s} + 2\gamma r_x^{\beta,n,s} \right),$$

$$r_y^{\beta,n,s+1} = r_y^{\beta,s} - \sigma_k \left(\bar{\nabla}_y \psi^{n,s}(r_x^{\beta,n,s}, r_y^{\beta,n,s}) \, V^{\beta,n,s} + 2\gamma r_y^{\beta,n,s} \right),$$

$$\beta = 1, 2, ..., p, \ n = \overline{0, N}, \tag{31}$$

де $\bar{\nabla}_x \psi$, $\bar{\nabla}_y \psi$ — різницеві апроксимації другого порядку частинних похідних $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ та $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ відповідно, що мають вигляд

$$\bar{\nabla}_x \psi^{n,s}(r_x^{\beta,n,s}, r_y^{\beta,n,s}) = (1-\rho_1)((1-\rho_2)\bar{\nabla}_x \psi_{k_0,m_0}^{n,s} + \rho_2 \bar{\nabla}_x \psi_{k_0,m_0+1}^{n,s}) +$$
$$+ \rho_1((1-\rho_2)\bar{\nabla}_x \psi_{k_0+1,m_0}^{n,s} + \rho_2 \bar{\nabla}_x \psi_{k_0+1,m_0+1}^{n,s}),$$

$$\bar{\nabla}_y \psi^{n,s}(r_x^{\beta,n,s}, r_y^{\beta,n,s}) = (1-\rho_1)((1-\rho_2)\bar{\nabla}_y \psi_{k_0,m_0}^{n,s} + \rho_2 \bar{\nabla}_y \psi_{k_0,m_0+1}^{n,s}) +$$
$$+ \rho_1((1-\rho_2)\bar{\nabla}_y \psi_{k_0+1,m_0}^{n,s} + \rho_2 \bar{\nabla}_y \psi_{k_0+1,m_0+1}^{n,s}),$$

$$\bar{\nabla}_x \psi_{k_0,m_0}^{n,s} = \frac{\psi_{k_0+1,m_0}^{n,s} - \psi_{k_0-1,m_0}^{n,s}}{2h_1}, \ \ \bar{\nabla}_y \psi_{k_0,m_0}^{n,s} = \frac{\psi_{k_0,m_0+1}^{n,s} - \psi_{k_0,m_0-1}^{n,s}}{2h_2}, \tag{32}$$

$k_0 = [r_x^{\beta,s}/h_1]$, $m_0 = [r_y^{\beta,s}/h_2]$, $\rho_1 = (r_x^{\beta,s} - k_0 h_1)/h_1, \rho_2 = (r_y^{\beta,s} - m_0 h_2)/h_2$;

4) обчислюємо значення функціоналу якості за формулою

$$\mathcal{I}_\alpha(V^{s+1}) = \sum_{n=0}^{N}\sum_{j=1}^{J}\left(\tilde{\tilde{u}}(z_j,\tau n;\, V^{s+1}) - \varphi_j(t)\right)^2 + \alpha\left\|V\right\|_p^2 + \gamma\left\|r\right\|_p^2, \qquad (33)$$

де $\tilde{\tilde{u}}(z_j,\tau n;\, V^{s+1})=(1-\rho_1)((1-\rho_2)u^n_{k_0,m_0}+\rho_2 u^n_{k_0,m_0+1})+$ $+\rho_1((1-\rho_2)u^n_{k_0+1,m_0}+\rho_2 u^n_{k_0+1,m_0+1})$, $k_0=[x_{1,j}/h_1]$, $m_0=[x_{2,j}/h_2]$, $\rho_1=(x_{1,j}-k_0h_1)/h_1, \rho_2=(x_{2,j}-m_0h_2)/h_2$;

5) якщо $\left|\mathcal{I}_\alpha(V^{s+1})\right| < \varepsilon$, то V^{s+1} — шуканий розв'язок, інакше переходимо на 1).

Обчислювальний експеримент

На основі запропонованого алгоритму була розроблена програма для ЕОМ мовою C/C++. Була розглянута пряма модельна задача з відомими джерелами. Розв'язок визначався з рівняння (1), граничних та початкових умов (2), (3) при заданих значеннях інтенсивності $q^\beta(t)$ і невідомих координатах джерел $r_x^\beta(t)$, $r_y^\beta(t)$, $\beta=\overline{1,p}$. Спочатку з використанням ДС-алгоритму [3] була чисельно розв'язана пряма модельна задача з такими параметрами: область $\Omega=\{(x,y):\ 0\le x\le 500,\ 0\le y\le 300\}$, $h_1=h_2=5$; період часу $0\le t\le 920$, $\tau=2$; 1 джерело з координатами $x_0=165$, $y_0=180$ та сталою інтенсивністю 1000. Далі з використанням обчислених значень в 4-х точках спостереження z_j, $j=\overline{1,4}$ була розв'язана задача ідентифікації координат джерел з такими параметрами: початкове наближення $x_0^{(0)}=160$, $y_0^{(0)}=180$; параметри релаксації $\alpha=\gamma=1$, параметри ітераційного алгоритму $s^k=0$, $\sigma^k=10^{-5}$, $k=0,1,2,...$ В результаті виконання ітерацій спостерігалося як зменшення функціоналу $\mathcal{I}$, так і наближення обчислених координат джерела до модельних.

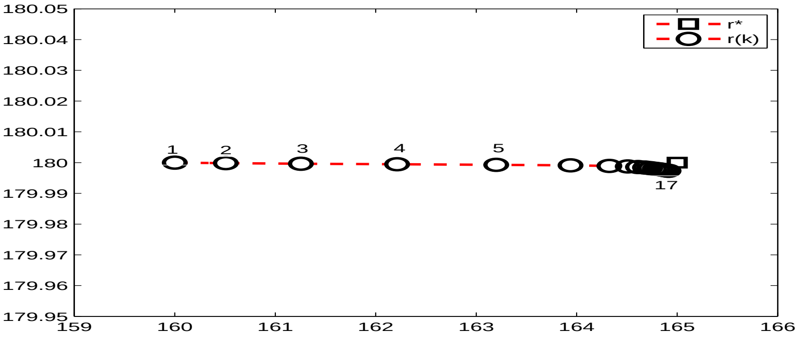

Рис. 1. Обчислені значення координат впродовж ітерацій (r^* — еталонне джерело, $r^{(k)}$ — наближення, $\alpha=\gamma=1$, $s_k=0$, $\sigma_k=10^{-5}$, $k=1,2,3,...$).

Висновки

В роботі побудовано ітераційний алгоритм розв'язання задачі ідентифікації точкових джерел з невідомими координатами та інтенсивностями. Отримано явний вигляд критерію якості. Проведений чисельний експеримент з використанням двокрокового симетризованого різницевого алгоритму (ДС-алгоритму). Результати роботи можуть бути використані для розв'язання актуальних задач в екології, медицині та інших галузях народного господарства.

Література

1. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Разностные методы решения задач идентификации источника для параболических задач // Вестник Московского университета, С.15, Вычислительная математика и кибернетика. — 1995. — № 1. — С. 47—56.
2. Клюшин Д.А., Шевченко К.В. Ідентифікація точкових джерел для параболічних задач з сингулярною правою частиною // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2004. — №2. — С. 62—70.
3. Ляшко С. И. Обобщенное управление линейными системами. / К.: Наукова думка. — 1998. — 466 с.
4. Грищенко О.Ю., Клюшин Д.А., Оноцький В.В., Стешенко Г.М. Ідентифікація точкових структурованих за віком джерел забруднень з використанням двокрокового симетризованого алгоритму // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2011. — №1(104). — С. 40—48.

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна.

Надійшла 5.12.2013