Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2014, №1(115) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.8

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА С НЕЧЕТКИМИ МНОЖЕСТВАМИ ПОСТАВЩИКОВ И ПОТРЕБИТЕЛЕЙ

С. О. Мащенко, Аль-Саммарраи Мохаммед Саад Ибрахим

Резюме. Предлагается метод решения транспортной задачи с нечеткими множествами поставщиков и потребителей. Построена функция принадлежности нечеткого множества типа 2, которое является множеством ее допустимых решений. Исследованы свойства этого множества и рассмотрены задачи выбора рациональных решений.

Введение

Классическая транспортная задача (ТЗ) представляет собой задачу линейного программирования специального вида, которая возникает во многих важных приложениях. В естественной интерпретации она рассматривается как задача об оптимальном плане перевозок от поставщиков к потребителям с минимальными затратами. Известны многочисленные обобщения транспортной задачи, которые широко используются на практике: многокритериальная ТЗ, в которой наряду с минимизацией затрат могут оптимизироваться другие показатели (время перевозки, надежность и т.д.) [1]; многоуровневая иерархическая ТЗ [2]; многопродуктовая ТЗ, в которой присутствует несколько видов грузов [2]; нечеткая ТЗ, в которой могут быть нечетко заданы как различные параметры задачи (удельные затраты, объемы запасов и потребностей), так и ограничения (например, в виде нечетких неравенств) [3]. В данной работе будет рассматриваться обобщение ТЗ на случай нечетких множеств поставщиков и потребителей.

1. Постановка транспортной задачи с нечеткими множествами поставщиков и потребителей

Сначала приведем классическую четкую постановку ТЗ. Предположим, что однородный груз сосредоточен у m поставщиков в объемах $a_1, \ldots, a_m$. Обозначим $M = \{1, \ldots, m\}$ — универсальное множество поставщиков. Данный груз необходимо доставить n потребителям в объемах $b_1, \ldots, b_n$. Обозначим $N = \{1, \ldots, n\}$ — универсальное множество потребителей. Известны $c_{ij} > 0$, $i \in M$, $j \in N$ — затраты на перевозку единицы груза от каждого i-го поставщика каждому j-у потребителю. Требуется составить план перевозок с минимальными суммарными затратами. Обозначим $x_{ij} \geq 0$, $i \in M$, $j \in N$ — объемы перевозок от i-го поставщика каждому j-у потребителю. Тогда целевая функция задачи примет вид:

$$\sum_{i\in M}\sum_{j\in N} c_{ij}x_{ij} \to \min .$$

В общем случае (так называемая несбалансированная ТЗ) система ограничений задачи состоит из двух групп неравенств. Первая группа из m неравенств описывает условие того, что объемы перевозок не превышают запасы всех m поставщиков и имеет вид:

$$\sum_{j\in N} x_{ij} \le a_i, \quad i \in M.$$

Вторая группа из n неравенств выражает требование удовлетворить запросы всех n потребителей и имеет вид:

$$\sum_{i\in M} x_{ij} \ge b_j, \quad j \in N.$$

Предположим, что лицо, принимающее решение (ЛПР), не может четко сказать, какие поставщики и потребители на момент принятия решения в действительности готовы работать, а может лишь задать функции принадлежности:

– $\mu(i)$, $i \in M$, нечеткого множества индексов $\tilde{M} \subseteq M$ поставщиков, намеренных отпускать грузы;

– $\eta(j)$, $j \in N$, нечеткого множества индексов $\tilde{N} \subseteq N$ потребителей, готовых получать грузы.

Тогда возникает ТЗ с нечеткими множествами поставщиков и потребителей в следующей постановке:

$$\sum_{i\in M}\sum_{j\in N} c_{ij}x_{ij} \to \min; \tag{1}$$

$$\sum_{j\in N} x_{ij} \le a_i, \quad i \in M; \quad x_{ij} \ge 0, \quad i \in M, \quad j \in N; \tag{2}$$

$$\sum_{j\in N} x_{ij} > 0, \quad i \in \tilde{M}; \tag{3}$$

$$\sum_{i\in M} x_{ij} \ge b_j, \quad j \in \tilde{N}, \tag{4}$$

где нечеткое множество $\tilde{M}$ ограничений (3) отвечает ненулевым объемам поставок тех поставщиков, которые намерены отпускать грузы, а нечеткое множество $\tilde{N}$ ограничений (4) отвечает требованию удовлетворить запросы потребителей, готовых получать грузы.

Объясним подробнее смысл модели (1)–(4). Действительно, если для некоторого поставщика $i \in M$ соответствующее условие (3) не выполняется (т.е. $\sum\limits_{j\in N} x_{ij} \le 0$) со степенью принадлежности $1-\mu(i)$, то из (2) следует, что объемы перевозок $x_{ij} = 0$ $\forall j \in N$ с такой же степенью принадлежности. Таким образом, объемы перевозок грузов от поставщика $i \in M$ различным потребителям будут ненулевыми со степенью принадлежности $\mu(i)$ тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $\sum\limits_{j\in N} x_{ij} > 0$ с такой же степенью принадлежности. Аналогично для потребителей. Предположим, что для некоторого потребителя $j \in N$ не выполняется соответствующее условие (3) (т.е. $\sum\limits_{i\in M} x_{ij} < b_j$) со степенью принадлежности $1-\eta(i)$, тогда в силу того, что коэффициенты целевой функции (1) положительны, очевидно, что в оптимальном решении x^* задачи (1)–(2) при условии $\sum\limits_{i\in M} x_{ij} < b_j$ мы получим значения объемов перевозок $x^*_{ij} = 0\ \forall i \in M$ с такой же степенью принадлежности. Таким образом, объемы перевозок грузов к потребителю $j \in N$ от всех поставщиков будут ненулевыми со степенью принадлежности $\eta(i)$ тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $\sum\limits_{i\in M} x_{ij} \ge b_j$ с такой же степенью принадлежности.

Обозначим X — множество допустимых решений системы неравенств (2), которое далее будем называть универсальным множеством решений ТЗ (1)–(4) с нечеткими множествами поставщиков и потребителей; $F_i = \left\{ x \in X \big| \sum\limits_{j\in N} x_{ij} > 0 \right\}$ — множество допустимых решений из универсального множества X, удовлетворяющих ограничению вида (3) с индексом $i \in M$, а $H_j = \left\{ x \in X \big| \sum\limits_{i\in M} x_{ij} \le b_j \right\}$ — аналогичное множество для ограничения $j \in N$ вида (4). Тогда задача (1)–(4) может быть представлена в виде:

$$\sum_{i\in M}\sum_{j\in N} c_{ij}x_{ij} \to \min, \quad x \in \tilde{D} = \tilde{F} \bigcap \tilde{H},$$

где

– $\tilde{F} = \bigcap\limits_{i\in M} F_i$ — множество допустимых решений системы (2), (3), представляющее собой пересечение нечеткого множества $\tilde{M}$ четких множеств F_i, $i \in M$;
– $\tilde{H} = \bigcap\limits_{j\in N} H_j$ — множество допустимых решений системы (2), (4), которое представляет собой пересечение нечеткого множества $\tilde{N}$ четких множеств H_j, $j \in N$;
– $\tilde{D} = \tilde{F} \bigcap \tilde{H}$ — множество допустимых решений системы (2)–(4).

Определим понятие пересечения нечеткого множества четких множеств в соответствии с подходом, который был предложен в [4].

2. Пересечение нечеткого множества четких множеств

Пусть G_k, $k \in K$ — некоторая конечная совокупность четких множеств, которые являются подмножествами некоторого универсального множества G. Пусть $\tilde{K}$ — некоторое нечеткое подмножество множества индексов K с функцией принадлежности $\sigma(k)$, $k \in K$.

На универсальном множестве G для каждого $k \in K$ определим функцию принадлежности (характеристическую функцию) четкого множества G_k

следующим образом:

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} 1, & x \in G_k, \\ 0, & x \notin G_k. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь пересечение $\tilde{G} = \bigcap_{k \in K} G_k$ нечеткого множества $\tilde{K}$ четких множеств G_k, $k \in K$. Естественное обобщение классической операции пересечения приводит к тому, что множество $\tilde{G}$ будет задаваться функцией принадлежности

$$y(x) = \min_{k \in K} \varphi_k(x), \quad x \in G. \tag{5}$$

Вполне понятно, что значение функции принадлежности $y(x)$ для каждого фиксированного $x \in G$ будет определяться как значение целевой функции задачи нечеткого математического программирования:

$$y = \min_{k \in K} \varphi_k. \tag{6}$$

Задачи нечеткого математического программирования достаточно хорошо изучены. Согласно [5] решением задачи (6) называется нечеткое множество $\tilde{K}^*$, носителем которого будет множество оптимальных по Парето альтернатив (обозначим его K^{PO}) двухкритериальной задачи дискретной оптимизации:

$$\varphi_k \to \min, \quad \sigma(k) \to \max, \quad k \in K. \tag{7}$$

Функцией принадлежности $\tilde{\sigma}$ нечеткого множества $\tilde{K}^*$ будет сужение функции принадлежности $\sigma(k)$, $k \in K$ с универсального множества индексов K на множество $K^{PO} \subseteq K$. Иными словами, эта функция принадлежности будет иметь вид:

$$\tilde{\sigma}(k) = \begin{cases} \sigma(k), & k \in K^{PO}, \\ 0, & k \notin K^{PO}. \end{cases}$$

Множеству решений задачи (6), которым является нечеткое множество $\tilde{K}^*$ с функцией принадлежности $\tilde{\sigma}(k)$, $k \in K$, согласно [5] соответствует нечеткое множество $\Psi \subseteq \{0, 1\}$ оптимальных значений целевой функции этой задачи с функцией принадлежности $\psi : \{0, 1\} \to [0, 1]$, $\psi(y) = \max_{\varphi(k)=y} \tilde{\sigma}(k)$, $y \in \{0, 1\}$. Следует отметить, что универсальным множеством нечеткого множества Ψ оптимальных значений целевой функции задачи (6) будет множество $\{0, 1\}$, состоящее из двух элементов $y = 0$ и $y = 1$. Это объясняется тем, что переменная y может принимать значения, равные только значениям $\varphi_k(x)$, $k \in K$, которые в свою очередь при любом фиксированном $x \in G$ могут быть равны или 0, или 1.

Таким образом, для каждого фиксированного $x \in G$ значения $y(x)$ функции принадлежности (5) нечеткого множества $\tilde{G} = \bigcap_{k \in K} G_k$ образуют также нечеткое подмножество Ψ универсального множества $Y = \{0, 1\}$. Отсюда следует, что нечеткое множество $\tilde{G}$ представляет собой так называемое [4] нечеткое множество типа 2.

Согласно [4] формализуем понятие пересечения $\tilde{G} = \bigcap\limits_{k \in K} G_k$ нечеткого множества $\tilde{K}$ четких множеств G_k, $k \in K$.

Для произвольного $x \in G$ рассмотрим отношение доминирования, которое порождается функциями $\varphi_k(x)$ и $\sigma(k)$ на множестве индексов K.

Будем говорить, что индекс $i \in K$ доминирует индекс $j \in K$ для решения $x \in G$ и обозначать это $i \overset{x}{\succ} j$, если справедливы такие неравенства: $\varphi_i(x) \leq \varphi_j(x)$, $\sigma(i) \geq \sigma(j)$ и хотя бы одно из них строгое.

Это понятие позволяет определить множество оптимальных по Парето альтернатив двухкритериальной задачи (7), которое будет носителем нечеткого множества решений задачи (6). Для $x \in G$ обозначим этот носитель

$$K^{PO}(x) = \left\{ k \in K \middle| j \overset{x}{\not\succ} k, \ \forall j \in K \right\}.$$

Для произвольных $x \in X$, $k \in K$ определим функцию принадлежности нечеткого множества решений задачи (7):

$$\tilde{\sigma}(x,k) = \begin{cases} \sigma(k), & k \in K^{PO}(x), \\ 0, & k \notin K^{PO}(x). \end{cases}$$

Пересечением нечеткого множества $\tilde{K}$ четких множеств G_k, $k \in K$ будем называть $\tilde{G} = \bigcap\limits_{k \in K} G_k$ — нечеткое множество типа 2, которое задается тройками $(x, \psi(x,y))$, где

- $\psi : X \times Y \to [0,1]$ — нечеткое отображение, выполняющее роль нечеткой функции принадлежности и заданное функцией принадлежности:

$$\psi(x,y) = \begin{cases} \max\limits_{k \in K}\{\tilde{\sigma}(x,k) | \varphi_k(x) = y\}, & \exists k \in K : \varphi_k(x) = y; \\ 0, & \varphi_k(x) \neq y \ \forall k \in K; \end{cases}$$

- x — элемент универсального множества G;
- y — элемент универсального множества $Y = \{0,1\}$ значений функции принадлежности $\psi(x,y)$ нечеткого множества $\tilde{G}$ типа 2.

Значения функции принадлежности $\psi(x,y)$ для фиксированного $x^0 \in G$ образуют нечеткое подмножество $\Psi_Y\left(x^0\right)$ множества $Y = \{0,1\}$ с функцией принадлежности $\psi\left(x^0, y\right)$, $y \in \{0,1\}$. Значение $\psi\left(x^0, 1\right)$ можно понимать как степень принадлежности решения $x^0 \in G$ множеству $\tilde{G}$. Соответственно значение $\psi\left(x^0, 0\right)$ имеет смысл степени отсутствия принадлежности $x^0 \in G$ множеству $\tilde{G}$.

С другой стороны, если в функции принадлежности $\psi(x,y)$ зафиксировать $y = 1$, то мы получим нечеткое множество решений $x \in G$, принадлежащих множеству $\tilde{G}$, с функцией принадлежности $\psi(x,1)$. Обозначим это множество $\Psi_G(1)$. Аналогично для фиксированного значения $y = 0$ получим нечеткое множество альтернатив $x \in G$, не принадлежащих множеству $\tilde{G}$, с функцией принадлежности $\psi(x,0)$. Обозначим его $\Psi_G(0)$. Интересно, что в общем случае $\Psi_G(0) \neq \overline{\Psi_G(1)}$, и, соответственно, $\psi(x,0) \neq 1 - \psi(x,1)$.

Поэтому, как $\Psi_G(0)$, так и $\Psi_G(1)$ представляют собой нечеткие множества сечений соответственно при $y = 0$ и $y = 1$ нечеткого множества $\tilde{G}$ типа 2 и являются его неотъемлемыми составляющими.

Упростить построение функции принадлежности $\psi(x, y)$ позволяет такая **Теорема 1 [4].** *Пусть G_k, $k \in K$ — четкие множества, которые заданы на универсальном множестве G соответствующими характеристическими функциями $\varphi_k(x)$, $x \in G$, $k \in K$; $\sigma(k)$, $k \in K$ — функция принадлежности нечеткого множества $\tilde{K}$. Для того, чтобы нечеткое множество $\tilde{G}$ типа 2, которое задано функцией принадлежности $\psi(x, y)$, $x \in G$, $y \in \{0, 1\}$, было пересечением нечеткого множества $\tilde{K}$ четких множеств G_k, $k \in K$, т.е. $\tilde{G} = \bigcap\limits_{k \in K} G_k$, необходимо и достаточно, чтобы для $x \in G$*

$$\psi(x,0) = \begin{cases} \max\limits_{\varphi_k(x)=0} \sigma(k), & \exists k \in K \quad \varphi_k(x) = 0, \\ 0, & \varphi_k(x) = 1 \ \forall k \in K; \end{cases}$$

$$\psi(x,1) = \begin{cases} \max\limits_{k \in K} \sigma(k), & \varphi_k(x) = 1 \ \forall k \in Arg \max\limits_{j \in K} \sigma(j), \\ 0, & \exists i \in Arg \max\limits_{j \in K} \sigma(j) \ \varphi_k(x) = 0. \end{cases}$$

3. Нечеткое множество типа 2 допустимых решений ТЗ с нечеткими множествами поставщиков и потребителей

Из теоремы 1 следует, что множество $\tilde{D} = \tilde{F} \bigcap \tilde{H}$ допустимых решений системы (2)–(4) представляет собой пересечение нечетких множеств типа 2 $\tilde{F}$ и $\tilde{H}$.

Пересечение $\tilde{F} = \bigcap\limits_{i \in M} F_i$ является множеством допустимых решений неравенств (3), которое задается функцией принадлежности $\psi_{\tilde{F}}(x, y)$, $y \in \{0, 1\}$, где

$$\psi_{\tilde{F}}(x,0) = \begin{cases} \max\limits_{i \in M} \left\{ \mu(i) \Big| \sum\limits_{j \in N} x_{ij} \le 0 \right\}, & \exists i \in M \quad \sum\limits_{j \in N} x_{ij} \le 0, \\ 0, & \forall i \in M \quad \sum\limits_{j \in N} x_{ij} > 0 \end{cases} \tag{8}$$

— достоверность недопустимости решения x для неравенств (3);

$$\psi_{\tilde{F}}(x,1) = \begin{cases} \max\limits_{i \in M} \mu(i), & \forall i \in Arg \max\limits_{i \in M} \mu(i) \ \sum\limits_{j \in N} x_{ij} > 0, \\ 0, & \exists i \in Arg \max\limits_{i \in M} \mu(i) \ \sum\limits_{j \in N} x_{ij} \le 0 \end{cases} \tag{9}$$

— достоверность его допустимости.

Поскольку неравенства (3) описывают множество планов перевоза грузов, в которых все поставщики принимают ненулевое участие, то величину $\psi_{\tilde{F}}(x, 0)$ можно интерпретировать как достоверность неучастия всех поставщиков в плане x перевоза грузов, а $\psi_{\tilde{F}}(x, 1)$ можно понимать как достоверность их участия.

Нечеткое множество типа 2 $\tilde{H} = \bigcap\limits_{j \in N} H_j$ является множеством допустимых решений неравенств (4), которое задается функцией принадлежности $\psi_{\tilde{H}}(x, y)$, $y \in \{0, 1\}$, где

$$\psi_{\tilde{H}}(x,0) = \begin{cases} \max\limits_{i \in M} \left\{ \eta(j) \middle| \sum\limits_{i \in M} x_{ij} \le b_j \right\}, & \exists j \in N \quad \sum\limits_{i \in M} x_{ij} \le b_j, \\ 0, & \forall j \in N \quad \sum\limits_{i \in M} x_{ij} \ge b_j \end{cases} \tag{10}$$

— достоверность недопустимости решения x для неравенств (4);

$$\psi_{\tilde{H}}(x,1) = \begin{cases} \max\limits_{j \in N} \eta(j), & \forall j \in Arg \max\limits_{j \in N} \eta(j) \ \sum\limits_{i \in M} x_{ij} \ge b_j, \\ 0, & \exists j \in Arg \max\limits_{j \in N} \eta(j) \ \sum\limits_{i \in M} x_{ij} < b_j \end{cases} \tag{11}$$

— достоверность его допустимости.

Поскольку неравенства (4) описывают множество планов перевоза грузов, в которых все потребители принимают ненулевое участие, то величину $\psi_{\tilde{H}}(x, 0)$ можно интерпретировать как достоверность неучастия всех потребителей в плане x перевоза грузов, а $\psi_{\tilde{H}}(x, 1)$ можно понимать как достоверность их участия.

Из (8)–(11) следует, что множество $\tilde{D} = \tilde{F} \bigcap \tilde{H}$ допустимых решений системы (2)–(4) представляет собой нечеткое множество типа 2. Обозначим его функцию принадлежности $\psi_{\tilde{D}}(x, y)$, $y \in \{0, 1\}$. Используя операцию пересечения нечетких множеств типа 2, получим
$\psi_{\tilde{D}}(x,y) = \max\limits_{\substack{\nu,\omega \in \{0,1\} \\ y = min\{\nu,\omega\}}} \min \left\{ \psi_{\tilde{F}}(x,\nu), \psi_{\tilde{H}}(x,\omega) \right\}$. Отсюда

$$\psi_{\tilde{D}}(x,0) = \max_{\substack{\nu,\omega \in \{0,1\} \\ 0 = min\{\nu,\omega\}}} \min \left\{ \psi_{\tilde{F}}(x,\nu), \psi_{\tilde{H}}(x,\omega) \right\} =$$

$$= \max \left\{ \min \left\{ \psi_{\tilde{F}}(x,0), \psi_{\tilde{H}}(x,0) \right\}, \right.$$

$$\left. \min \left\{ \psi_{\tilde{F}}(x,0), \psi_{\tilde{H}}(x,1) \right\}, \min \left\{ \psi_{\tilde{F}}(x,1), \psi_{\tilde{H}}(x,0) \right\} \right\}$$

— достоверность недопустимости решения для системы (2)–(4);

$$\psi_{\tilde{D}}(x,1) = \max_{\substack{\nu,\omega \in \{0,1\} \\ 1 = min\{\nu,\omega\}}} \min \left\{ \psi_{\tilde{F}}(x,\nu), \psi_{\tilde{H}}(x,\omega) \right\} = \min \left\{ \psi_{\tilde{F}}(x,1), \psi_{\tilde{H}}(x,1) \right\}$$

— достоверность его допустимости.

Построим эти функции. Для этого рассмотрим возможные варианты:

1. Пусть $\sum\limits_{j \in N} x_{ij} > 0 \ \forall i \in M$, отсюда $\psi_{\tilde{F}}(x, 0) = 0$, $\psi_{\tilde{F}}(x, 1) = \max\limits_{i \in M} \mu(i)$.
   Тогда $\psi_{\tilde{D}}(x,0) = \max \left\{ 0, 0, \min \left\{ \max\limits_{i \in M} \mu(i), \psi_{\tilde{H}}(x,0) \right\} \right\} =$
   $= \min \left\{ \max\limits_{i \in M} \mu(i), \psi_{\tilde{H}}(x,0) \right\}$, $\psi_{\tilde{D}}(x,1) = \min \left\{ \max\limits_{i \in M} \mu(i), \psi_{\tilde{H}}(x,1) \right\}$.
   Возможны следующие случаи:

а) если $\sum\limits_{i\in M} x_{ij} \ge b_j\ \forall j \in N$, то $\psi_{\tilde H}(x,0) = 0$, $\psi_{\tilde H}(x,1) = \max\limits_{j\in N} \eta(j)$,

$$\begin{gathered}\psi_{\tilde D}(x,0) = \max\{0,0,0\} = 0,\\ \psi_{\tilde D}(x,1) = \min\left\{\max_{i\in M}\mu(i), \max_{j\in N}\eta(j)\right\};\end{gathered} \tag{12}$$

б) если $\sum\limits_{i\in M} x_{ij} \ge b_j\ \forall j \in Arg\max\limits_{j\in N}\eta(j)$ и $\exists j \in N\ \sum\limits_{i\in M} x_{ij} < b_j$, то $\psi_{\tilde H}(x,0) = \max\limits_{j\in N}\left\{\eta(j)\middle|\ \sum\limits_{i\in M} x_{ij} < b_j\right\}$, $\psi_{\tilde H}(x,1) = \max\limits_{j\in N}\eta(j)$, поэтому

$$\begin{gathered}\psi_{\tilde D}(x,0) = \min\left\{\max_{i\in M}\mu(i), \max_{j\in N}\left\{\eta(j)\middle|\ \sum_{i\in M} x_{ij} < b_j\right\}\right\},\\ \psi_{\tilde D}(x,1) = \min\left\{\max_{i\in M}\mu(i), \max_{j\in N}\eta(j)\right\};\end{gathered} \tag{13}$$

в) если $\exists j \in Arg\max\limits_{j\in N}\eta(j)\ \sum\limits_{i\in M} x_{ij} < b_j$, то $\psi_{\tilde H}(x,0) = \max\limits_{j\in N}\eta(j)$, $\psi_{\tilde H}(x,1) = 0$, поэтому получим

$$\begin{gathered}\psi_{\tilde D}(x,0) = \min\left\{\max_{i\in M}\mu(i), \max_{j\in N}\eta(j)\right\},\\ \psi_{\tilde D}(x,1) = \min\left\{\max_{i\in M}\mu(i), 0\right\} = 0.\end{gathered} \tag{14}$$

2. Пусть $\sum\limits_{i\in M} x_{ij} > 0\ \forall i \in Arg\max\limits_{i\in M}\mu(i)$ и $\exists i \in M\ \sum\limits_{j\in N} x_{ij} \le 0$. Тогда $\psi_{\tilde F}(x,0) = \max\limits_{i\in M}\left\{\mu(i)\middle|\ \sum\limits_{j\in N} x_{ij} \le 0\right\}$, $\psi_{\tilde F}(x,1) = \max\limits_{i\in M}\mu(i)$. Поэтому

$$\psi_{\tilde D}(x,0) = \max\left\{\min\left\{\max_{i\in M}\left\{\mu(i)\middle|\ \sum_{j\in N} x_{ij} \le 0\right\}, \psi_{\tilde H}(x,0)\right\},\right.$$
$$\left.\min\left\{\max_{i\in M}\left\{\mu(i)\middle|\ \sum_{j\in N} x_{ij} \le 0\right\}, \min\left\{\max_{i\in M}\mu(i), \psi_{\tilde H}(x,0)\right\}\right\}\right\},$$
$$\psi_{\tilde D}(x,1) = \min\left\{\max_{i\in M}\mu(i), \psi_{\tilde H}(x,1)\right\}.$$

Возможны следующие случаи:

а) если $\sum\limits_{i\in M} x_{ij} \ge b_j\ \forall j \in N$, то $\psi_{\tilde H}(x,0) = 0$, $\psi_{\tilde H}(x,1) = \max\limits_{j\in N}\eta(j)$,

$$\begin{gathered}\psi_{\tilde D}(x,0) = \min\left\{\max_{i\in M}\left\{\mu(i)\middle|\ \sum_{j\in N} x_{ij} \le 0\right\}, \max_{j\in N}\eta(j)\right\},\\ \psi_{\tilde D}(x,1) = \min\left\{\max_{i\in M}\mu(i), \max_{j\in N}\eta(j)\right\};\end{gathered} \tag{15}$$

б) если $\sum\limits_{i\in M} x_{ij} \ge b_j\ \forall j \in Arg\max\limits_{j\in N}\eta(j)$ и $\exists j \in N : \sum\limits_{i\in M} x_{ij} < b_j$, то $\psi_{\tilde H}(x,0) = \max\limits_{j\in N}\left\{\eta(j)\middle|\ \sum\limits_{i\in M} x_{ij} < b_j\right\}$, $\psi_{\tilde H}(x,1) = \max\limits_{j\in N}\eta(j)$, поэтому получим

$$\begin{gathered}\psi_{\tilde{D}}(x,0)=\max\left\{\min\left\{\max_{i\in M}\left\{\mu(i)\big|\sum_{j\in N}x_{ij}\le 0\right\},\right.\right.\\ \left.\left.\max_{j\in N}\left\{\eta(j)\big|\sum_{i\in M}x_{ij}<b_j\right\}\right\},\min\left\{\max_{i\in M}\left\{\mu(i)\big|\sum_{j\in N}x_{ij}\le 0\right\},\right.\right.\\ \left.\left.\max_{j\in N}\eta(j)\right\},\min\left\{\max_{i\in M}\mu(i),\max_{j\in N}\left\{\eta(j)\big|\sum_{i\in M}x_{ij}<b_j\right\}\right\}\right\},\\ \psi_{\tilde{D}}(x,1)=\min\left\{\max_{i\in M}\mu(i),\max_{j\in N}\eta(j)\right\};\end{gathered}\tag{16}$$

в) $\exists j\in Arg\max\limits_{j\in N}\eta(j):\sum\limits_{i\in M}x_{ij}<b_j$, то $\psi_{\tilde{H}}(x,0)=\max\limits_{j\in N}\eta(j)$, $\psi_{\tilde{H}}(x,1)=0$,

$$\begin{gathered}\psi_{\tilde{D}}(x,0)=\max\left\{\min\left\{\max_{i\in M}\left\{\mu(i)\big|\sum_{j\in N}x_{ij}\le 0\right\},\max_{j\in N}\eta(j)\right\},\right.\\ \left.0,\min\left\{\max_{i\in M}\mu(i),\max_{j\in N}\eta(j)\right\}\right\}=\min\left\{\max_{i\in M}\mu(i),\max_{j\in N}\eta(j)\right\},\\ \psi_{\tilde{D}}(x,1)=\min\left\{\max_{i\in M}\mu(i),0\right\}=0.\end{gathered}\tag{17}$$

3. Пусть $\exists i\in Arg\max\limits_{i\in M}\mu(i):\sum\limits_{j\in N}x_{ij}\le 0$. Тогда $\psi_{\tilde{F}}(x,0)=\max\limits_{i\in M}\mu(i)$, $\psi_{\tilde{F}}(x,1)=0$. Поэтому

$$\begin{gathered}\psi_{\tilde{D}}(x,0)=\max\left\{\min\left\{\max_{i\in M}\mu(i),\psi_{\tilde{H}}(x,0)\right\},\right.\\ \left.\min\left\{\max_{i\in M}\mu(i),\psi_{\tilde{H}}(x,1)\right\},0\right\},\\ \psi_{\tilde{D}}(x,1)=\min\left\{\psi_{\tilde{F}}(x,1),\psi_{\tilde{H}}(x,1)\right\}=0.\end{gathered}\tag{18}$$

Возможны следующие случаи:

а) если $\sum\limits_{i\in M}x_{ij}\ge b_j\ \forall j\in N$, то $\psi_{\tilde{H}}(x,0)=0$, $\psi_{\tilde{H}}(x,1)=\max\limits_{j\in N}\eta(j)$, поэтому

$$\begin{gathered}\psi_{\tilde{D}}(x,0)=\max\left\{0,\min\left\{\max_{i\in M}\mu(i),\max_{j\in N}\eta(j)\right\},0\right\}=\\ =\min\left\{\max_{i\in M}\mu(i),\max_{j\in N}\eta(j)\right\};\end{gathered}\tag{19}$$

б) если $\sum\limits_{i\in M}x_{ij}\ge b_j\ \forall j\in Arg\max\limits_{j\in N}\eta(j)$ и $\exists j\in N:\sum\limits_{i\in M}x_{ij}<b_j$, то

$$\psi_{\tilde{H}}(x,0)=\max_{j\in N}\left\{\eta(j)\big|\sum_{i\in M}x_{ij}<b_j\right\},\quad \psi_{\tilde{H}}(x,1)=\max_{j\in N}\eta(j),$$

поэтому

$$\psi_{\tilde{D}}(x,0) = \max\left\{\min\left\{\max_{i\in M}\mu(i), \max_{j\in N}\left\{\eta(j) \big| \sum_{i\in M} x_{ij} < b_j\right\}\right\},\right.$$
$$\left.\min\left\{\max_{i\in M}\mu(i), \max_{j\in N}\eta(j)\right\}, 0\right\} = \min\left\{\max_{i\in M}\mu(i), \max_{j\in N}\eta(j)\right\}; \tag{20}$$

в) если $\exists j \in Arg\max_{j\in N}\eta(j) : \sum_{i\in M} x_{ij} < b_j$, то $\psi_{\tilde{H}}(x,0) = \max_{j\in N}\eta(j)$, $\psi_{\tilde{H}}(x,1) = 0$, тогда получим

$$\psi_{\tilde{D}}(x,0) = \max\left\{\min\left\{\max_{i\in M}\mu(i), \max_{j\in N}\eta(j)\right\}, 0, 0\right\} =$$
$$= \min\left\{\max_{i\in M}\mu(i), \max_{j\in N}\eta(j)\right\}. \tag{21}$$

4. Поиск рационального решения

При поиске рационального решения ЛПР будет стараться минимизировать целевую функцию (1), а также максимизировать достоверности $\psi_{\tilde{F}}(x,0)$ и $\psi_{\tilde{F}}(x,1)$ соответственно неучастия и участия поставщиков и потребителей в плане перевоза грузов. Иными словами, перед ЛПР возникает следующая трехкритериальная задача:

$$\sum_{i\in M}\sum_{j\in N} c_{ij}x_{ij} \to \min, \quad \psi_{\tilde{D}}(x,0) \to \max, \quad \psi_{\tilde{D}}(x,1) \to \max, \quad x \in X. \tag{22}$$

Обозначим SO — множество слабо оптимальных по Парето (оптимальных по Слейтеру) решений этой задачи. Напомним, что решение $x^* \geq 0$ называется оптимальным по Слейтеру для задачи вида (22), если $\nexists x \geq 0$, для которого имеют место неравенства:

$$\sum_{i\in M}\sum_{j\in N} c_{ij}x^*_{ij} > \sum_{i\in M}\sum_{j\in N} c_{ij}x_{ij}, \;\; \psi_{\tilde{D}}(x^*,0) < \psi_{\tilde{D}}(x,0), \psi_{\tilde{D}}(x^*,1) < \psi_{\tilde{D}}(x,1).$$

Вполне понятно, что в определение рационального решения задачи (1)–(4) следует включать лишь решения из множества SO. Эти рассуждения приводят к следующему определению.

Общим рациональным решением ТЗ (1)–(4) с нечеткими множествами поставщиков и потребителей будем называть нечеткое множество $\tilde{X}$ типа 2 с функцией принадлежности

$$\psi_{\tilde{X}}(x,y) = \begin{cases} \psi_{\tilde{D}}(x,y), & x \in SO, \\ 0, & x \notin SO, \end{cases}$$

где $y \in Y = \{0,1\}$.

В случае, когда ЛПР интересует конкретное рациональное решение x^*, то его можно выбрать из множества SO с помощью того или иного метода многокритериальной оптимизации, решив задачу (22). Тогда мы его будем называть рациональным решением ТЗ (1)–(4) с достоверностями $\psi_{\tilde{F}}(x,0)$ и $\psi_{\tilde{F}}(x,1)$ соответственно неучастия и участия поставщиков и потребителей в плане перевоза грузов.

Обозначим функции

$$\xi_D(x) = \begin{cases} \max\limits_{j \in N} \left\{ \eta(j) \middle| \sum\limits_{i \in M} x_{ij} \le 0 \right\}, & \exists j \in N \ \sum\limits_{i \in M} x_{ij} \le 0, \\ 0, & \forall j \in N \ \sum\limits_{i \in M} x_{ij} > 0, \end{cases} \tag{23}$$

$$\xi_S(x) = \begin{cases} \max\limits_{i \in M} \left\{ \mu(i) \middle| \sum\limits_{j \in N} x_{ij} < b_j \right\}, & \exists i \in M \ \sum\limits_{j \in N} x_{ij} < b_j, \\ 0, & \forall i \in M \ \sum\limits_{j \in N} x_{ij} \ge b_j. \end{cases} \tag{24}$$

Обозначим $I^* = Arg \max\limits_{i \in M} \mu(i)$, $J^* = Arg \max\limits_{j \in N} \eta(j)$. Упростить задачу (22) позволяет такая

Теорема 2. *Если функции принадлежности $\mu(i)$ — нечеткого множества индексов $\tilde{M} \subseteq M$ поставщиков, намеренных отпускать грузы, и $\eta(j)$ — нечеткого множества индексов $\tilde{N} \subseteq N$ потребителей, готовых получать грузы, являются нормальными, т.е. $\max\limits_{i \in M} \mu(i) = 1$ и $\max\limits_{j \in N} \eta(j) = 1$, то для каждого заданного значения параметра $\xi \in (0, 1]$, при котором задача*

$$\sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij} \to \min, \quad \max\{\xi_D(x), \xi_S(x)\} \ge \xi, \quad x \in X, \tag{25}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{j \in N} x_{ij} > 0 \quad \forall i \in I^*, \\ &\sum_{i \in M} x_{ij} \ge b_j \quad \forall j \in J^* \end{aligned} \tag{26}$$

имеет оптимальное решение, это решение будет рациональным для ТЗ (1)–(4) с достоверностью участия поставщиков и потребителей в плане перевоза грузов, равной единице, и достоверностью их неучастия не менее ξ.

Доказательство. Сначала покажем, какой вид примет функция принадлежности $\psi_{\tilde{D}}(x, y)$ нечеткого множества типа 2 допустимых решений системы (2), (3). Для этого рассмотрим возможные варианты.

1. Пусть $\sum\limits_{j \in N} x_{ij} > 0 \ \forall i \in M$. Возможны такие случаи:

а) если $\sum\limits_{i \in M} x_{ij} \ge b_j \ \forall j \in N$, то из (12) следует, что

$$\psi_{\tilde{D}}(x, 0) = 0, \quad \psi_{\tilde{D}}(x, 1) = 1; \tag{27}$$

б) если $\sum\limits_{i \in M} x_{ij} \ge b_j \ \forall j \in J^*$ и $\exists j \in N \ \sum\limits_{i \in M} x_{ij} < b_j$, то из (13) следует, что

$$\psi_{\tilde{D}}(x, 0) = \max_{j \in N} \left\{ \eta(j) \middle| \sum_{i \in M} x_{ij} < b_j \right\}, \quad \psi_{\tilde{D}}(x, 1) = 1; \tag{28}$$

в) если $\exists j \in J^* \ \sum\limits_{i \in M} x_{ij} < b_j$, то из (14) следует, что

$$\psi_{\tilde{D}}(x, 0) = 1, \quad \psi_{\tilde{D}}(x, 1) = 0. \tag{29}$$

2. Пусть $\sum\limits_{j\in N} x_{ij} > 0\ \forall i \in I^*$ и $\exists i \in M\ \sum\limits_{j\in N} x_{ij} \le 0$. Возможны случаи:

а) если $\sum\limits_{i\in M} x_{ij} \ge b_j\ \forall j \in N$, то из (15) следует, что

$$\psi_{\tilde{D}}(x,0) = \max_{i\in M}\left\{\mu(i) \Big| \sum_{j\in N} x_{ij} \le 0\right\}, \quad \psi_{\tilde{D}}(x,1) = 1; \tag{30}$$

б) если $\sum\limits_{i\in M} x_{ij} \ge b_j\ \forall j \in J^*$ и $\exists j \in N\ \sum\limits_{i\in M} x_{ij} < b_j$, то из (16) следует, что

$$\begin{gathered}\psi_{\tilde{D}}(x,0) = \max\left\{\max_{i\in M}\left\{\mu(i) \Big| \sum_{j\in N} x_{ij} \le 0\right\},\right.\\ \left.\max_{j\in N}\left\{\eta(j) \Big| \sum_{i\in M} x_{ij} < b_j\right\}\right\}, \quad \psi_{\tilde{D}}(x,1) = 1;\end{gathered} \tag{31}$$

в) $\exists j \in J^* : \sum\limits_{i\in M} x_{ij} < b_j$, то из (17) следует, что

$$\psi_{\tilde{D}}(x,0) = 1, \quad \psi_{\tilde{D}}(x,1) = 0. \tag{32}$$

3. Пусть $\exists i \in I^* : \sum\limits_{j\in N} x_{ij} \le 0$, тогда из (18), (19)–(21) следует

$$\psi_{\tilde{D}}(x,0) = 1, \quad \psi_{\tilde{D}}(x,1) = 0. \tag{33}$$

Таким образом, из (27)–(33) получим следующие формулы:

1) $\psi_{\tilde{D}}(x,0) = 0$ и $\psi_{\tilde{D}}(x,1) = 1$, если

$$\sum_{j\in N} x_{ij} > 0\ \forall i \in M \text{ и } \sum_{i\in M} x_{ij} \ge b_j\ \forall j \in N;$$

2) $\psi_{\tilde{D}}(x,0) = \max\limits_{j\in N}\left\{\eta(j) \Big| \sum\limits_{i\in M} x_{ij} < b_j\right\}$ и $\psi_{\tilde{D}}(x,1) = 1$, если

$$\sum_{j\in N} x_{ij} > 0\ \forall i \in M,\ \sum_{i\in M} x_{ij} \ge b_j\ \forall j \in J^*,\ \exists j \in N\ \sum_{i\in M} x_{ij} < b_j;$$

3) $\psi_{\tilde{D}}(x,0) = \max\limits_{i\in M}\left\{\mu(i) \Big| \sum\limits_{j\in N} x_{ij} \le 0\right\}$ и $\psi_{\tilde{D}}(x,1) = 1$, если

$$\sum_{j\in N} x_{ij} > 0\ \forall i \in I^*,\ \exists i \in M\ \sum_{j\in N} x_{ij} \le 0,\ \sum_{i\in M} x_{ij} \ge b_j\ \forall j \in N;$$

4) $\psi_{\tilde{D}}(x,0) = \max\left\{\max\limits_{i\in M}\left\{\mu(i) \Big| \sum\limits_{j\in N} x_{ij} \le 0\right\}, \max\limits_{j\in N}\left\{\eta(j) \Big| \sum\limits_{i\in M} x_{ij} < b_j\right\}\right\}$ и $\psi_{\tilde{D}}(x,1) = 1$, если

$$\begin{gathered}\sum_{j\in N} x_{ij} > 0 \quad \forall i \in I^*, \quad \exists i \in M \quad \sum_{j\in N} x_{ij} \le 0,\\ \sum_{i\in M} x_{ij} \ge b_j \quad \forall j \in J^*, \quad \exists j \in N \quad \sum_{i\in M} x_{ij} < b_j;\end{gathered}$$

5) $\psi_{\tilde{D}}(x,0)=1$ и $\psi_{\tilde{D}}(x,1)=0$, если

$$\exists j \in J^* \ \sum_{i\in M} x_{ij} < b_j \text{ или } \exists i \in I^* \ \sum_{j\in N} x_{ij} \le 0.$$

Из полученных формул следует, что

$$\psi_{\tilde{D}}(x,1)=\begin{cases}1, & \sum\limits_{j\in N} x_{ij}>0 \ \forall i\in I^*, \ \sum\limits_{i\in M} x_{ij} \ge b_j \ \forall j \in J^*,\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases} \tag{34}$$

Для окончательного вычисления $\psi_{\tilde{D}}(x,0)$ случаи 2) – 4) можно объединить с 5). Тогда получим:

I) $\psi_{\tilde{D}}(x,0)=0$, если $\sum\limits_{j\in N} x_{ij}>0 \ \forall i\in M$ и $\sum\limits_{i\in M} x_{ij}\ge b_j \ \forall j\in N$;

II) $\psi_{\tilde{D}}(x,0)=\max\limits_{j\in N}\left\{\eta(j)\big| \sum\limits_{i\in M} x_{ij}<b_j\right\}$, если

$$\sum_{j\in N} x_{ij}>0 \ \forall i \in M, \ \exists j\in N \ \sum_{i\in M} x_{ij}<b_j;$$

III) $\psi_{\tilde{D}}(x,0)=\max\limits_{i\in M}\left\{\mu(i)\big| \sum\limits_{j\in N} x_{ij}\le 0\right\}$, если

$$\exists i\in M \ \sum_{j\in N} x_{ij}\le 0, \ \sum_{i\in M} x_{ij}\ge b_j \ \forall j\in N;$$

IV) $\psi_{\tilde{D}}(x,0)=\max\left\{\max\limits_{i\in M}\left\{\mu(i)\big| \sum\limits_{j\in N} x_{ij}<b_j\right\}, \max\limits_{j\in N}\left\{\eta(j)\big| \sum\limits_{i\in M} x_{ij}\le 0\right\}\right\}$,

$$\text{если } \exists i\in M \ \sum_{j\in N} x_{ij}<b_j, \ \exists j\in N \ \sum_{i\in M} x_{ij}\le 0.$$

Далее, используя обозначения (23), (24) очевидно получим

$$\psi_{\tilde{D}}(x,0)=\max\left\{\xi_D(x),\xi_S(x)\right\}. \tag{35}$$

Теперь покажем, что для каждого заданного значения параметра $\xi \in (0,1]$, при котором задача (25), (26) имеет оптимальное решение x^*, оно будет рациональным решением ТЗ (1)–(4) с достоверностью участия поставщиков и потребителей в плане перевоза грузов, равной единице, и достоверностью их неучастия не менее ξ.

Предположим противное, что $x^* \notin SO$. Тогда $\exists \hat{x} \ge 0$, для которого имеют место неравенства

$$\sum_{i\in M}\sum_{j\in N} c_{ij}\hat{x}_{ij} < \sum_{i\in M}\sum_{j\in N} c_{ij}x^*_{ij}, \ \psi_{\tilde{D}}(\hat{x},0)>\psi_{\tilde{D}}(x^*,0), \ \psi_{\tilde{D}}(\hat{x},1)>\psi_{\tilde{D}}(x^*,1). \tag{36}$$

Поскольку x^* — допустимое решение задачи (25), (26), то из (35) следует, что $\psi_{\tilde{D}}(x^*,0)\ge\xi$, , из (34) следует, что $\psi_{\tilde{D}}(x,1)=1$. Поэтому достоверность неучастия поставщиков и потребителей в плане x^* перевоза грузов не менее ξ, а достоверность их участия равна единице.

Тогда из неравенств (36) следует, что $\psi_{\tilde D}(\hat x, 0) > \psi_{\tilde D}(x^*, 0) \geq \xi$ и $\psi_{\tilde D}(\hat x, 1) > \psi_{\tilde D}(x^*, 1) \geq 1$. Получили противоречие. Таким образом, x^* — оптимальная по Слейтеру альтернатива задачи (22), которая по определению будет рациональным решением решением ТЗ (1)–(4) с достоверностью участия поставщиков и потребителей в плане перевоза грузов, равной единице, и достоверностью их неучастия не менее ξ. □

Далее будем считать, что предположения теоремы 2 выполняются, т. е. функции принадлежности $\mu(i)$ — нечеткого множества индексов $\tilde M \subseteq M$ поставщиков, намеренных отпускать грузы, и $\eta(j)$ — нечеткого множества индексов $\tilde N \subseteq N$ потребителей, готовых получать грузы, являются нормальными $\left(\max\limits_{i\in M}\mu(i) = 1 \text{ и } \max\limits_{j\in N}\eta(j) = 1\right)$.

Посмотрим как можно упростить решение задачи (25), (26).

Обозначим $M^\xi = \left\{i \in M \middle| \xi \leq \mu(i)\right\}$ и $N^\xi = \left\{j \in N \middle| \xi \leq \eta(j)\right\}$ — множества индексов соответственно поставщиков и потребителей, которые имеют степени принадлежности соответствующим нечетким множествам $\tilde M$ и $\tilde N$ не менее $\xi \in (0, 1]$. Тогда задачу (25), (26) можно записать в виде

$$\begin{gathered} \min_{k\in M^\xi, l\in N^\xi} \min \sum_{i\in M}\sum_{j\in N} c_{ij}x_{ij}, \quad x \in X; \\ \sum_{j\in N} x_{ij} \leq 0, \quad \sum_{i\in M} x_{ij} < b_j; \end{gathered} \tag{37}$$

$$\sum_{j\in N} x_{ij} > 0 \quad \forall i \in I^*, \quad \sum_{i\in M} x_{ij} \geq b_j \quad \forall j \in J^*. \tag{38}$$

Поскольку $\max\limits_{i\in M}\mu(i) = 1$ и $\max\limits_{j\in N}\eta(j) = 1$, то очевидно, что при $\xi = 1$ и $k \in I^*$, $l \in J^*$ ограничения (37) и (38) будут априори не совместны. Поэтому из теоремы 2 можно получить следующий результат.

Обозначим $\bar M^\xi = \left\{i \in M \middle| \xi \leq \mu(i) < 1\right\}$ и $\bar N^\xi = \left\{j \in N \middle| \xi \leq \eta(j) < 1\right\}$ — множества индексов соответственно поставщиков и потребителей, которые имеют достоверность степени принадлежности не менее $\xi \in (0, 1)$, но не равную единице.

Следствие. Если функции принадлежности $\mu(i)$ — нечеткого множества индексов $\tilde M \subseteq M$ поставщиков, намеренных отпускать грузы, и $\eta(j)$ — нечеткого множества индексов $\tilde N \subseteq N$ потребителей, готовых получать грузы, являются нормальными, то для каждого заданного значения параметра $\xi \in (0, 1)$, при котором задача

$$\begin{gathered} \min_{k\in M^\xi, l\in N^\xi} \min \sum_{i\in M}\sum_{j\in N} c_{ij}x_{ij}; \\ \sum_{j\in N} x_{ij} \leq a_i, \quad i \in M; \quad \sum_{j\in N} x_{kj} \leq 0; \quad \sum_{j\in N} x_{ij} > 0 \ \forall i \in I^*; \\ \sum_{i\in M} x_{il} < b_l; \quad \sum_{i\in M} x_{ij} \geq b_j \quad \forall j \in J^*; \\ x_{ij} \geq 0, \quad i \in M, \quad j \in N \end{gathered}$$

имеет оптимальное решение, оно будет рациональным решением ТЗ (1)–(4) с достоверностью участия поставщиков и потребителей в плане перевоза грузов, равной единице, и достоверностью их неучастия не менее ξ.

Заключение

В заключение следует отметить, что предложенный метод расширяет область применения нечеткого математического программирования на случай транспортной задачи с нечеткими множествами поставщиков и потребителей и может дать новый поход к решению других постановок задач оптимизации в условиях нечеткой информации.

Література

1. Senapati P., Kumar R. T. Multi objective transportation model into Fuzzy parameters: Priority based Fuzzy Goal programming approach // Journal of Transportation systems Engineering and Information Technology. — 2008. — №8. — P. 40–48.
2. Раскин Л. Г., Кириченко И. О. Многоиндексные задачи линейного программирования. — М.: Радио и связь, 1982.
3. Zinmenoz F., Vudegay J. L. Solving fuzzy solid transportation problem by an evolutionary algorithm based parametric approach // European Journal of Operations Research. — 1999. —117. — P. 485–510.
4. Мащенко С. О. Задача математического программирования с нечетким множеством индексов ограничений // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — №1. — С. 73–81.
5. Орловский С. А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981.

Факультет кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко,ул. Владимирская, 64, Киев, 01601, Украина

Поступила 06.01.2014.