Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2014, № 1(115) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.9

ГІБРИДНИЙ ДЕКОМПОЗИЦІЙНИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ОПЕРАТОРНОГО ВКЛЮЧЕННЯ

В. В. Семенов, О. А. Харченко

Резюме. У роботі розглянуто операторне включення з сумою двох максимальних монотонних операторів, що діють у нескінченновимірному гільбертовому просторі. Для цієї задачі запропоновано новий декомпозиційний метод, що є регуляризацією схеми Tseng'а за допомогою "shrinking" схеми. Доведено теорему про сильну збіжність породжених методом послідовностей до нормального розв'язку операторного включення. Результат отримано за умов, коли один з операторів є максимальним монотонним, а другий — однозначним, монотонним та ліпшицевим.

Ключові слова: операторне включення, варіаційна нерівність, максимальний монотонний оператор, декомпозиція, алгоритм, нормальний розв'язок, сильна збіжність.

1. Вступ

Дана робота є продовженням недавньої статті [1] та присвячена побудові сильно збіжного декомпозиційного методу для операторних включень та варіаційних нерівностей, які належать до центральних об'єктів дослідження в сучасному прикладному нелінійному аналізі [2, 3, 4]. Зокрема, варіаційна нерівність є зручною загальною формою запису різних нелінійних задач. У вигляді задачі розв'язання варіаційної нерівності можуть бути сформульовані задачі розв'язання рівнянь, знаходження екстремуму функціоналів, знаходження точок рівноваги Неша в грі тощо. Дослідженню методів розв'язання операторних включень, варіаційних нерівностей та близьким до них питанням присвячено роботи [5–31].

У даній роботі розглянуто включення

$$0 \in (A + B)\, x$$

з максимальними монотонними операторами A, B, що діють у нескінченновимірному гільбертовому просторі. Грунтуючись на методі декомпозиції Tseng'а (Tseng's modified forward-backward splitting method) [5] та відомому гібридному методі апроксимації нерухомих точок нерозтягуючих операторів (shrinking method) [6], запропоновано новий сильно збіжний декомпозиційний алгоритм розв'язання включень. Раніше подібний прийом було використано у роботі [7] для регуляризації слабко збіжного у нескінченновимірній ситуації екстрапроксимального методу розв'язання рівноважних задач [8]. Теорема сильної збіжності отримана за умов, коли один з операторів (той, що використовується на ”backward”-кроці) є максимальним монотонним, а другий — однозначним, монотонним та ліпшицевим.

2. Постановка задачі та алгоритм

Нехай H — дійсний гільбертовий простір із скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ та нормою $\|\cdot\|$, P_C — оператор метричного проектування простору H на замкнену опуклу множину $C \subseteq H$. Для оператора $T : H \to 2^H$ будемо використовувати позначення:

$$\mathrm{dom}(T) = \{x \in H : \ Tx \neq \emptyset\},$$
$$T^{-1}0 = \{x \in H : \ 0 \in Tx\}.$$

Нагадаємо, що резольвентою оператора $T : H \to 2^H$ називають оператор $J_T = (I + T)^{-1} : H \to 2^H$. Відомо, що для максимального монотонного оператора T резольвента J_T є однозначним, скрізь заданим та міцно нерозтягуючим оператором, а множина $T^{-1}0$ — замкненою та опуклою [4]. Корисною є

Лема 1 ([2, 4])**.** *Нехай $T : H \to 2^H$ — максимальний монотонний оператор, x, $u \in H$. Тоді*

$$(u - v, x - y) \geq 0 \ \ \forall y \in \mathrm{dom}(T) \ \ \forall v \in Ty \quad \Rightarrow \quad x \in \mathrm{dom}(T), \ u \in Tx.$$

Нехай:

A1) $A : H \to 2^H$ — максимальний монотонний оператор;
A2) $B : H \to H$ — монотонний та ліпшицевий оператор.

Розглянемо операторне включення:

$$0 \in (A + B)\, x. \tag{1}$$

Припустимо, що

A3) $(A + B)^{-1}0 \neq \emptyset$.

Зауваження 1. Типовим прикладом (1) є варіаційні нерівності:

$$\text{знайти } x \in C : \ \ (Tx, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C, \tag{2}$$

де C — замкнена опукла підмножина H, $T : H \to H$. Дійсно, (2) можна подати у вигляді операторного включення [2, 4]:

$$0 \in (T + N_C)\, x,$$

де $N_C x$ — нормальний конус множини C в точці $x \in H$, тобто

$$N_C x = \begin{cases} \{z \in H : \ (z, y - x) \leq 0 \ \ \forall y \in C\}, & \text{якщо } x \in C, \\ \emptyset, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Для побудови сильно збіжних апроксимацій розв'язків включення (1) пропонуємо такий

Алгоритм 1. Для заданого $x_1 = x \in H$ генеруємо послідовність елементів $x_n \in H$ за допомогою ітераційної схеми ($\lambda_n > 0$):

$$\begin{cases} C_1 = H, \\ y_n = x_n - \lambda_n B x_n, \\ z_n = J_{\lambda_n A} y_n, \\ v_n = x_n - y_n + z_n - \lambda_n B z_n, \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \|v_n - z\| \le \|x_n - z\|\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x. \end{cases}$$

Зауваження 2. Алгоритм 1 є регуляризацією за допомогою гібридної схеми [6] відомого декомпозиційного методу Tseng'а [5]. Подібний алгоритм для задачі рівноважного програмування досліджений в [7].

Зауваження 3. Основний недолік цих схем — зростаюча складність опуклих множин C_n, на які проектується точка x.

Зауваження 4. Цікавим та важливим є питання розробки сильно збіжного декомпозиційного методу для включення

$$0 \in (A_1 + A_2 + ... + A_p + B)\, x,$$

де оператори A_i — максимальні монотонні, а оператор B — однозначний, монотонний та ліпшицевий.

Зробимо припущення:

A4) $\lambda_n \in [a, b] \subseteq (0, 1/L)$, де $L > 0$ — константа Ліпшиця оператора B.

3. Теорема сильної збіжності

Надалі припускаємо, що в алгоритмі 1 $z_n \ne x_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Дійсно, якщо $z_n = (I + \lambda_n A)^{-1}(I - \lambda_n B)x_n = x_n$, то маємо $x_n \in (A + B)^{-1}0$.

Сформулюємо основний результат.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови A1)–A4). Тоді породжені алгоритмом 1 послідовності (x_n), (z_n) та (v_n) сильно збігаються до точки $z^* = P_{(A+B)^{-1}0} x$.*

Має місце важлива нерівність.

Лема 2 ([1, 4, 5])**.** *Для породжених алгоритмом 1 послідовностей (x_n), (z_n) та (v_n) має місце нерівність*

$$\|v_n - z\|^2 \le \|x_n - z\|^2 - \left(1 - \lambda_n^2 L^2\right) \|x_n - z_n\|^2, \tag{3}$$

де $z \in (A + B)^{-1}0$.

Перейдемо безпосередньо до доведення теореми 1.

Множини C_n — опуклі та замкнені. Покажемо, що алгоритм 1 породжує ланцюжок вкладень

$$H = C_1 \supseteq C_2 \supseteq ... \supseteq C_n \supseteq ... \supseteq (A + B)^{-1}0.$$

Ясно, що $(A+B)^{-1}0 \subseteq C_1 = H$. Припустимо, що $(A+B)^{-1}0 \subseteq C_n$. Нехай $z \in (A+B)^{-1}0$. За лемою 2 маємо

$$\|v_n - z\| \le \|x_n - z\| .$$

Отже, $z \in C_{n+1}$. Тому $(A+B)^{-1}0 \subseteq C_{n+1} \subseteq C_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Покажемо, що існує $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| \in \mathbb{R}$. Оскільки $x_n = P_{C_n}x$, множина $(A+B)^{-1}0$ лежить в C_n, то для всіх $z \in (A+B)^{-1}0$ має місце нерівність

$$\|x_n - z\|^2 \le \|x - z\|^2 - \|x_n - x\|^2 .$$

Тоді

$$\|x_n - x\|^2 \le \|x - z\|^2 - \|x_n - z\|^2 \le \|x - z\|^2 .$$

Звідки випливає обмеженість зверху послідовності $(\|x_n - x\|)$. Оскільки $C_{n+1} \subseteq C_n$, то

$$\|x_{n+1} - x\| \ge \|x_n - x\| .$$

Отже, послідовність $(\|x_n - x\|)$ — обмежена зверху та неспадна, тому існує скінченна границя $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|$.

Покажемо фундаментальність послідовності (x_n). Для довільного номера $m \in \mathbb{N}$, врахувавши $C_{n+m} \subseteq C_n$, отримаємо

$$\|x_{n+m} - x_n\|^2 = \|x_{n+m} - P_{C_n}x\|^2 \le \|x - x_{n+m}\|^2 - \|x_n - x\|^2 .$$

Звідки випливає фундаментальність послідовності (x_n).

Таким чином, $x_n \to z^* \in H$ при $n \to \infty$.

Покажемо, що $z^* \in (A+B)^{-1}0$. Оскільки $x_{n+1} \in C_{n+1}$, то

$$\|v_n - x_{n+1}\| \le \|x_n - x_{n+1}\| .$$

Звідки

$$\|v_n - x_n\| \le \|v_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_n\| \le 2\,\|x_n - x_{n+1}\| \to 0. \tag{4}$$

Використовуючи нерівність з леми 2, отримуємо

$$\begin{aligned}\|x_n - z_n\|^2 &\le \frac{\|x_n - z\|^2 - \|v_n - z\|^2}{(1-\lambda_n^2 L^2)} = \\ &= \frac{(\|x_n - z\| - \|v_n - z\|)\,(\|x_n - z\| + \|v_n - z\|)}{(1-\lambda_n^2 L^2)} \le \\ &\le \frac{(\|x_n - z\| + \|v_n - z\|)}{(1-\lambda_n^2 L^2)}\,\|x_n - v_n\| = O\left(\|x_n - v_n\|\right),\end{aligned}$$

де $z \in (A+B)^{-1}0$. З (4) випливає

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - z_n\| = 0. \tag{5}$$

З (5) випливає

$$\lim_{n\to\infty} \|z_n - z^*\| = 0$$

та

$$(A+B)z_n \ni u_n = \frac{x_n - z_n}{\lambda_n} + Bz_n - Bx_n \to 0.$$

Маємо

$$(u_n - p, z_n - y) \ge 0 \quad \forall y \in \mathrm{dom}(A+B) \ \ \forall p \in (A+B)y.$$

Після граничного переходу отримаємо

$$(0-p, z^*-y) \geq 0 \quad \forall y \in \mathrm{dom}(A+B) \ \ \forall p \in (A+B)y.$$

Оскільки оператор $A+B$ є максимальним монотонним, то, завдяки лемі 1, $0 \in (A+B)w$.

Оскільки $x_n = P_{C_n}x$ і $(A+B)^{-1}0 \subseteq C_n$, то

$$(x_n - x, z - x_n) \geq 0 \quad \forall z \in (A+B)^{-1}0. \tag{6}$$

Здійснивши граничний перехід в (6), одержимо

$$(z^* - x, z - z^*) \geq 0 \quad \forall z \in (A+B)^{-1}0,$$

тобто, $z^* = P_{(A+B)^{-1}0}x$.

4. Випадок невідомої константи Ліпшиця оператора B

Якщо невідома константа Ліпшиця оператора B, то замість алгоритму 1 можна застосувати процес з Арміхо-подібним регулюванням кроку λ_n (див. [5, 9]):

$$\begin{cases} x_1 = x \in H, \\ j(n) = \min\left\{ j \geq 0 : \frac{\left\|BJ_{\sigma 2^{-j}A}\left(I-\sigma 2^{-j}B\right)x_n - Bx_n\right\|}{\left\|J_{\sigma 2^{-j}A}\left(I-\sigma 2^{-j}B\right)x_n - x_n\right\|} \leq \frac{2^j\theta}{\sigma} \right\}, \\ \lambda_n = \frac{\sigma}{2^{j(n)}}, \\ z_n = J_{\lambda_n A}\left(I - \lambda_n B\right)x_n, \\ v_n = z_n - \lambda_n\left(Bz_n - Bx_n\right), \\ C_{n+1} = \left\{ z \in C_n : \|v_n - z\| \leq \|x_n - z\| \right\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}x, \end{cases}$$

де $\sigma > 0$, $\theta \in (0,1)$ — задані параметри.

Процес обчислення $j(n)$ є скінченним, а для породжених цим алгоритмом послідовностей має місце нерівність

$$\|v_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 - \left(1-\theta^2\right)\|x_n - z_n\|^2,$$

де $z \in (A+B)^{-1}0$.

З цієї нерівності можна вивести, що при виконанні умов A1)–A3) послідовності (x_n), (z_n) та (v_n), що породжені описаним алгоритмом з регулюванням кроку λ_n, сильно збігаються до точки $z^* = P_{(A+B)^{-1}0}x$.

Зауваження 5. Для варіаційної нерівності (2) алгоритм з регулюванням кроку набуває вигляду:

$$\begin{cases} x_1 = x \in H, \\ j(n) = \min\left\{ j \geq 0 : \frac{\left\|TP_C\left(I-\sigma 2^{-j}T\right)x_n - Tx_n\right\|}{\left\|P_C\left(I-\sigma 2^{-j}T\right)x_n - x_n\right\|} \leq \frac{2^j\theta}{\sigma} \right\}, \\ \lambda_n = \frac{\sigma}{2^{j(n)}}, \\ z_n = P_C\left(I - \lambda_n T\right)x_n, \\ v_n = z_n - \lambda_n\left(Tz_n - Tx_n\right), \\ C_{n+1} = \left\{ z \in C_n : \|v_n - z\| \leq \|x_n - z\| \right\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}x, \end{cases}$$

де $\sigma > 0$, $\theta \in (0,1)$ — задані параметри.

Робота Семенова В.В. була підтримана Верховною Радою України (Іменна стипендія ВР України для молодих вчених у 2013 році).

Література

1. Семенов В. В. Сильно збіжний декомпозиційний алгоритм для операторного включення з сумою двох максимальних монотонних операторів // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2013. — №4(114). — С. 60–67.
2. Aubin J.-P., Ekeland I. Applied Nonlinear Analysis. — Wiley, New York, 1984. — 518 p.
3. Nagurney A. Network economics: A variational inequality approach. — Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999. — xxi + 325 p.
4. Bauschke H. H., Combettes P. L. Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces. — Springer, New York, 2011. — xvi + 408 p.
5. Tseng P. A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings // SIAM J. Control Optim. — 2000. — V. 38. — P. 431–446.
6. Takahashi W., Takeuchi Y., Kubota R. Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces // J. Math. Anal. Appl. — 2008. — 341. — P. 276—286.
7. Войтова Т. А., Денисов С. В., Семенов В. В. Сильно збіжний модифікований варіант методу Корпелевич для задач рівноважного програмування // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2011. — №1(104). — С. 10–23.
8. Tran D. Q., Muu L. D., Nguyen V. H. Extragradient algorithms extended to solving equilibrium problems // Optimization. — 2008. — 57(6). — P. 749—776.
9. Khobotov E. N. Modification of the extragradient method for solving variational inequalities and certain optimization problems // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1989. — V. 27. — P. 120–127.
10. Konnov I. V. Combined relaxation methods for variational inequalities. — Springer-Verlag, Berlin, 2001. — xi + 181 p.
11. Facchinei F., Pang J.-S. Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problem. V. 2. — Springer, New York, 2003. — xxxiii + 666 p.
12. Васин В. В., Еремин И. И. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. (Теория и приложения). — Москва-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005. — 200 с.
13. Войтова Т. А., Семенов В. В. Метод решения двухэтапных операторных включений // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2010. — №3(102). — С. 34–39.
14. Семенов В. В. Сильно збіжний алгоритм пошуку нерухомої точки багатозначного фейєрівського оператора // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2010. — №4(103). — С. 89–93.
15. Семенов В. В. О сходимости методов решения двухуровневых вариационных неравенств с монотонными операторами // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2010. — №2(101). — С. 120–128.
16. Маліцький Ю. В., Семенов В. В. Нові теореми сильної збіжності проксимального методу для задачі рівноважного програмування // Журн. обчисл. та прикл. матем. —- 2010. — № 3(102). — С. 79–88.
17. Semenov V. V. On the Parallel Proximal Decomposition Method for Solving the Problems of Convex Optimization // Journal of Automation and Information Sciences. — 2010. — V. 42, Iss. 4. — P. 13—18.

18. Lyashko S. I., Semenov V. V., Voitova T. A. Low-cost modification of Korpelevich's method for monotone equilibrium problems // Cybernetics and Systems Analysis. — 2011. — V. 47. — P. 631–639.
19. Денисов С. В., Семенов В. В. Проксимальний алгоритм для дворівневих варіаційних нерівностей: сильна збіжність // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2011. — №3(106). — С. 27–32.
20. Апостол Р. Я., Гриненко А. А., Семенов В. В. Ітераційні алгоритми для монотонних дворівневих варіаційних нерівностей // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2012. — №1(107). — С. 3–14.
21. Семенов В. В. Параллельная декомпозиция вариационных неравенств с монотонными операторами // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2012. — №2(108). — С. 53–58.
22. Семенов В. В. Збіжність проксимального алгоритму для задачі дворівневої опуклої мінімізації // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2012. — №4(110). — С. 100–111.
23. Войтова Т. А., Денисов С. В., Семенов В. В. Альтернуючий проксимальний алгоритм для задачі дворівневої опуклої мінімізації // Доповіді НАН України. — 2012. — №2. — С. 56–62.
24. Семенов В. В. Два методи апроксимації нерухомої точки фейєрівського оператора // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2013. — №1(111). — С. 46–56.
25. Семенов В. В. Явный алгоритм расщепления для вариационных неравенств с монотонными операторами // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2013. — №2(112). — С. 42–52.
26. Семенов В. В. Параллельная декомпозиция операторных включений с максимальными монотонными операторами // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2013. — №2(112). — С. 155–160.
27. Семенов В. В. Об одной принципиальной схеме вычисления обобщенной проекции // Доповіді НАН України. — 2013. — №6. — С. 41–46.
28. Малицкий Ю. В., Семенов В. В. Схема внешних аппроксимаций для вариационных неравенств на множестве неподвижных точек фейеровских операторов // Доповіді НАН України. — 2013. — №7. — С. 47–52.
29. Semenov V. V. Strongly Convergent Algorithms for Variational Inequality Problem Over the Set of Solutions the Equilibrium Problems // Continuous and Distributed Systems, Solid Mechanics and Its Applications / Eds.: M. Z. Zgurovsky and V. A. Sadovnichiy — Springer International Publishing Switzerland, 2014. — V. 211. — P. 131–146.
30. Malitsky Yu. V., Semenov V. V. A hybrid method without extrapolation step for solving variational inequality problems // Journal of Global Optimization. — 2014. — DOI 10.1007/s10898-014-0150-x.
31. Malitsky Yu. V., Semenov V. V. An Extragradient Algorithm for Monotone Variational Inequalities // Cybernetics and Systems Analysis. — 2014. — V. 50. — P. 271–277.

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна

Надійшла 17.01.2014.