Журнал обчислювальної та прикладної математики | **2014, №3(117)** | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.9

ОБГРУНТУВАННЯ ДС-АЛГОРИТМІВ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ІЗОТЕРМІЧНИХ ПОТОКІВ НЕСТИСЛОЇ РІДИНИ

А. С. Марцафей

Резюме. Побудовано ефективний обчислювальний ДС-алгоритм для початково крайової задачі для системи рівнянь Нав'є-Стокса. Встановлено його консервативнісь. За допомогою методу першого диференціального наближення досліджено дисперсійність та дисипативність алгоритму.

Вступ

Серед методів вивчення фізичних, економічних та соціальних процесів математичне моделювання займає одне з провідних місць. Математичні моделі в основному базуються на системах лінійних або нелінійних рівнянь в частинних похідних. Зокрема динаміку в'язкої рідини та газів моделює система рівнянь Нав'є-Стокса. Ця система описує основні закони збереження руху в'язкої рідини або газів. Дослідженню цих моделей присвячено багато робіт видатних вчених: О. О. Ладиженської, Г. І. Марчука, Р. Темама, Ж.-Л. Лионса, М. М. Яненка та їх учнів [1–3]. Проте багато питань все ж залишилися відкритими. Це як питання існування та єдності розв'язку, так і питання побудови ефективних методів знаходження розв'язку. Серед чисельних методів, які використовуються для розв'язування практичних задач основними є скінченно-різницеві алгоритми або методи скінченних елементів. Одним із перспективних скінченно-різницевих методів для таких задач є двокроково-симетризований алгоритм (ДС-алгоритм) [4]. В роботі [5] запропоновано версію ДС-алгоритму для системи рівнянь Нав'є-Стокса, записану у недивегентній формі, але не наведено теоретичного дослідження цього алгоритму. Дана робота присвячена модифікації ДС-алгоритму для дивергентної форми цієї ж системи, обґрунтуванню адекватності чисельного алгоритму диференціальній моделі ізотермічних потоків нестислої рідини (консервативність алгоритму) та визначенню низки таких обчислювальних характеристик різницевих схем як асимптотична збіжність (апроксимація), збіжність на грубих сітках (перше диференціальне наближення), дисперсійність та дисипативність алгоритму.

Алгоритм Розв'язку

В області $G = \{\Omega \times (0 < t < T)\}$, $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$ розглядається система рівнянь Нав'є-Стокса, яка описує модель руху в'язкої нестислої рідини

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\upsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial (u)^2}{\partial x}-\frac{\partial\,(uv)}{\partial y},\tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+\upsilon\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial\,(uv)}{\partial x}-\frac{\partial (v)^2}{\partial y},\tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0,\tag{3}$$

де u, v — проекції вектора швидкості, P — тиск, ρ — щільність, υ — в'язкість.

Рівняння нерозривності (3) замінюємо еквівалентним йому рівнянням Пуассона для тиску

$$-\frac{\partial}{\partial t}D+\upsilon\left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial^2\left(u^2\right)}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2\,(uv)}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\left(v^2\right)}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2},\tag{4}$$

де $D\equiv\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$.

В області Ω введено рівномірну сітку: $\omega_{\tau h}=\{x_{1,i},x_{2,j},t_n : x_{1,i}=ih_1, x_{2,j}=jh_2,\, t_n=n\tau;\, i=\overline{1,m_1},\, j=\overline{1,m_2},\, h_k=\frac{1}{m_k},\,(k=1,2)\,,\tau>0\}$, сіткові функції $\varphi_{ij}^k=\varphi\left(x_i,y_j,t_k\right)$ і оператори різницевих похідних другого порядку апроксимації.

Розв'язок різницевої задачі будуємо за двокроковою схемою. Враховуючи, що рівняння нерозривності виконується точно на часових кроках $(2n+1)$ та $(2n+2)$, а на кроці $2n$ його різницевий аналог не дорівнює нулю, рівняння (4) можна апроксимувати різницевим рівнянням

$$\begin{aligned}&\frac{P_{i-1j}^{2n+1}-2P_{ij}^{2n+1}+P_{i+1j}^{2n+1}}{h_1^2}+\frac{P_{ij-1}^{2n+1}-2P_{ij}^{2n+1}+P_{ij+1}^{2n+1}}{h_2^2}=S_{ij}^{2n},\\&i=\overline{1,m_1},j=\overline{1,m_2},\end{aligned}\tag{5}$$

де $S_{ij}^{2n}=\upsilon\Delta D_{ij}^{2n}+U_1^{2n}+U_2^{2n}+U_3^{2n}+D_{ij}^{2n}/\tau$,

$$D_{ij}^{2n}=\frac{u_{i+1j}^{2n}-u_{i-1j}^{2n}}{2h_1}+\frac{v_{ij+1}^{2n}-v_{ij-1}^{2n}}{2h_2},$$

$$U_1=\frac{\left(u_{i+1j}^{2n}\right)^2-2\left(u_{ij}^{2n}\right)^2+\left(u_{i-1j}^{2n}\right)^2}{h_1^2},\ U_2=\frac{\left(v_{ij+1}^{2n}\right)^2-2\left(v_{ij}^{2n}\right)^2+\left(v_{ij-1}^{2n}\right)^2}{h_2^2},$$

$$U_3=\frac{u_{i+1j+1}^{2n}v_{i+1j+1}^{2n}-u_{i+1j-1}^{2n}v_{i+1j1}^{2n}-u_{i-1j+1}^{2n}v_{i-1j+1}^{2n}+u_{i-1j-1}^{2n}v_{i-1j-1}^{2n}}{2h_1h_2},$$

$$\Delta D_{ij}^{2n}=\frac{D_{i+1j}^{2n}-2D_{ij}^{2n}+D_{i-1j}^{2n}}{h_1^2}+\frac{D_{ij+1}^{2n}-2D_{ij}^{2n}+D_{ij-1}^{2n}}{h_2^2}.$$

Як бачимо, на кроці $(2n+1)$ права частина цього рівняння залежить тільки від відомих умов u_{ij}^{2n} та v_{ij}^{2n} $(n=0,1...)$. Отже, на кроці $(2n+1)$ його розв'язок можна знайти з довільною точністю одним із відомих економічних методів [6].

Перейдемо до побудови розв'язку системи рівнянь (1), (2).

Сіткову область $\omega_{\tau h}$ розділено на дві допоміжні підобласті $\Omega_{\tau h}^{(1,n)}$ й $\Omega_{\tau h}^{(2,n)}$. Елементами першої є точки (x_{1i}, x_{2j}, t_n) такі, що сума індексів $s = i + j + n$ —- парна, а інші точки віднесено до другої підобласті. За часовий крок 2τ прийнято дві складові: непарний півкрок $(2n+1)$ і парний $(2n+2)$.

Рівняння збереження кількості руху (1) та (2) апроксимовано за прийнятою в ДС-алгоритмах схемою [4]:

на кроці $(2n+1)$ в точках множини $\Omega_{\tau h}^{(1,2n+1)}$:

$$\begin{gathered}
\frac{u_{ij}^{2n+1}-u_{ij}^{2n}}{\tau}=-\frac{\left(u_{i+1j}^{2n}\right)^2-\left(u_{i-1j}^{2n}\right)^2}{2h_1}-\frac{u_{ij+1}^{2n}v_{ij+1}^{2n}-u_{ij-1}^{2n}v_{ij-1}^{2n}}{2h_2}-\\
-\frac{1}{\rho}\frac{P_{i+1j}^{2n+1}-P_{i-1j}^{2n+1}}{2h_1}+\\
+\upsilon\frac{u_{i-1j}^{2n}-2u_{ij}^{2n}+u_{i+1j}^{2n}}{h_1^2}+\upsilon\frac{u_{ij-1}^{2n}-2u_{ij}^{2n}+u_{ij+1}^{2n}}{h_2^2},
\end{gathered}\tag{6}$$

$$\begin{gathered}
\frac{v_{ij}^{2n+1}-v_{ij}^{2n}}{\tau}=-\frac{u_{i+1j}^{2n}v_{i+1j}^{2n}-u_{i-1j}^{2n}v_{i-1j}^{2n}}{2h_1}-\frac{\left(v_{ij+1}^{2n}\right)^2-\left(v_{ij-1}^{2n}\right)^2}{2h_2}-\\
-\frac{1}{\rho}\frac{P_{ij+1}^{2n+1}-P_{ij-1}^{2n+1}}{2h_2}+\\
+\upsilon\frac{v_{i-1j}^{2n}-2v_{ij}^{2n}+v_{i+1j}^{2n}}{h_1^2}+\upsilon\frac{v_{ij-1}^{2n}-2v_{ij}^{2n}+v_{ij+1}^{2n}}{h_2^2},
\end{gathered}\tag{7}$$

а на множині точок $\Omega_{\tau h}^{(2,2n+1)}$:

$$\begin{gathered}
\frac{u_{ij}^{2n+1}-u_{ij}^{2n}}{\tau}=-\frac{\left(u_{i+1j}^{2n+1}\right)^2-\left(u_{i-1j}^{2n+1}\right)^2}{2h_1}-\frac{u_{ij+1}^{2n+1}v_{ij+1}^{2n+1}-u_{ij-1}^{2n+1}v_{ij-1}^{2n+1}}{2h_2}-\\
-\frac{1}{\rho}\frac{P_{i+1j}^{2n+1}-P_{i-1j}^{2n+1}}{2h_1}+\\
+\upsilon\frac{u_{i-1j}^{2n+1}-2u_{ij}^{2n+1}+u_{i+1j}^{2n+1}}{h_1^2}+\upsilon\frac{u_{ij-1}^{2n+1}-2u_{ij}^{2n+1}+u_{ij+1}^{2n+1}}{h_2^2},
\end{gathered}\tag{8}$$

$$\begin{gathered}
\frac{v_{ij}^{2n+1}-v_{ij}^{2n}}{\tau}=-\frac{u_{i+1j}^{2n+1}v_{i+1j}^{2n+1}-u_{i-1j}^{2n+1}v_{i-1j}^{2n+1}}{2h_1}-\frac{\left(v_{ij+1}^{2n+1}\right)^2-\left(v_{ij-1}^{2n+1}\right)^2}{2h_2}-\\
-\frac{1}{\rho}\frac{P_{ij+1}^{2n+1}-P_{ij-1}^{2n+1}}{2h_2}+\\
+\upsilon\frac{v_{i-1j}^{2n+1}-2v_{ij}^{2n+1}+v_{i+1j}^{2n+1}}{h_1^2}+\upsilon\frac{v_{ij-1}^{2n+1}-2v_{ij}^{2n+1}+v_{ij+1}^{2n+1}}{h_2^2},
\end{gathered}\tag{9}$$

на кроці $(2n+2)$ в точках множини $\Omega_{\tau h}^{(1,2n+2)}$:

$$\begin{gathered}\frac{u_{ij}^{2n+2}-u_{ij}^{2n+1}}{\tau}=-\frac{\left(u_{i+1j}^{2n+1}\right)^2-\left(u_{i-1j}^{2n+1}\right)^2}{2h_1}-\\ \frac{u_{ij+1}^{2n+1}v_{ij+1}^{2n+1}-u_{ij-1}^{2n+1}v_{ij-1}^{2n+1}}{2h_2}-\frac{1}{\rho}\frac{P_{i+1j}^{2n+1}-P_{i-1j}^{2n+1}}{2h_1}+\\ +\upsilon\frac{u_{i-1j}^{2n+1}-2u_{ij}^{2n+1}+u_{i+1j}^{2n+1}}{h_1^2}+\upsilon\frac{u_{ij-1}^{2n+1}-2u_{ij}^{2n+1}+u_{ij+1}^{2n+1}}{h_2^2},\end{gathered}\tag{10}$$

$$\begin{gathered}\frac{v_{ij}^{2n+2}-v_{ij}^{2n+1}}{\tau}=-\frac{u_{i+1j}^{2n+1}v_{i+1j}^{2n+1}-u_{i-1j}^{2n+1}v_{i-1j}^{2n+1}}{2h_1}-\\ -\frac{\left(v_{ij+1}^{2n+1}\right)^2-\left(v_{ij-1}^{2n+1}\right)^2}{2h_2}-\frac{1}{\rho}\frac{P_{ij+1}^{2n+1}-P_{ij-1}^{2n+1}}{2h_2}+\\ +\upsilon\frac{v_{i-1j}^{2n+1}-2v_{ij}^{2n+1}+v_{i+1j}^{2n+1}}{h_1^2}+\upsilon\frac{v_{ij-1}^{2n+1}-2v_{ij}^{2n+1}+v_{ij+1}^{2n+1}}{h_2^2},\end{gathered}\tag{11}$$

і в точках $\Omega_{\tau h}^{(2,2n+2)}$:

$$\begin{gathered}\frac{u_{ij}^{2n+2}-u_{ij}^{2n+1}}{\tau}=-\frac{\left(u_{i+1j}^{2n+2}\right)^2-\left(u_{i-1j}^{2n+2}\right)^2}{2h_1}-\\ -\frac{u_{ij+1}^{2n+2}v_{ij+1}^{2n+2}-u_{ij-1}^{2n+2}v_{ij-1}^{2n+2}}{2h_2}-\frac{1}{\rho}\frac{P_{i+1j}^{2n+1}-P_{i-1j}^{2n+1}}{2h_1}+\\ +\upsilon\frac{u_{i-1j}^{2n+2}-2u_{ij}^{2n+2}+u_{i+1j}^{2n+2}}{h_1^2}+\upsilon\frac{u_{ij-1}^{2n+2}-2u_{ij}^{2n+2}+u_{ij+1}^{2n+2}}{h_2^2},\end{gathered}\tag{12}$$

$$\begin{gathered}\frac{v_{ij}^{2n+2}-v_{ij}^{2n+1}}{\tau}=-\frac{u_{i+1j}^{2n+2}v_{i+1j}^{2n+2}-u_{i-1j}^{2n+2}v_{i-1j}^{2n+2}}{2h_1}-\\ -\frac{\left(v_{ij+1}^{2n+2}\right)^2-\left(v_{ij-1}^{2n+2}\right)^2}{2h_2}-\frac{1}{\rho}\frac{P_{ij+1}^{2n+1}-P_{ij-1}^{2n+1}}{2h_2}+\\ +\upsilon\frac{v_{i-1j}^{2n+2}-2v_{ij}^{2n+2}+v_{i+1j}^{2n+2}}{h_1^2}+\upsilon\frac{v_{ij-1}^{2n+2}-2v_{ij}^{2n+2}+v_{ij+1}^{2n+2}}{h_2^2}.\end{gathered}\tag{13}$$

Оскільки в рівняннях значення функції тиску P_{ij}^{2n+1} вже визначені з (5), а значення u_{ij}^{2n}, v_{ij}^{2n} відомі (обчислені при $n>0$ або відомі при $n=0$), то очевидно, що в точках множини $\Omega_{\tau h}^{(1,2n+1)}$ значення u_{ij}^{2n+1} та v_{ij}^{2n+1} знаходяться явно. Після цього, використавши ці значення, явно знайдемо і решту значень на кроці $(2n+1)$. Аналогічно з (10), (11) та (12), (13) знаходимо значення u_{ij}^{2n+2} та v_{ij}^{2n+2}.

Обгрунтування алгоритму

Для наведеного алгоритму проведемо аналіз оцінки головного члена похибки апроксимації, доведемо відповідність алгоритму протіканню фізичних законів, які описують рівняння Нав'є-Стокса.

Теорема 1. *Для задачі (1)–(3) ДС-алгоритм (6)–(13) має сумарну похибку апроксимації* $O\left(\tau^2+h^2\right)$ *і, також, є слабко дисперсійним та слабко дисипативним.*

Доведення. Скористаємося методом першого диференціального наближення (ПДН). Спочатку розглянемо рівняння (1). Складемо різницеві рівняння (8) та (10) в точках множин $\Omega_{\tau h}^{(2,2n+1)}$ та $\Omega_{\tau h}^{(1,2n+2)}$ відповідно, отримаємо

$$\begin{aligned}
&\frac{u_{ij}^{2n+2}-u_{ij}^{2n}}{2\tau}=-\frac{\left(u_{i+1j}^{2n+1}\right)^2-\left(u_{i-1j}^{2n+1}\right)^2}{2h_x}-\frac{u_{ij+1}^{2n+1}v_{ij+1}^{2n+1}-u_{ij-1}^{2n+1}v_{ij-1}^{2n+1}}{2h_y}-\\
&-\frac{1}{\rho}\frac{P_{i+1j}^{2n+1}-P_{i-1j}^{2n+1}}{2h_x}+\\
&+\upsilon\frac{u_{i-1j}^{2n+1}-2u_{ij}^{2n+1}+u_{i+1j}^{2n+1}}{h_x^2}+\upsilon\frac{u_{ij-1}^{2n+1}-2u_{ij}^{2n+1}+u_{ij+1}^{2n+1}}{h_y^2}.
\end{aligned}\tag{14}$$

Розпишемо кожен з доданків (14) в ряд Тейлора в точці $(i,j,2n+1)$:

$$u_{ij}^{2n\pm2}=u_{ij}^{2n+1}\pm\tau u_t{}'+\frac{\tau^2}{2}u_t{}''\pm\frac{\tau^3}{3}u_t{}'''+O\left(\tau^4\right),$$

$$u_{i\pm1j}^{2n+1}=u_{ij}^{2n+1}\pm h_xu_x{}'+\frac{h_x^2}{2}u_x{}''\pm\frac{h_x^3}{3}u_x{}'''+O\left(h_x^4\right)$$

та підставимо знайдені розвинення в рівняння (14), отримаємо

$$\begin{aligned}
&u_t{}'+\frac{\tau^2}{3!}u_t{}'''=-\left[\left(u^2\right)_x{}'+\frac{h_x^2}{3!}\left(u^2\right)_x{}'''\right]-\left[(uv)_y{}'+\frac{h_y^2}{3!}(uv)_y{}'''\right]-\frac{1}{\rho}P_x{}'+\\
&+\upsilon\left[u_x{}''+\frac{h_x^2}{12}u_x{}^{IV}\right]+\upsilon\left[u_y{}''+\frac{h_y^2}{12}u_y{}^{IV}\right].
\end{aligned}$$

Виділимо в отриманому виразі окремо рівняння (1) та залишок:

$$\begin{aligned}
&u_t{}'+\frac{1}{\rho}P_x{}'-\upsilon\left(u_x{}''+u_y{}''\right)+\left(u^2\right)_x{}'+(uv)_y{}'=\\
&=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}-\nu\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial(u)^2}{\partial x}+\frac{\partial\,(uv)}{\partial y}=\\
&=-\frac{\tau^2}{3!}u_t{}'''-\frac{h_x^2}{3!}\left(u^2\right)_x{}'''-\frac{h_y^2}{3!}(uv)_y{}'''+\upsilon\left(\frac{h_x^2}{12}u_x{}^{IV}+\frac{h_y^2}{12}u_y{}^{IV}\right).
\end{aligned}$$

Таким чином, головний член похибки на кроці $(2n+1)$ буде мати вигляд:

$$R_1\left(u\right)=-\frac{\tau^2}{3!}u_t{}'''-\frac{h_x^2}{3!}\left(u^2\right)_x{}'''-\frac{h_y^2}{3!}(uv)_y{}'''+\upsilon\frac{h_x^2}{12}u_x^{IV}+\upsilon\frac{h_y^2}{12}u_y^{IV}.\tag{15}$$

Присутність в головному члені похибки 3-х похідних вказує на дисперсійність різницевого розв'язку, а 4-х — на дисепативність. Але множники h_x^2 та h_y^2 вказують, що ці характеристики мають слабкий вплив на розрахунковий алгоритм. Тепер складемо рівняння (6) та (11):

$$\frac{u_{ij}^{2n+1}-u_{ij}^{2n}}{\tau}+\frac{u_{ij}^{2n+2}-u_{ij}^{2n+1}}{\tau}=-\frac{\left(u_{i+1j}^{2n}\right)^2-\left(u_{i-1j}^{2n}\right)^2}{2h_x}-$$
$$-\frac{\left(u_{i+1j}^{2n+2}\right)^2-\left(u_{i-1j}^{2n+2}\right)^2}{2h_x}-$$
$$-\frac{u_{ij+1}^{2n}v_{ij+1}^{2n}-u_{ij-1}^{2n}v_{ij-1}^{2n}}{2h_y}-\frac{u_{ij+1}^{2n+2}v_{ij+1}^{2n}-u_{ij-1}^{2n+2}v_{ij-1}^{2n}}{2h_y}-\frac{2}{\rho}\frac{P_{i+1j}^{2n+1}-P_{i-1j}^{2n+1}}{2h_x}+$$
$$+\upsilon\frac{u_{i-1j}^{2n}-2u_{ij}^{2n}+u_{i+1j}^{2n}}{h_x^2}+\upsilon\frac{u_{i-1j}^{2n+2}-2u_{ij}^{2n+2}+u_{i+1j}^{2n+2}}{h_x^2}+$$
$$+\upsilon\frac{u_{ij-1}^{2n}-2u_{ij}^{2n}+u_{ij+1}^{2n}}{h_y^2}+\upsilon\frac{u_{ij-1}^{2n+2}-2u_{ij}^{2n+2}+u_{ij+1}^{2n+2}}{h_y^2}. \tag{16}$$

В даному випадку розвинення в ряд Тейлора відбувається в два етапи. Спочатку скористаємося розвиненням за просторовими змінними відносно точок $(i, j, 2n)$ та $(i, j, 2n+2)$, а потім за часом відносно точки $(i, j, 2n+1)$. Тоді вираз

$$R_2(u)=-\frac{\tau^2}{3}u_t{}'''+\tau^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}\right]-\frac{h_x^2}{3}\left(u^2\right)_x{}'''-$$
$$-\frac{h_y^2}{3}(uv)_y{}'''+\upsilon\left(\frac{h_x^2}{6}u_x^{IV}+\frac{h_y^2}{6}u_y^{IV}\right) \tag{17}$$

буде головним членом похибки цієї пари різницевих рівнянь. Перейдемо до рівняння (2). Провівши аналогічні розрахунки, отримаємо відповідні для сум (9)+(11) та (7)+(13) головні члени похибки $R_1(v)$ та $R_2(v)$, які матимуть аналогічний (15) та (17) вигляд та зміст. Тепер проведемо дослідження впливу головних членів похибки на розв'язок. Оскільки $\frac{\partial P}{\partial x}$ та $\frac{\partial P}{\partial y}$ — відомі функції, визначені з рівняння (5), то систему (1)–(3) перепишемо у вигляді:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial (u)^2}{\partial x}+\frac{\partial (uv)}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}\equiv f_1,$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}-\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial (uv)}{\partial x}+\frac{\partial (v)^2}{\partial y}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}\equiv f_2,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

Така задача поставлена коректно і, як відомо [3], в двовимірному випадку розв'язок цієї задачі в L_2 єдиний для всіх правих частин із L_2 і початкових значень з деякого гільбертового простору H. Крім того, цей розв'язок майже всюди дорівнює деякій неперервній функції з часового відрізку $[0, T]$ в просторі H. Отже, доданок $\tau^2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial^2 t}$ в $R_2(u)$ можна вважати похибкою обчислення f_1. Аналогічно для f_2. Доданки, які містять треті просторові похідні, вказують на можливість виникнення обчислювальних осциляцій, а відповідні четверті похідні — на його дисипативні властивості. Множники h_x^2 та h_y^2 при цих доданках вказують на слабку дисипативність та слабку дисперсійність. Даний алгоритм реалізується в 2 кроки, і хоча на кожному кроці похибка є величиною $O\left(\tau + h^2\right)$, проте сумарна апроксимація для всіх рівнянь буде $O\left(\tau^2 + h^2\right)$. $\square$

Для того, щоб показати адекватність на грубих сітках (кроки h_x, h_y та τ не прямують до нуля) різницевої схеми фізичному процесу потрібно записати інтегральний аналог диференціального рівняння, побудувати відповідний йому аналог різницевого рівняння на сітковій множині та порівняти їх. Якщо ці вирази мають один і той же фізичний зміст (закон збереження або його наслідок), то кажуть, що різницева схема буде консервативною. Оскільки для різницевого рівняння Пуассона (5) його консервативність досліджена, наприклад в [6], то нам достатньо дослідити консервативність ДС-алгоритмів (6)–(13). Проінтегрувавши рівняння (1) та (2) по паралелепіпеду зі сторонами Δx, Δy, а потім за часом по проміжку Δt, отримаємо інтегральний наслідок рівнянь кількості руху (рівняння балансу):

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x}\int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y}\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t}\frac{\partial u}{\partial t}dxdydt = -\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x}\int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y}\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t}\frac{\partial (u)^2}{\partial x}dxdydt-$$

$$-\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x}\int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y}\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t}\frac{\partial (uv)}{\partial y}dxdydt+$$

$$+\upsilon\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x}\int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y}\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dxdydt+\upsilon\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x}\int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y}\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}dxdydt-$$

$$-\frac{1}{\rho}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x}\int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y}\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t}\frac{\partial P}{\partial x}dxdydt.$$

Після інтегрування маємо:

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x}\int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y}\left(u\left(x,y,t_0+\Delta t\right)-u\left(x,y,t_0\right)\right)dxdy =$$

$$= -\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t}\int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y}\left(u^2\left(x_0+\Delta x,y,t\right)-u^2\left(x_0,y,t\right)\right)dydt-$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x}\left(u\left(x,y_0+\Delta y,t\right)\upsilon\left(x,y_0+\Delta y,t\right)-u\left(x,y_0,t\right)\upsilon\left(x,y_0,t\right)\right)dxdt+$$
$$+\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t}\int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y}\left(\upsilon\frac{\partial u\left(x_0+\Delta x,y,t\right)}{\partial x}-\upsilon\frac{\partial u\left(x_0,y,t\right)}{\partial x}\right)dydt+$$
$$+\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x}\left(\upsilon\frac{\partial u\left(x,y_0+\Delta y,t\right)}{\partial y}-\upsilon\frac{\partial u\left(x,y_0,t\right)}{\partial y}\right)dxdt-$$
$$-\frac{1}{\rho}\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t}\int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y}\left(P\left(x_0+\Delta x,y,t\right)-P\left(x_0,y,t\right)\right)dydt. \tag{18}$$

Теорема 2. *Схеми ДС-алгоритму (6)–(13) є консервативними.*

Доведення. Виходячи з означення консервативності покажемо, що для нашого різницевого ДС-алгоритму виконується інтегральні закони збереження (наслідок другого закону Ньютону), які притаманні для рівнянь (1) та (2). Проміжки $[x_0,x_0+\Delta x]$, $[y_0,y_0+\Delta y]$, $[t_0,t_0+\Delta t]$ розіб'ємо на M_1, M_2 та N частин довжини h_x, h_y та τ відповідно. Спочатку розглянемо рівняння (1) та відповідні різницеві рівняння (6), (8), (10), (12). Складемо (8) з (10) та (6) з (12):

$$\begin{gathered}\frac{u_{ij}^{2n+2}-u_{ij}^{2n}}{2\tau}=-\frac{\left(u_{i+1j}^{2n+1}\right)^2-\left(u_{i-1j}^{2n+1}\right)^2}{2h_x}-\frac{u_{ij+1}^{2n+1}\upsilon_{ij+1}^{2n+1}-u_{ij-1}^{2n+1}\upsilon_{ij-1}^{2n+1}}{2h_y}+\\+\upsilon\frac{u_{i-1j}^{2n+1}-2u_{ij}^{2n+1}+u_{i+1j}^{2n+1}}{h_x^2}+\upsilon\frac{u_{ij+1}^{2n+1}-2u_{ij}^{2n+1}+u_{ij-1}^{2n+1}}{h_y^2}-\\-\frac{1}{\rho}\frac{P_{i+1j}^{2n+1}-P_{i-1j}^{2n+1}}{2h_x};\end{gathered}\tag{19}$$

$$\begin{gathered}\frac{u_{ij}^{2n+2}-u_{ij}^{2n}}{\tau}=-\frac{\left(u_{i+1j}^{2n}\right)^2-\left(u_{i-1j}^{2n}\right)^2}{2h_x}-\frac{u_{ij+1}^{2n}\upsilon_{ij+1}^{2n}-u_{ij-1}^{2n}\upsilon_{ij-1}^{2n}}{2h_y}-\\-\frac{\left(u_{i+1j}^{2n+2}\right)^2-\left(u_{i-1j}^{2n+2}\right)^2}{2h_x}-\frac{u_{ij+1}^{2n+2}\upsilon_{ij+1}^{2n+2}-u_{ij-1}^{2n+2}\upsilon_{ij-1}^{2n+2}}{2h_y}+\\+\upsilon\frac{u_{i-1j}^{2n}-2u_{ij}^{2n}+u_{i+1j}^{2n}}{h_x^2}+\upsilon\frac{u_{ij+1}^{2n}-2u_{ij}^{2n}+u_{ij-1}^{2n}}{h_y^2}+\\+\upsilon\frac{u_{i-1j}^{2n+2}-2u_{ij}^{2n+2}+u_{i+1j}^{2n+2}}{h_x^2}+\upsilon\frac{u_{ij+1}^{2n+2}-2u_{ij}^{2n+2}+u_{ij-1}^{2n+2}}{h_y^2}-\\-\frac{2}{\rho}\frac{P_{i+1j}^{2n+1}-P_{i-1j}^{2n+1}}{2h_x}.\end{gathered}\tag{20}$$

Ці різницеві рівняння легко привести до дивергентної форми:

$$\frac{u_{ij}^{2n+2}-u_{ij}^{2n}}{2\tau}=-\frac{\left(u_{i+1j}^{2n+1}\right)^2-\left(u_{i-1j}^{2n+1}\right)^2}{2h_x}-\frac{v_{ij+1}^{2n+1}u_{ij+1}^{2n+1}-v_{ij-1}^{2n+1}u_{ij-1}^{2n+1}}{2h_y}-$$
$$-\frac{1}{\rho}\frac{P_{i+1j}^{2n+1}-u_{i-1j}^{2n+1}}{2h_x}+$$
$$+\frac{\upsilon}{h_x}\left[\frac{u_{i+1j}^{2n+1}-u_{ij}^{2n+1}}{h_x}-\frac{u_{ij}^{2n+1}-u_{i-1j}^{2n+1}}{h_x}\right]+$$
$$+\frac{\upsilon}{h_y}\left[\frac{u_{ij+1}^{2n+1}-u_{ij}^{2n+1}}{h_y}-\frac{u_{ij}^{2n+1}-u_{ij-1}^{2n+1}}{h_y}\right]$$

та

$$\frac{u_{ij}^{2n+2}-u_{ij}^{2n}}{\tau}=-\frac{\left(u_{i+1j}^{2n}\right)^2-\left(u_{i-1j}^{2n}\right)^2}{2h_x}-\frac{v_{ij+1}^{2n}u_{ij+1}^{2n}-v_{ij-1}^{2n}u_{ij-1}^{2n}}{2h_y}-$$
$$-\frac{2}{\rho}\frac{P_{i+1j}^{2n+1}-u_{i-1j}^{2n+1}}{2h_x}+$$
$$+\frac{\upsilon}{h_x}\left[\frac{u_{i+1j}^{2n}-u_{ij}^{2n}}{h_x}-\frac{u_{ij}^{2n}-u_{i-1j}^{2n}}{h_x}\right]+\frac{\upsilon}{h_y}\left[\frac{u_{ij+1}^{2n}-u_{ij}^{2n}}{h_y}-\frac{u_{ij}^{2n}-u_{ij-1}^{2n}}{h_y}\right]-$$
$$-\frac{\left(u_{i+1j}^{2n+2}\right)^2-\left(u_{i-1j}^{2n+2}\right)^2}{2h_x}-\frac{v_{ij+1}^{2n+2}u_{ij+1}^{2n+2}-v_{ij-1}^{2n+2}u_{ij-1}^{2n+2}}{2h_y}+$$
$$+\frac{\upsilon}{h_x}\left[\frac{u_{i+1j}^{2n+2}-u_{ij}^{2n+2}}{h_x}-\frac{u_{ij}^{2n+2}-u_{i-1j}^{2n+2}}{h_x}\right]+$$
$$+\frac{\upsilon}{h_y}\left[\frac{u_{ij+1}^{2n+2}-u_{ij}^{2n+2}}{h_y}-\frac{u_{ij}^{2n+2}-u_{ij-1}^{2n+2}}{h_y}\right].$$

Помножимо їх на $2\tau\cdot 2h_x\cdot 2h_y$, підсумуємо від 1 до M_1-1, M_2-1,$N-2$ по всім індексам i, j, n множин $\Omega_{\tau h}^{(1,2n+2)}$ та $\Omega_{\tau h}^{(2,2n+2)}$ відповідно. Після скорочення проміжних доданків одержимо інтегральні суми, які відповідають (18). Отже, одержана рівність виражає інтегральний закон збереження на сітці, а різницева схема (6), (8), (10), (12) є консервативною. Аналогічно встановлюється консервативність різницевого алгоритму для рівняння (2). Таким чином, схеми ДС-алгоритму (6)–(13) є консервативними. □

Висновки

1. В даній роботі, на відміну від [5], побудовано ДС-алгоритм моделювання ізотермічних процесів динаміки в'язкої рідини, записаних у дивергентній формі рівнянь Нав'є-Стокса.
2. В доведених теоремах встановлено консервативність, що вказує на відповідність різницевої моделі фізичним законам, досліджена дисперсійність та дисипативність алгоритму.
3. Розроблений алгоритм дає можливість знаходити чисельні розв'язки початково-крайової задачі, не розв'язуючи систему нелінійних рівнянь.

Література

1. Ладыженская О. А. Математические вопросы вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1970. — 208 с.
2. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1977. — 456 с.
3. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и чисельный анализ. — М.: Мир, 1981. — 408 с.
4. Грищенко А. Е., Марцафей А. С. Об одном двухшаговом алгоритме расщепления в задачах тепломасопереноса // Кибернетика и системный анализ. — 2011. — Вип. №6. — С. 125–131.
5. Грищенко О. Ю., Довбня П. І. Модифікація ДС-алгоритму розв'язування початково-крайових задач для системи рівнянь Нав'є-Стокса // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2011. — № 3(106). — С. 19–26.
6. Самарский А. А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1983. — 616 с.

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, Київ, 01601, Україна.

Надійшла 12.11.2014