

УДК 531.553:531.555

## КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТРАЕКТОРІЇ РУХУ ЦЕНТРА МАСИ ТІЛА, КИНУТОГО ПІД КУТОМ ДО ГОРИЗОНТУ

О. Б. Стеля, Л. І. Потапенко, І. П. Сіренко

**РЕЗЮМЕ.** В роботі розглядається математична модель руху центра мас снаряда, з урахуванням дії балістичних та метеорологічних чинників. Як базова використовується стандартна модель НАТО. Для врахування сили опору повітря використовується закон 1943 року. Наведено результати чисельних розрахунків в порівнянні з даними таблиць стрільби.

### ВСТУП

Для практичних застосувань необхідно мати математичну модель руху снаряда, за допомогою якої можна було б розрахувати траєкторію його польоту з врахуванням дії балістичних та метеорологічних чинників. Відомо, що на тіло, кинуте під кутом до горизонту із заданою швидкістю, діють різноманітні сили, які змушують його відхилятися від початкової траєкторії. Дослідження впливу сил, що діють на снаряд в польоті, є однією з головних задач зовнішньої балістики.

Одним із засновників балістики як науки є Леонард Ейлер. Його балістичні дослідження мають безпосереднє практичне значення і в даний час [1]. У роботах радянських вчених [2–5] на основі рівнянь балістики були сформульовані математичні моделі польоту ракет і снарядів. В традиціях цієї школи зовнішньої балістики найчастіше використовується так звана швидкісна система координат, в якій одна з осей співпадає за напрямом з вектором швидкості центра маси снаряда. Вплив зовнішніх факторів, зокрема вітру, суттєво впливає на траєкторію літального апарата. При чому на пасивній та активній ділянках траєкторії цей вплив суттєво відрізняється. Модель руху літальних апаратів у збуреному середовищі розглядається в роботі [6]. В роботі [7] запропоновано математичну модель руху літальних апаратів, яка дозволяє досліджувати вплив режимів роботи реактивного двигуна на такі параметри, як дальність, час у польоті, точність доставки в задану точку та ін. Також, розглянуто вплив температури реактивного заряду на одиничний імпульс тяги і час роботи двигуна. Розроблено методику врахування впливу вітру на активній і пасивній ділянках траєкторії для літальних апаратів, які стабілізуються різними способами.

В країнах НАТО створено стандарт для математичної моделі (в правосторонній декартовій прив'язаній до Землі системі координат), за якою здійснюються балістичні розрахунки [8].

ЗАГАЛЬНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ЗОВНІШНЬОЇ БАЛІСТИКИ

При побудові комп'ютерної моделі зовнішньої балістики використовувалась система рівнянь, викладена в [8–10]:

$$\frac{du_i}{dt} = -J_i + \frac{\pi\rho d^2 f_L}{8m} [C_{L_0} + C_{L_{\alpha_3}} \alpha_e^2] v^2 \alpha_{e_i} + \frac{\pi\rho d^3 Q_{MP} C_{mag-f}}{8m} (\vec{\alpha}_e \times \vec{v})_i + \Lambda_i - g_i, \quad i = \overline{1,3}, \quad (1)$$

де  $J_i$  — компоненти "вектора прискорення опору повітря",  $u_i$  — компоненти вектора швидкості польоту снаряда,  $w_i$  — компоненти вектора швидкості вітру,  $\vec{v}$  — вектор швидкості снаряда по відношенню до повітря,

$$v_i = u_i - w_i, \quad i = \overline{1,3},$$

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2},$$

$$(\vec{\alpha}_e \times \vec{v}) = \begin{pmatrix} \alpha_{e_2} v_3 - \alpha_{e_3} v_2 \\ \alpha_{e_3} v_1 - \alpha_{e_1} v_3 \\ \alpha_{e_1} v_2 - \alpha_{e_2} v_1 \end{pmatrix}.$$

Перший та другий члени правої частини рівняння (1) — це внесок сил опору повітря та підйомної силою. Третій член — сили Магнуса.  $\Lambda_i$  — компоненти вектора, обумовленого силою Кориоліса

$$\vec{\Lambda} = \begin{pmatrix} -2\Omega[\sin(lat)u_3 + \cos(lat)\sin(AZ)u_2] \\ 2\Omega[\cos(lat)\sin(AZ)u_1 + \cos(lat)\cos(AZ)u_3] \\ -2\Omega[\cos(lat)\cos(AZ)u_2 - \sin(AZ)u_1] \end{pmatrix},$$

$\Omega = 7.29211510^{-5}$  рад/с — швидкість обертання Землі,  $lat$  — широта місця положення гармати,  $AZ$  — азимут напрямку постріла.  $\vec{g}$  — вектор гравітаційного прискорення

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} g_0 \frac{X_1}{R} \\ g_0 \left(1 - \frac{2X_2}{R}\right) \\ g_0 \frac{X_3}{R} \end{pmatrix}, \quad g_0 = 9.80665(1 - \cos(lat)) \text{ м/с}^2,$$

де  $X_1, X_2, X_3$  — координати снаряда,  $R = 6356.766$  м — радіус Землі.  $\vec{\alpha}_e$  — вектор деривації

$$\vec{\alpha}_e = \begin{pmatrix} A(v_2 \frac{du_3}{dt} - v_3 \frac{du_2}{dt}) \\ A(v_3 \frac{du_1}{dt} - v_1 \frac{du_3}{dt}) \\ A(v_1 \frac{du_2}{dt} - v_2 \frac{du_1}{dt}) \end{pmatrix}, \quad A = -\frac{8I_x p}{\pi\rho d^3 (C_{M_\alpha} + C_{M_{\alpha_3}} \alpha_e^2) v^4},$$

де  $C_{D_0}$ ,  $C_{D_{\alpha^2}}$  — нульовий та квадратичний коефіцієнти лобового опору,  $C_{L_0}$ ,  $C_{L_{\alpha^3}}$  — коефіцієнти підйомної сили,  $Q_D$  — фактор відхилення лобового опору,  $f_L$  — фактор підйомної сили,  $p$  — вісьова швидкість обертання снаряда.

Координати снаряда та вісьова швидкість його обертання задовольняють таким рівнянням

$$\frac{dX_i}{dt} = u_i, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (2)$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\pi \rho d^4 p v C_{spin}}{8 I_x}, \quad (3)$$

де  $C_{spin}$  — коефіцієнт сповільнення обертання,  $I_x$  — вісьовий момент інерції снаряда.

Окрім форми запису моделі (1)–(3), рівняння зовнішньої балістики можуть бути записані в іншому вигляді [2, 3]. Основна відмінність форм запису полягає в тому, що шуканими функціями, наприклад, у випадку двох змінних є модуль швидкості  $U$  та кут  $\theta$  між напрямком швидкості та віссю  $OX_1$ , а координати снаряда обчислюються через них. Вважаючи, що на тіло діють тільки дві сили (сила опору повітря та гравітаційна сила) та за відсутністю вітру, система рівнянь записується у вигляді:

$$\frac{dU}{dt} = -J - g_0 \sin \theta, \quad (4)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{g_0 \cos \theta}{U}, \quad (5)$$

де  $J$  — модуль "вектора прискорення опору повітря".

Слід зазначити, що система (4)–(5) еквівалентна системі (1), записаної для двох змінних у випадку відсутності дії підйомної сили, сил Магнуса, Коріоліса та відсутності вітру. В цьому випадку система рівнянь (1) в векторному вигляді може бути записана

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = -\vec{J} - \vec{g}. \quad (6)$$

Вважаючи, що напрямок сили опору повітря протилежний напрямку руху тіла, одержуємо:

$$\vec{J} = (J \cos \theta, J \sin \theta), \quad \vec{u} = (U \cos \theta, U \sin \theta), \quad \vec{g} = (0, g_0).$$

Використовуючи комплексний запис векторів  $\vec{J}$ ,  $\vec{u}$ ,  $\vec{g}$ , одержуємо

$$\vec{J} = J e^{i\theta}, \quad \vec{u} = U e^{i\theta}, \quad \vec{g} = i g_0, \quad (7)$$

де  $i$  — уявна одиниця.

Підставляючи (7) в (6), одержуємо

$$\frac{d(U e^{i\theta})}{dt} = -J e^{i\theta} - i g_0. \quad (8)$$

Після диференціювання у (8)

$$e^{i\theta} \frac{dU}{dt} + iU e^{i\theta} \frac{d\theta}{dt} = -J e^{i\theta} - i g_0.$$

Далі одержуємо

$$\frac{dU}{dt} + iU \frac{d\theta}{dt} = -J - g_0 \sin \theta + i g_0 \cos \theta. \quad (9)$$

Прирівнюючи дійсні та уявні частини (9), одержуємо (4)–(5).

#### ЗАКОН СИЛИ ОПОРУ ПОВІТРЯ

Визначення функції опору повітря для тіл різної форми є ключовим питанням в балістичних дослідженнях. В даній роботі для врахування цієї сили використовувався емпіричний закон, який отримав назву закон 1943 року [3, 11, 12]. Розрахунки більшості таблиць для практичної стрільби здійснені на основі цього закону. У зв'язку з цим та згідно з [11] будемо використовувати вираз

$$J = c H_\tau(y) F(V),$$

де  $y$  — висота над площиною стрільби,  $V$  — швидкість снаряда для нормальних артилерійських умов,  $c$  — балістичний коефіцієнт, який задається так

$$c = \frac{id^2 \cdot 10^3}{m} \frac{\rho_0}{\rho_{0H}},$$

де  $i$  — коефіцієнт форми снаряда,  $\rho_0$  — густина повітря на поверхні Землі в точці пострілу,  $\rho_{0H}$  — густина повітря на поверхні Землі в точці пострілу для нормальних артилерійських умов. Функція

$$F(V) = \frac{\pi}{8} \rho_{0H} \cdot 10^{-3} \cdot V^2 C_x(M) = 4.74 \cdot 10^{-4} V^2 C_x(M)$$

називається закон опору повітря, хоча іноді так називають також залежність  $C_x(M)$ . Тут  $M = V/a$  — число Маха,  $a$  — швидкість звуку.

Вираз

$$H_\tau(y) = \frac{\rho}{\rho_0} = H(y) \frac{\tau}{\tau_0}$$

характеризує залежність опору повітря від висоти, тут  $\rho$  — густина повітря,  $\tau$  — "віртуальна" температура, що враховує вологість повітря,  $\tau_0$  — "віртуальна" температура на поверхні Землі в точці пострілу.

За [11] задамо

$$\frac{\tau}{\tau_0} \approx \frac{\tau}{\tau_{0H}} = \begin{cases} 1 - 2.19 \cdot 10^{-5} y, & y \leq 9300, \\ 0.796 - 2.19 \cdot 10^{-5} (y - 9.3 \cdot 10^3) \times \\ \times [1 - 1.85 \cdot 10^{-4} (y - 9.3 \cdot 10^3)], & 9300 < y \leq 12000, \\ 0.767 = const, & 12000 < y \end{cases}$$

та залежність

$$H(y) = \begin{cases} (1 - 0.0219 \cdot 10^{-3}y)^{4.4}, & y \leq 9300, \\ \frac{0.367}{1 - 0.0275 \cdot 10^{-3}(y - 9.3 \cdot 10^3) [1 - 0.185 \cdot 10^{-3}(y - 9.3 \cdot 10^3)]} \times \\ \times \exp \left[ -2.12(0.194 - \arctg \frac{12 \cdot 10^3 - y}{1.375 \cdot 10^4}) \right], & 9300 < y \leq 12000, \\ 0.253 \cdot \exp [-1.542 \cdot 10^{-4} \cdot (y - 12 \cdot 10^3)], & 12000 < y. \end{cases}$$

Для інтерполяції заданого в табличному вигляді коефіцієнту опору повітря 1943 року  $C_x(M)$  використовується параболічний інтерполяційний сплайн [13]. Перевагою такого способу інтерполяції є представлення табличних даних у вигляді кусково-квадратичної функції неперервної разом зі своєю першою похідною. Обраний сплайн не вимагає задання додаткових умов на вихідні дані і дає можливість визначати значення опору повітря в залежності від числа Маха для всього відрізка інтерполяції. На рис. 1 наведено графік експериментальних та інтерпольованих даних відповідно до закону 1943 року.

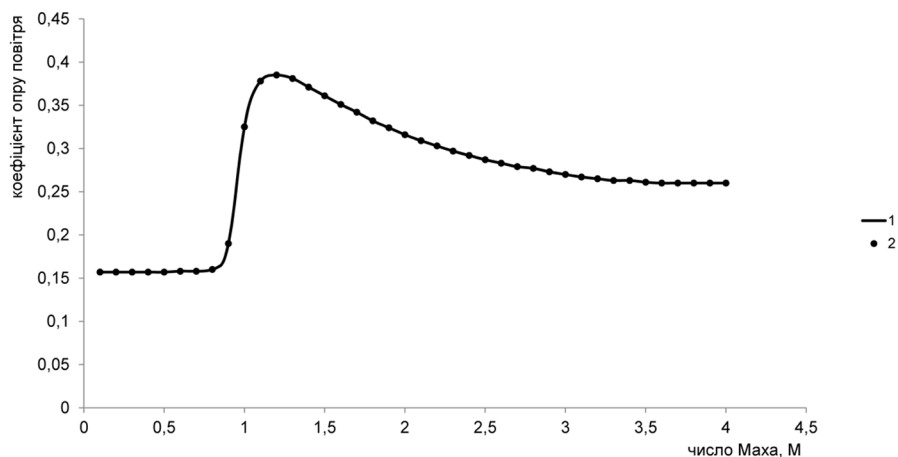


Рис. 1. Інтерполяція коефіцієнту опору повітря закону 1943 р. за допомогою сплайну (1 — значення сплайну, 2 — експериментальні дані)

В реалізованій моделі для  $J_1, J_2, J_3$  використовуються такі вирази

$$J_1 = J \cos \theta \cos \phi, \quad J_2 = J \sin \theta \cos \phi, \quad J_3 = J \sin \phi,$$

де  $\phi$  — кут між напрямом вектора швидкості снаряда та віссю  $OX_1$ .

Таким чином, з еквівалентності постановок задач (1)–(3) та (4)–(5) випливає, що в моделі (1)–(3) можемо використовувати закон 1943 року з покомпонентним представленням ”прискорення опору повітря”.

АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ТА РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

Для розв'язування системи звичайних диференціальних рівнянь використовується чисельний метод Кутта-Мерсона 5-го порядку [14]. Перевагою цього метода над "стандартним" методом Рунге-Кутта 4-го порядку є можливість оцінювати похибку на кожному кроці розрахунків. Це дозволяє визначати необхідний крок дискретизації для серій розрахунків.

При проведенні чисельних розрахунків нам необхідно знаходити такий кут прицілювання  $\theta_0$  при якому місце падіння снаряда буде на відстані  $X_1(T)$  від точки стрільби при висоті місцезнаходження цілі  $X_2(T)$  над площиною стрільби. При цьому час польота снаряда  $T$  є також невідомою величиною.

Розв'язання загальної задачі здійснюється за допомогою метода стрільби [15, 16].

Для перевірки практичної придатності моделі було проведено серію розрахунків з метою дослідження впливу опору повітря на рух снаряда для різних дальностей і висот цілей.

Результати розрахунків порівнювались з таблицями стрільби [17]. В таблиці 1 наведено результати розрахунків (стовпці 3 та 5 таблиці) для різної дальності та дані таблиць стрільби. Траєкторії снаряда одержані шляхом моделювання наведені на рис. 2.

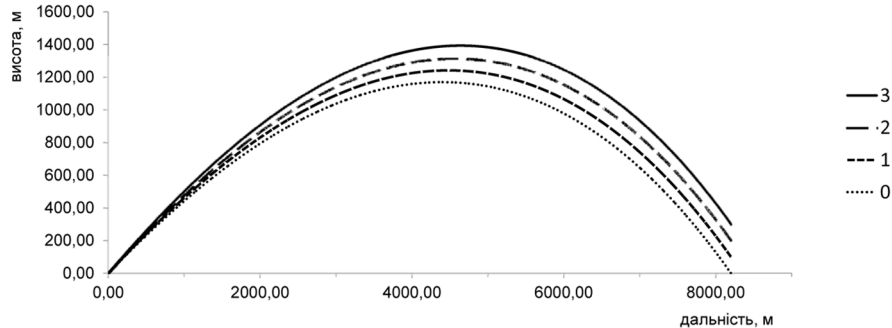


Рис. 2. Траєкторії польоту снаряда для різних висот місцезнаходження цілі (0 — 0 м, 1, — 100 м, 2 — 200 м, 3 — 300 м)

Таблиця 1. Дані таблиць стрільби та результати чисельних розрахунків

Дальність, м	Кут кидання, тис.	Кут обчислений, тис.	Час польоту, сек	Час обчислений, сек
1	2	3	4	5
5200	219	219.5	17	16.8
5400	231	231	18	17.6
5600	242	242.6	18	18.4
5800	254	254.4	19	19.2
6000	266	266.6	20	20
6200	279	279.1	21	20.9
6400	291	291.9	22	21.7
6600	305	305	22	22.6
6800	318	318.4	23	23.5
7000	332	332.3	24	24.4
7200	346	346.6	25	25.4
7400	361	361.4	26	26.4
7600	376	376.7	27	27.3
7800	392	392.7	28	28.4
8000	409	409.3	29	29.4
8200	426	426.8	30	30.6
8400	444	445	32	31.7
8600	463	464.5	33	32.9
8800	483	485	34	34
9000	504	507	35	35.5
9200	528	530.5	36	36.9
9400	555	556	38	38.5
9600	586	585.2	40	40.2
9800	624	624.2	42	42.4

### Висновки

Результати моделювання за створеним програмним забезпеченням показали хорошу узгодженість модельних розрахунків з даними таблиць стрільби. Це дає можливість за допомогою математичної моделі зовнішньої балістика досліджувати, як дію окремих, так і сумарну силу, що впливають на рух снаряда.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Эйлер Леонард. Исследования по баллистике. — Москва: Гос. изд. физ.- мат. лит., 1961. — 228 с.
2. Коновалов А. А., Николаев Ю. В. Внешняя баллистика. — Москва: ЦНИИ информации, 1979. — 228 с.
3. Дмитриевский А. А., Лысенко Л. Н. Внешняя баллистика. — Москва: Машиностроение, 2005. — 607 с.

4. Дмитриевский А. А., Лысенко Л. Н., Богодистов С. С. Внешняя баллистика. — Москва: Машиностроение, 1991. — 640 с.
5. Вентцель Д. А., Окунев Б. Н., Шапиро Я. М. Внешняя баллистика. Ч. I. — Ленинград: Арт. акад. им. Ф. Э. Дзержинского, 1933.
6. Шийко О. М., Полениця П. В., Коплик І. В., Остапова О. П., Авдеева О. М. Модель руху артилерійського снаряда, стабілізованого обертанням. / Системи обробки інформації. — 2010. — Вип. 1 (82). — С. 147–152.
7. Макеев В. И., Ляпа Н. Н., Латин С. П., Трофименко П. Е. Математическая модель динамики полета летательных аппаратов в возмущенной среде. / Electronic Modeling. — 2011. — V. 33. — №6. — P. 19–32.
8. STANAG 4355 JAIS (Edition 3) — The Modified Point Mass and Five Degrees of Freedom Trajectory Models. — NATO Standardization Agency, 2009. — 95 p.
9. Balon R., Komenda J. Analysis of the 155 mm ERFV/BB projectile trajectory. // Advances in MT. — 2006. — №1. — P. 92–114.
10. Baranowski L. Feasibility analysis of the modified point mass trajectory model for the need of ground artillery fire control systems. // Journal of theoretical and applied mechanics. — 2013. — V. 51, №3. — P. 511–522.
11. Ефремов А. К. Аппроксимация закона сопротивления воздуха 1943 г. / Наука и образование. Научное издание МГТУ им. Баумана. — 2013. — №10. — С. 269–284.
12. Шапиро Я. М. Внешняя баллистика. — Москва: Оборонгиз, 1946.
13. Стеля О.Б. Про існування одного параболічного сплайну. / Журн. обчисл. та прикл. матем. — 1997. — №1(81). — С. 62–67.
14. Арушанян О. Б., Залеткин С. Ф. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране — Москва: Изд-во МГУ, 1990. — 336 с.
15. На Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач — М.: Мир, 1982. — 296 с.
16. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений— М.: Наука, 1986. — 288 с.
17. Збірник таблиць стрільби: навчальний посібник / В. М. Петренко, В. Є. Житник, В. І. Макеєв та ін. — Суми: Сумський державний університет, 2011. — 300 с.

ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРНЕТИКИ, КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, УКРАЇНА.

Надійшла 06.11.2014