Журнал обчислювальної та прикладної математики | **2014, №3(117)** | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 518.83

ВЕКТОР ШЕПЛИ КАК СПОСОБ СПРАВЕДЛИВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

С. И. Доценко

Резюме. В статье дан краткий обзор математических результатов, которые легли в основу нобелевской премии по экономике за 2012 год. Рассмотрены основные положения теории кооперативных игр, Вектор Шепли рассмотрен как механизм справедливого распределения доходов и расходов. Рассмотрено применение механизма справедливого распределения для различных задач исследования операций, таких, как задача о банкротстве, задача о назначениях и других.

ВВЕДЕНИЕ

В 2012 году Нобелевская премия по экономике была присуждена американским ученым Алвину Роту и Ллойду Шепли за "Теорию стабильных размещений и практику формирования рынков". Необычность данной работы заключается в том, что она исследует так называемые некоммерческие рынки, на которых участвующие в них агенты борются за собственные интересы, но при этом на рассматриваемых рынках отсутствуют деньги. Ключевым понятием данной работы, получившей нобелевскую премию, является алгоритм Гейла-Шепли, при помощи которого находится стабильное распределение на некоммерческих рынках. Суть алгоритма и примеры его применения были рассмотрены в [1].

В обзоре нобелевского комитета по данной премии упоминается понятие вектора Шепли как "прочие заслуги" и является как бы второстепенным. Однако понятие "вектор Шепли" пользуется гораздо большей известностью, чем алгоритм Гейла-Шепли. Это понятие стало ключевым в прикладной математике и экономической теории и возникает в задачах справедливого распределения доходов и расходов. За исследование способов справедливого распределения ряд экономистов стал называть Ллойда Шепли "социалист" или "коммунист", что на самом деле не имеет отношения к действительности и является не более, чем навешиванием ярлыков.

Ллойда Шепли принято считать основоположником теории кооперативных игр. В отличии от некооперативных игр, в которых каждый игрок выбирает стратегию, исходя из своих эгоистических мотивов, стремится максимизировать собственный выигрыш и безразличен к выигрышам остальных игроков, в кооперативной модели игроки (или агенты) действуют сообща, стремясь максимизировать суммарный выигрыш. Конфликт же возникает на этапе дележа полученного суммарного выигрыша. Каждый из игроков может претендовать на определенную часть общего выигрыша, аргументируя свой вклад в общие усилия при его получении.

Далее, дадим основные определения и на простых примерах рассмотрим основные понятия кооперативной теории игр. Пусть N — множество игроков, n — их количество.

Определение 1. Коалиция — подмножество множества игроков. Большая (Гранд) коалиция — это множество N всех игроков.

Для кооперативной игры задается отображение $2^N \to R$ из множества всех коалиций в множество действительных чисел, которое носит название характеристической функции игры.

Характеристическая функция V каждой коалиции ставит в соответствие совместный заработок ее членов. Характеристическая функция в принципе может быть отрицательной (распределение затрат), но чаще она неотрицательная. При этом всегда предполагается, что пустая коалиция ничего не зарабатывает и никому ничего не должна, т. е. $V(\phi) = 0$.

Пример 1. У Пети и Васи есть по одному кроссовку, а у Коли шнурки.

Один кроссовок ничего не стоит. Пара кроссовок без шнурков стоит 300 грн. Пара кроссовок со шнурками стоит 350 грн. Шнурки можно продать отдельно за 20 грн.

Тогда характеристическая функция имеет вид:

V(П)=V(В)=0,   V(К)=20,   V(П,В)=300,

V(П,К)=V(В,К)=20,   V(П,В,К)=350.

Интуитивно ясно, что Пете, Васе и Коле надо объединиться, продать весь комплект и поделить деньги. Но как? Следующим ключевым понятием является *ядро игры.*

Допустим, что большая коалиция решила каким-то образом распределить $V(N)$, то есть $x_1 + x_2 + \dots x_n \leq V(N)$.

Эффективность распределения — это отсутствие потерь. Распределение называется эффективным, если распределена вся доступная сумма, т. е.

$$x_1 + x_2 + \dots x_n = V(N).$$

Стабильность — это отсутствие у игроков сепаратистских тенденций, т. е. для любой коалиции S выполняется $\sum_{i \in S} x_i \geq V(S)$.

Ядро игры — множество всех возможных эффективных и стабильных распределений.

Согласно определения, ядро — это множество точек в векторном пространстве R^n, удовлетворяющих одному равенству и нескольким неравенствам. Ядро может иметь одну точку, бесконечно много точек или быть пустым (как в задаче линейного программирования). Ядро игры может быть пусто, что иллюстрирует следующий простой пример.

1. Пример пустого ядра — игра в носки

У Пети, Васи и Коли есть по одному носку. Пару носков можно продать за 10 грн., а один носок ничего не стоит. Здесь

V(П)=V(В)=V(К)=0, V(П,В)=V(П,К)=V(В,К)=10, V(П,В,К)=10.

Ядро игры должно удовлетворять соотношениям

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10,$$
$$x_1 + x_2 \geq 10,$$
$$x_1 + x_3 \geq 10,$$
$$x_2 + x_3 \geq 10,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Складывая три неравенства имеем: $x_1 + x_2 + x_3 \geq 15$. Что противоречит равенству.

Определение 2. Вкладом игрока i в коалицию S ($i \notin S$) называется величина $V(S \cup i) - V(S)$ и обозначается $Add(i, S)$.

Зафиксируем некоторую перестановку игроков. Для данной перестановки заработком каждого игрока назовем его вклад в коалицию, состоящую из предыдущих игроков. Ясно, что заработок может зависеть от порядка игроков в перестановке.

Например при игре в продажу кроссовок при перестановке (Петя, Вася, Коля) Петя Вася и Коля зарабатывают 0, 300 и 50, а при перестановке (Коля, Вася, Петя) — Петя — 20, Вася — 0, Коля — 330.

Вектор Шепли — это вектор заработков игроков, усредненный по всем возможным $n!$ перестановкам

$$Sh(V) = \frac{1}{n!} \sum_{n_j} (add(1, \Pi_j), \ldots, add(n, \Pi_j)).$$

Таблица вычисления вектора Шепли для игры в продажу кроссовок имеет вид:

	П	В	К
(П,В,К)	0	300	50
(П,К,В)	0	300	20
(В,П,К)	300	0	50
(В,К,П)	330	0	20
(К,П,В)	0	330	20
(К,В,П)	330	0	20
$\sum$	960	960	180
Шепли	160	160	30

V(П)=V(В)=0, V(К)=20, V(П,В)=300, V(П,К)=V(В,К)=20, V(П,В,К)=350.

При исследовании свойств ядра возникают такие вопросы.

При каких условиях ядро не пусто?

Когда вектор Шепли принадлежит ядру?

Какие свойства вектора Шепли?

Пусть каждой коалиции S ставится в соответствие число $\lambda_S \in [0;1]$, которое называется весом коалиции.

Характеристическим вектором коалиции e^S называется вектор $\vec{x}$ с n компонентами $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $x_i = \chi(i \in S)$ — индикатор принадлежности множеству S. Например, $N = \{1;2;3\}$, $e^{(1;3)} = (1;0;1)$, тогда $e^N = (1, \dots 1)$ — характеристический вектор большой коалиции, состоящий из n единиц.

Определение 3. Набор весов называется $\lambda_S \geq 0$ сбалансированным, если $\sum_S \lambda_S \, e^S = e^N$.

Например,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1/2, \lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{23} = 1/8, \lambda_{123} = 1/4$$

— сбалансованный набор весов, поскольку

$$\frac{1}{2}(1,0,0) + \frac{1}{2}(0,1,0) + \frac{1}{2}(0,0,1) + \frac{1}{8}(1,1,0) + \frac{1}{8}(1,0,1) +$$

$$+\frac{1}{8}(0,1,1) + \frac{1}{4}(1,1,1) = (1,1,1).$$

Критерий существования ядра был получен независимо в 1963 г. О.Бондаревой и в 1966 г. Л.Шепли и получил название теоремы Бондаревой.

Теорема Бондаревой (Бондарева, 1963; Шепли, 1966, [2],[3])

Ядро игры не пусто тогда и только тогда, когда для любого сбалансированного набора весов справедливо неравенство

$$\sum_S \lambda_s V(s) \leq V(N).$$

Следует заметить, что данная теорема является следствием первой теоремы двойственности (для задач линейного программирования): если одна из пары двойственных задач имеет решение, то и другая задача имеет решение, причем значения целевых функций совпадают.

Условие теоремы Бондаревой часто бывает трудно проверить, поскольку невозможно перебрать все возможные сбалансированные наборы весов. Чаще оно бывает полезно для доказательства того, что ядро пусто, поскольку в этом случае просто достаточно построить контрпример.

Более удобными для проверки являются достаточные условия существования ядра.

Определение 4. Игра называется супермодулярной (выпуклой), если для любых коалиций S, T выполнено условие

$$V(S \cup T) + V(S \cap T) \geq V(S) + V(T)$$

Определение 5. Игра имеет эффект снежного кома (snowball effect), если справедливо:

$$V(K \cup i) - V(K) \geq V(L \cup i) - V(L).$$

"Эффект снежного кома" означает, что если одна коалиция включает другую, то вклад игрока в такую коалицию будет не меньше. Данная ситуация соответствует образному сравнению, что к большему снежному кому снег прилипает лучше, чем к меньшему.

Оказывается, что условия супермодулярности и снежного кома равносильны и являются достаточными условиями существования ядра.

Для сбалансированной и нормированной игры трех лиц, т. е.

$$V(1) = V(2) = V(3) = 0,\ V(1,2,3) = 1,$$

условие Теоремы Бондаревой имеет вид:

$$\lambda_{12}V(1,2) + \lambda_{13}V(1,3) + \lambda_{23}V(2,3) + \lambda_{123} \leq 1,$$

что равносильно неравенству $V(1,2) + V(1,3) + V(2,3) \leq 2$ (*), а эффект снежного кома эквивалентен системе неравентств

$$\begin{cases} V(1,2) + V(1,3) \leq 1 \\ V(1,2) + V(2,3) \leq 1 \quad (**) \\ V(1,3) + V(2,3) \leq 1. \end{cases}$$

Очевидно, (**) является подмножеством (*).

Теорема 1. *Если ядро игры не пусто, то оно включает в себя вектор Шепли.*

Теорема 2. *Ядро супермодулярной игры — это многогранник с вершинами в* $(Add(1,\pi), Add(2,\pi), \ldots Add(n,\pi))$*, где* n *— все возможные перестановки. Этот многогранник имеет* $n!$ *вершин (некоторые вершины могут сливаться).*

Шепли показал, что в этом случае вектор Шепли является центром масс многогранника.

Проиллюстрируем это утверждение на следующем примере. Рассмотрим кооперативную игру "распределение потока" (рис. 1). Пусть каждый игрок является владельцем одной трубы и выигрыш коалиции равен величине максимального потока из источника в сток. Очевидно, что D является "болваном". Исключаем его из рассмотрения, для остальных игроков строим ядро и вектор Шепли

$$V(A) = V(B) = V(C) = 0,$$

$$V(A,B) = 2,\ V(A,C) = 4,\ V(B,C) = 0,\ V(A,B,C) = 6.$$

Ядро игры и его проекция на плоскость $(x1, x2)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 = 6, &\quad x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 + x_2 \geq 2, &\quad x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_3 \geq 4, &\quad x_1 + x_2 \geq 6, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0, &\quad x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

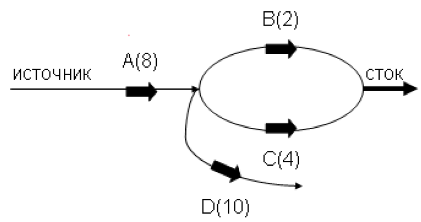

Рис. 1

Здесь ABC сливается с ACB, а BCA с CBA. В результате ядро представляет собой паралелограмм вершинами $(2, 0, 4)$, $(0, 2, 4)$, $(4, 2, 0)$, $(6, 0, 0)$, а вектор Шепли $(3, 1, 2)$ является центром параллелограмма. Проекция ядра на плоскость изображена на рис. 2.

Таблица вычисления вектора Шепли имеет вид:

	П	В	К
ABC	0	2	4
ACB	0	2	4
BAC	2	0	4
BCA	6	0	0
CAB	4	2	0
CBA)	6	0	0
$\sum$	18	16	12
Шепли	3	1	2

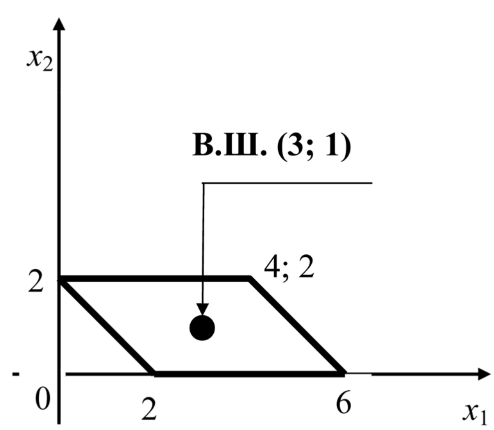

Рис. 2

2. Свойства вектора Шепли

Определение 6. Игрок называется болваном (dummy), ели его вклад в любую коалицию равен нулю.

1. Вектор Шепли эффективен (т. е. сума його компонент равна $V(N)$).

2.Линейность:

а) пусть $V : (2^N - 1) \to R$, $W : (2^N - 1) \to R$ — две разные игры, заданные на одном множестве игроков;

б) пусть игре V отвечает вектор $\vec{x}_V$, игре W — вектор $\vec{x}_W$.

Тогда игре $(V + W)$ отвечает вектор $\vec{x}_V + \vec{x}_W$.

Игре $\alpha\vec{V}$ отвечает вектор $\alpha\vec{x}_V$.

3.Справедливость:

а) симметричность — одинаковые игроки имеют одинаковые компоненты в векторе Шепли;

б) монотонность — если игрок начинает вносить больший вклад в любую коалицию, то это приводит к увеличению его компоненты в векторе Шепли;

в) болваны получают ноль.

Теорема 3. *Единственным распределением, удовлетворяющим условиям эффективности, линейности, симметричности и "болваны получают ноль" является вектор Шепли.*

3. Вычисление вектора Шепли для игры с затратами

Оказывается, что игры с затратами (т. е. с отрицательными значениями характерис тической функции) можно путем эквивалентных преобразований свести к игре с неотрицательной характеристической функцией, положив

$$U(S) = V(S) - \sum_{i \in S} V(i),$$

тогда значение характеристической функции для любой коалиции, состоящей из одного игрока, по определению равно нулю.

Процедура приведения является аналогом аффинного преобразования в алгебре. При этом форма ядра не меняется, происходит только его параллельный перенос в векторном пространстве. Все свойства игры при приведении не меняются, подобно тому, как не меняются точки экстремума при добавлении к функции константы.

Для приведенной игры трех игроков формула вычисления компонент вектора Шепли имеет простой вид (похожий на формулу Симпсона):

$$Sh(A) = \frac{1}{6}\left(V(A,B) + V(A,C) + 2V(A,B,C) - 2V(B,C)\right).$$

Компоненты вектора для других игроков считаются циклической перестановкой.

В 1984 году Aumann и Masher ([4]) дали экономическую интерпретацию задачи о банкротстве на основе текстов Талмуда.

Спор двух человек из-за имущества. Пусть два человека претендует на имущество (200 у.е.). Первый претендует на все (200), а второй только на половину (100). Раввин признал претензии обоих правомерными. Как разделить имущество?

Талмуд приписывает отдать 3/4 (т. е. 150) первому претенденту и 1/4 (т. е. 50) второму, руководствуясь принципом уступок (здесь неявно присутствует общая формула дележа).

Пусть первый претендент забирает все — значит он не уступает второму ничего.

Пусть второй претендент забирает половину, значит он уступает первому половину (100).

Каждый из общей суммы получает уступку (100 и 0), а остаток делится поровну (50 и 50). Оказывается, что рассмотренный принцип дележа для двух претендентов полностью совпадает с принципом, основанном на векторе Шепли. Пусть претензии заявляются поочередно и удовлетворяются полностью (если остаточной суммы достаточно) или частично (если остаточной суммы недостаточно, выдается вся доступная сумма). Согласно принципу построения вектора Шепли, следует найти значения выплат, усредненных по всем возможным перестановкам порядка заявления претензий.

А претендует на 200, В на 100. Доступно 200. Таким образом, А получает 150, В получает 50 (рис. 3).

На графике (рис. 3) показаны суммы, выплачиваемые претендентам, заявив претензии на 200 и 100 единиц соответственно. По оси абсцисс отложена доступная для дележа сумма (резервный фонд). Интересно, что на начальном этапе графики сливаются, т. е. при небольшом значении (до 100) резервный фонд делится между претендентами поровну.

	A	B
(A,B)	200	0
(B,A)	100	100
Сумма	300	100
Среднее	**150**	**50**

Для случая трех претендентов возможные варианты раздела в талмуде носят рекомендательный характер, без аргументации механизма раздела.

4. Раздел имущества между тремя женами

У человека было три жены. Их наследство в брачном контракте было оговорено в количестве 100, 200 и 300 у. е. соответственно. После смерти мужа оказалось, что наличной суммы недостаточно, чтобы выплатить наследство всем женам. Талмуд предлагает три варианта дележа в случаях, когда наличная сумма составляет 100, 200 и 300 у. е. Оказалось, что в двух случаях из трех дележ соответствовал вектору Шепли.

	A(100)	B(200)	C(300)
100, совпадает	33.33	33.33	33.33
200, Т/Ш	50/33.33	100/80.33	150/80.33
300, совпадает	150	100	50

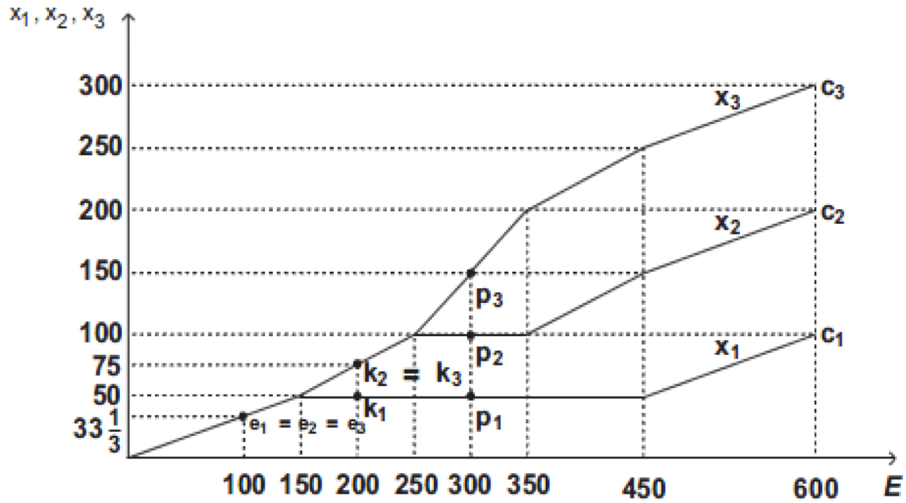

Рис. 3

Данная задача в настоящее время является актуальной при разделе имущества субъекта, признанного банкротом между кредиторами. При расчетах приняты различные механизмы, которые могут отличаться от механизма Шепли, однако они подобны ему по сути и графики выплат претендентам также имеют кусочно-линейный вид.

5. Вектор Шепли и справедливое распределение на рынке труда

Классическая задача о назначениях формулируется следующим образом. Пусть имеется n работников и n работ и пусть задана матрица эффективностей, элемент C_{ij} которой равен эффективности от использования i-го работника на j-й работе. Пусть каждый работник получает зарплату, пропорциональную эффективности выполняемой работы, на которую он назначен.

Оказывается, что в таком случае, при достижении максимальной эффективности не всегда соблюдается справедливость ([5]). Рассмотрим простой пример. Пусть имеется два работника (A и B) и две работы (1 и 2).

		Работы
		1 2
Работники	A B	$\begin{pmatrix} 6^* & 2 \\ 7 & 5^* \end{pmatrix}$

Очевидно, что назначение А на 1-ю работу, а В на 2-ю дает суммарную эффективность $6 + 5 = 11$, что превосходит $7 + 2 = 9$ (см. рис 4). Таким образом 1-й работник получает 6, а 2-й 5. Хотя В безусловно лучше А (поскольку он выполняет лучше обе работы), он получает меньше.

Рассмотрим другой пример.

		Работы
		1 2 3
Работники	A B C	$\begin{pmatrix} 9 & 7 & 5^* \\ 10^* & 8 & 3 \\ 4 & 6^* & 2 \end{pmatrix}$

Оптимальное решение — назначить А на 3-ю, В на 1-ю, С на 2-ю работу. При этом суммарный заработок равен $5+10+6 = 21$. При таком совокупно оптимальном назначении возникают такие несправедливости:

1) В и С в выигрыше, они назначены на лучшие свои работы, а А в проигрыше, он назначен на худшую свою работу

2) А лучше С но зарабатывает меньше $(5 < 6)$.

Применим теорию Шепли для нахождения механизма перераспределения.

Пусть коалиция состоит из k работников. Выделим из n работ подмножество из k работ и решим задачу о назначениях $k \times k$.

Под выигрышем коалиции, состоящей из данных k работников, будем понимать значение максимума задачи о назначениях $k \times k$, усредненное по всем C_n^k возможным вариантам выбора k работ из n.

$$V(A) = \frac{9+7+5}{3} = 7;\ V(B) = \frac{10+8+3}{3} = 7;\ V(C) = \frac{4+6+2}{3} = 4;$$

$$V(A,B) \sim \begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 \\ 10 & 8 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 9^* & 7 \\ 10 & 8^* \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 9 & 5^* \\ 10^* & 3 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 5^* \\ 8^* & 3 \end{pmatrix} \sim \frac{17+15+13}{3} = 1.5$$

Аналогично

$$V(A,C) \sim \begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \sim \frac{15+11+11}{3} = 12\frac{1}{2},$$

$$V(B,C) \sim \begin{pmatrix} 10 & 8 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \sim \frac{16+12+10}{3} = 12\frac{2}{3},$$

$V(A,B,C) = 21$ (эта задача была решена раньше).

Строим таблицу и вычисляем вектор Шепли

	A	B	C
A, B, C	7	8	6
A, C, B	7	5 1/3	8 2/3
B, A, C	8	7	6
B, C, A	8 1/3	7	5 2/3
C, A, B	8 1/3	8 2/3	4
C, B, A	8 1/3	8 2/3	4
$\sum$	47	44 2/3	34 1/3
Шепли	7.83	7.45	5.72
Номинальная выплата	5	10	6
Дотация (налог)	+2.83	-2.55	-0.28

Несколько иным образом решается задача о назначениях с изначальным предписанием работ (задача обмена машинами). Напомним, что в алгоритме Гейла-Шепли рассматривалось две модификации обмена домами — для случая, когда жильцы имеют право владения домами или не имеют его).

Пусть, согласно некоторого предписания, каждый работник назначен на работу и при этом не достигается суммарная эффективность. В этом случае будем считать, что работа, на которую он назначен, принадлежит ему по праву собственности. Тогда, очевидно, каждый из работников согласен сменить работу, если его новая зарплата плюс компенсация будет большей, чем старая. В этом случае под заработком коалиции из k работников будем понимать оптимальное значение решения задачи о назначениях $k \times k$ для данных k работников и объединенного множества (их) работ (каждый работник приносит в коалицию свою работу).

В этом случае

$$V(A) = 9, V(B) = 8, V(C) = 2,$$

$$V(A, B) \sim \begin{pmatrix} 9^* & 7 \\ 10 & 8^* \end{pmatrix} \sim 17,$$

$$V(A, C) \sim \begin{pmatrix} 9^* & 5 \\ 4 & 2^* \end{pmatrix} \sim 11,$$

$$V(B, C) \sim \begin{pmatrix} 8^* & 3 \\ 6 & 2^* \end{pmatrix} \sim 10,$$

$$V(A, B, C) = 21.$$

И расчетная таблица вектора Шепли имеет вид:

	A	B	C
A, B, C	9	8	4
A, C, B	9	10	2
B, A, C	9	8	4
B, C, A	11	8	2
C, A, B	9	10	2
C, B, A	9	10	2
$\sum$	56	54	16
Шепли	9 1/3	9	2 2/3
Прежний заработок	9	8	8
Дотация	+1/3	+1	+2/3

Литература

1. Доценко С. И. Математические модели стабильных размещений // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2012. — № 2(112) — С. 3–13.
2. Бондарева О. Н. Некоторые применения методов линейного программирования к теории кооперативных игр // Проблемы кибернетики. — 1963. — Т. 10. — С. 119–140.
3. Shapley, L. S. On balanced sets and cores // Naval Research Logistics Quarterly. — 1967. — V. 14. — P. 453–460.
4. Aumann R., Maschler M. Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud // Journal of economic theory. — 1985. — V. 36. — P. 195–213.
5. Sanchez-Sanchez F. A salary system for the assignment problem //Economics Bulletin.- 2004. — V. 3, № 5. — P. 1–9.
6. Roth A., Shapley L. Scientific background. Stable allocations and the practice of market design // Advanced information on Nobel prize in economics. — http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economic-sciences/

Факультет кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченка, ул. Владимирская, 64, Киев, 01601, Украина.

Поступила 10.11.2013