Журнал обчислювальної та прикладної математики 2011, №3(106) Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.6

ПРО ІНТЕРПРЕТАЦІЮ ДАНИХ СПОСТЕРЕЖЕНЬ ТОЧКОВИХ ДЖЕРЕЛ НА ФОНІ РОЗПОДІЛЕНОГО ДЖЕРЕЛА ЗА ДАНИМИ СКІНЧЕННОЇ МНОЖИНИ ДАТЧИКІВ

В. С. Касьянюк

Резюме. В роботі розглянуто задачу визначення кількості і координат мерехтливих точкових джерел на фоні розподіленого джерела (фон також визначається) за даними скінченної множини датчиків (рецепторів). Вважається, що дані спостережень відомі з випадковими похибками. Для вирішення задачі застосовано алгоритми багатоканальної просторово-часової обробки та методи парето-оптимального оцінювання. Будуються оцінки розподіленого джерела з одночасно незменшуваними рівнем шумового фону (дисперсією) та величиною операторної нев'язки, породженої неповнотою даних.

Вступ

Широкий клас задач обробки і інтерпретації вимірювань і спостережень в гідро- і радіолокації, медичній діагностиці, геомагнітній і гравітаційній розвідці корисних копалин, ядерній фізиці та ін. зводиться до задачі спостереження (вимірювання) поля (або процесу) $u(x)$ за допомогою скінченного числа датчиків (рецепторів) з відомими характеристиками напрямленості $g_k(x)$. Результати вимірювань зв'язані із спостережуваним полем через співвідношення

$$y_k = \int\limits_D g_k(x)u(x)dx + \nu_k,\ k = 1, ..., M, \tag{1}$$

$D \subset R^n$, ν_k, $\ k = 1, ..., M$ — похибки вимірювань.

Задача інтерпретації даних спостережень полягає в тому, щоб за даними y_k, $\ g_k(x)$ і інформацією про похибки ν_k оцінити або саме поле $u(x)$, або результат вимірювання поля $u(x)$ деяким приладом із заданими характеристиками. В математичному плані (1) є системою інтегральних рівнянь Фредгольма 1 роду спеціального вигляду з випадковими похибками в правих частинах. Такого роду задачі належать до класу некоректних, і підхід до їх вирішення в значній мірі залежить від вибору апріорної інформації про розв'язок. Наприклад, методи регуляризації А. Н. Тихонова [1] , як правило, виходять із припущення належності шуканого розв'язку до компакту, методи редукції Ю. П. Питьєва [2] виходять з фізичности задачі і оцінюють не сам спостережуваний об'єкт, а результат його вимірювання деяким приладом (можливо, гіпотетичним) із заданими характеристиками (редукція вимірювань до виходу заданого приладу).

В даній роботі розглядається випадок, коли спостережуване поле має певну структуру: на фоні розподіленого в області D джерела спостерігається скінченна множина мерехтливих точкових джерел. Такі задачі поширені в радіолокації, радіоастрономії, геомагнітній та радіаційній розвідці та інших прикладних областях. В роботі запропоновано алгоритми визначення кількості і координат точкових джерел з наступним оцінюванням розподіленого джерела при умові одночасної мінімізації за Парето шумового фону шуканої оцінки і її операторної нев'язки, породженої неповнотою даних інтерпретації.

1. Постановка задачі

Розглядається поле , породжене розподіленим в області D джерелом $u(x)$ і N точковими джерелами з координатами x_j і амплітудами $A_j,\ j = 1, ..., N$

$$\tilde{u}(x) = u(x) + \sum_{j=1}^{N} A_j \delta(x - x_j), \tag{2}$$

$\delta(x)$ — аналог $\delta-$ функції Дірака для області D, що задовольняє рівності $\int\limits_D r(x)\delta(x-\xi)dx = r(\xi),\ \xi \in D$ для будь-якої неперервної в D функції $r(x)$. Поле $\tilde{u}(x)$ спостерігається M рецепторами з характеристиками напрямленості $g_k(x),\ k = 1, ..., M$ протягом Q тактів, фіксуючи Q кадрів таким чином, що $g_k(x_j)$ в цих кадрах залишаються незмінними, а $A_j(q)$ і $\nu_k(q)$ змінюються випадковим чином

$$\begin{gathered} u_k(q) = \int\limits_D g_k(x)u(x)dx + \sum_{j=1}^{N} A_j(q) g_k(x_j) + \nu_k(q), \\ k = 1, ..., M, \quad q = 1, ..., Q \end{gathered} \tag{3}$$

(багатоканальна просторово-часова обробка даних). Тут всі функції і величини комплекснозначні, $A_j(q)$ і $\nu_k(q)$ — випадкові; вважається, що амплітудні і шумові спотворення некорельовані між собою, стосовно випадкового вектора похибок вимірювань $\nu(q) = (\nu_1(q), ..., \nu_M(q))^T$ відомо, що його середнє дорівнює нулю, а кореляційна матриця $R_\nu(q)$ невироджена, є ермітовою і додатньо визначеною.

Задача інтерпретації даних спостережень (3) полягає в наступному: за даними $u_k(q)$, $g_k(x)$, R_ν, $k = 1, ..., M,\ q = 1, ..., Q$ потрібно визначити величину N, координати $x_j,\ j = 1, ..., N$ і фонове джерело $u(x)$, $x \in D$ у припущенні, що характеристики $g_k(x)$, $k = 1, ..., M$ стабільні.

2. Методи інтерпретації даних спостережень точкових джерел на фоні розподіленого джерела

Розглянемо спочатку задачу пошуку величин N і x_j, $j = 1, ..., N$. Для цього проведемо такі перетворення: віднімемо від кожної з рівностей (3) для $q = 2, 3, ..., Q$ рівність

$$u_k(1) = \int\limits_D g_k(x)u(x)dx + \sum_{j=1}^{N} A_j(1)g_k(x_j) + \nu_k(1).$$

Отримаємо

$$\begin{aligned} u_k(q) - u_k(1) = \sum_{j=1}^{N}(A_j(q) - A_j(1))g_k(x_j)+ \\ +(\nu_k(q) - \nu_k(1)),\ k = 1, ..., M,\ q = 2, ..., Q. \end{aligned} \tag{4}$$

Введемо позначення

$$v(q) = ((u_1(q) - u_1(1)), ..., (u_M(q) - u_M(1)))^T,$$
$$B_j(q) = A_j(q) - A_j(1),\ j = 1, ..., N,$$
$$\mu(q) = ((\nu_1(q) - \nu_1(1)), ..., (\nu_M(q) - \nu_M(1)))^T$$

і перепишемо (4) у вигляді

$$v_k(q) = \sum_{j=1}^{N} B_j(q)g_k(x_j) + \mu_k(q),\ q = 2, ..., Q. \tag{5}$$

Скориставшись ідеєю роботи [3], побудуємо вектор $a = (a_1, ..., a_M) \neq 0$, ортогональний кожному з векторів $v(q) - \mu(q),\ q = 2, ..., Q$

$$\sum_{k=1}^{M} a_k(v_k(q) - \mu_k(q)) = 0,\ q = 2, ..., Q. \tag{6}$$

Методи обчислення вектора a розглянемо нижче, а зараз будемо вважати, що такий вектор знайдений . Тоді з (5) маємо

$$\sum_{j=1}^{N} B_j(q) \sum_{k=1}^{M} a_k g_k(x_j) = 0,\ q = 2, ..., Q. \tag{7}$$

Рівність (7) при випадкових $B_j(q)$ можлива лише в тому випадку, коли

$$\sum_{k=1}^{M} a_k g_k(x_j) = 0,\ j = 1, ..., N,$$

тобто якщо координати точкових джерел є нулями узагальненого многочлена

$$F(x) = \sum_{k=1}^{M} a_k g_k(x) \tag{8}$$

з коефіцієнтами, що задовольняють рівність (6).

Для знаходження вектора $a = (a_1, ..., a_M)$ покладемо $a_M = -1$ і перепишемо (6) у вигляді

$$\sum_{k=1}^{M-1} (v_k(q) - \mu_k(q))a_k = v_M(q) - \mu_M(q),\ q = 2, ..., Q. \tag{9}$$

Якщо через W позначити матрицю

$$W = \begin{pmatrix} v_1(2)-\mu_1(2) & ... & v_{M-1}(2)-\mu_{M-1}(2) \\ ... & ... & ... \\ v_1(Q)-\mu_1(Q) & ... & v_{M-1}(Q)-\mu_{M-1}(Q) \end{pmatrix},$$

через $\tilde{a}$ — вектор коефіцієнтів $\tilde{a} = (a_1, ..., a_{M-1})$, через w вектор $((v_M(2)-\mu_M(2), ..., v_M(Q)-\mu_M(Q))^T$, то систему (9) можна переписати в матричній формі

$$W\tilde{a}^T = w, \tag{10}$$

і її розв'язок [4] має вигляд

$$\tilde{a}^T = W^- w = \lim_{\alpha\to 0} W^*(WW^* + \alpha E)^{-1} w,$$

W^-— матриця, псевдообернена до W, E — одинична матриця, $*$ — символ транспозиції і комплексного спряження. Параметр α може бути узгоджений з похибкою вимірювань, і тоді граничний перехід не потрібний, а $\tilde{a}$ набуде вигляду $\tilde{a}^T = W^*(WW^* + \alpha E)^{-1} w$, де α може бути знайдений, наприклад, за принципом узагальненої нев'язки [1].

Позначивши через $\tilde{g}(x)$ вектор $\tilde{g}(x) = (g_1(x), ..., g_{M-1}(x))^T$, з (8) отримаємо рівняння для знаходження координат точкових джерел у вигляді

$$\tilde{g}^T(x) W^*(WW^* + \alpha E)^{-1} w + g_M(x) = 0.$$

Маючи величини N і $x_j,\ j = 1, ..., N$, із системи (4) можна оцінити амплітуди точкових джерел — величини $A_j(q),\ j = 1, ..., N,\ q = 1, ..., Q$.

Зауваження 1. Оскільки при розв'язуванні реальних задач результати вимірювань в «чистому вигляді», як правило, невідомі, то задача знаходження вектора $\tilde{a}$ із системи (10) перетворюється на задачу знаходження вектора $\tilde{a}$ із системи $V\tilde{a}^T = v$, V — матриця вигляду $V = (v_{qk})_{q=2,\,k=1}^{Q,\,M-1}$, $v_{qk} = v_k(q),\ k = 1, ..., M-1,\ q = 2, ..., Q$, розв'язання якої має сенс лише у випадку, якщо похибки $\mu(q)$ малі. В протилежному випадку треба враховувати вплив шумової компоненти у вигляді додаткової інформації в постановці задачі для знаходження вектора a.

Так, з урахуванням статистичної інформації про похибки вимірювань $\mu_k(q),\ k = 1, ..., M,\ q = 2, ..., Q$ у вигляді $M(\mu(q)) = 0,\ M\|\mu(q)\|^2 = R_\mu(q)$, $R_\mu(q) = R_\mu,\ \det R_\mu \neq 0$ задача для знаходження вектора $a = (a_1, ..., a_M)$ може бути сформульована у вигляді такої задачі умовного екстремуму

$$\begin{cases} h_\mu(a) = M\|a\mu(q)\|^2 \to \min\limits_a \\ av(q) = 0 \\ aH^* + Ha^* - 2 = 0,\ q = 2, ..., Q, \end{cases},$$

$h_\mu(a)$ — дисперсія шумової складової в (6), H — деякий нетривіальний M–вимірний вектор $H = (H_1, ..., H_M)$, або

$$\begin{cases} aR_\mu a^* \to \min\limits_a \\ aU = 0 \\ aH^* + Ha^* - 2 = 0 \end{cases}, \tag{11}$$

U — матриця вигляду

$$U = \begin{pmatrix} v_1(2) & ... & v_1(Q) \\ ... & ... & ... \\ v_M(2) & ... & v_M(Q) \end{pmatrix}.$$

Умова належності вектора a до деякої гіперплощини $A = \{a \in C^M : aH^* + Ha^* = 2\}$ виключає тривіальний розв'язок рівняння $aU = 0$ і є, фактично, умовою регуляризації задачі (11). Зауважимо, що умова регуляризації може бути іншою, наприклад, a може належати квадратичній поверхні вигляду $A = \{a \in C^M : aPa^* = 1\}$, P деяка додатньо визначена ермітова матриця, яка характеризує квадратичну поверхню [3].

Функція Лагранжа для задачі (11) має вигляд

$$L(a, \alpha, \beta) = aR_\mu a^* + \alpha(aH^* + Ha^* - 2) + aU\beta,$$

де $\beta = (\beta_2, ..., \beta_q)^T$. Стаціонарні точки градієнта функції Лагранжа однозначно визначають її точку мінімуму у вигляді

$$a = \frac{2HR_\mu^{-1} + 2HR_\mu^{-1}U(U^*R_\mu^{-1}U)^{-1}U^*R^{-1}}{HR_\mu^{-1}H^* + HR_\mu^{-1}U(U^*R^{-1}U)^{-1}U^*R^{-1}H^*} \tag{12}$$

і, відповідно, многочлен, нулі якого є координатами точкових джерел, приймає вигляд (8) з a, визначеним згідно (12).

Якщо U квадратна невироджена матриця, то

$$a = 2(HR_\mu^{-1}H^*)^{-1}HR_\mu^{-1}.$$

3. Парето-оптимальне оцінювання розподіленого джерела

Тепер перейдемо до вирішення задачі оцінювання розподіленого джерела $u(x)$ (див. (2)). Введемо позначення

$$\sum_{j=1}^{N} A_j(q) g_k(x_j) = \gamma_k(q) \text{ і } \sum_{j=1}^{N} A_j g_k(x_j) = \gamma_k,$$
$$k = 1, ..., M,\ q = 1, ..., Q.$$

Тоді з (3) маємо

$$u_k(q) = \int_D g_k(x)u(x)dx + \gamma_k(q) + \nu_k(q),$$
$$k = 1, ..., M,\ q = 1, ..., Q,$$

або

$$z(q) = \int_D g_k(x)u(x)dx + \gamma(q) + \nu(q), \tag{13}$$

$$z(q) = (u_1(q), ..., u_M(q))^T,\ \ \gamma(q) = (\gamma_1(q), ..., \gamma_M(q))^T,$$
$$\nu(q) = (\nu_1(q), ..., \nu_M(q))^T.$$

Якщо врахувати, що

$$\gamma(q) = \gamma^\circ + \omega(q),\ \ \gamma^\circ = M(\gamma(q)),\ \ M(\omega(q)) = 0,$$

$$M(\omega(q)\omega^*(q)) = R_\omega(q) = R_\omega,\ \det R_\omega \neq 0,$$

то з (13) маємо

$$z(q) - \hat{\gamma}^\circ = \int\limits_D g_k(x)u(x)dx + \omega(q) + \nu(q),$$

$$\hat{\gamma}^\circ = \sum_{j=1}^{N} \hat{A}_j^\circ g(x_j),\ \omega(q) = \sum_{j=1}^{N} \eta_j(q) g(x_j),\ A_j = A_j^\circ + \eta_j,$$

$$A_j(q) = A_j^\circ + \eta_j(q),\ j = 1, ..., N,\ \hat{A}_j^\circ = \frac{1}{Q}\sum_{q=1}^{Q} A_j(q),$$

$$M(A_j) = A_j^\circ,\ M(\eta_j) = 0,\ j = 1, ..., N,\ q = 1, ..., Q,$$

або, позначивши через $y(q) = z(q) - \hat{\gamma}^\circ$,

$$y(q) = \int\limits_D g_k(x)u(x)dx + \omega(q) + \nu(q),\ q = 1, ..., Q. \tag{14}$$

Отже, для знаходження невідомого поля $u(x)$ достатньо оцінити $u(x)$ з (14) при будь-якому фіксованому q. Перепишемо (14) в операторній формі

$$y = Gu + \omega + \nu, \tag{15}$$

де

$$y = y(q),\ \omega = \omega(q),\ \nu = \nu(q),$$

$$M(\nu(q)) = 0,\ M(\omega(q)) = 0,\ M(\nu(q)\nu^*(q)) = R_\nu,$$

$$M(\nu(q)\ \omega^*(q)) = 0,\ M(\omega(q)\omega^*(q)) = R_\omega,\ q\text{— фіксовано},$$

$$\det R_\nu \neq 0,\ \det R_\omega \neq 0,\ G = \int\limits_D g(x)\cdot dx,\ u(x) \in L_2[D].$$

Задача полягає в оцінці невідомого поля $u(x)$ за даними y, спотвореними випадковими похибками $\omega+\nu$. Для її розв'язання розглянемо задачу оцінки виходу $u(x)$ з приладу Π_x^λ вигляду

$$\Pi_x^\lambda u = \int\limits_D \pi(\xi, x, \lambda)u(\xi)d\xi,\ \lambda > 0, \tag{16}$$

визначивши для будь-якої точки $x \in \mathrm{int}D$ дійсну невід'ємну функцію

$$\pi(\xi, x, \lambda) = \begin{cases} \tau(\xi), & \text{якщо} \|\xi - x\| < \lambda,\ \{\|\xi - x\| < \lambda\} \subset D \\ 0 & \text{в інших точках}\ \ \xi \in D \end{cases},$$

неперервну по $\xi \in D$, і таку, що

$$\int\limits_D \pi(\xi, x, \lambda)d\xi = \int\limits_{\|\xi - x\| < \lambda} \tau(\xi)d\xi = 1.$$

Будемо шукати оцінку $\hat{\Pi_x^\lambda u}$ у вигляді $\hat{\Pi_x^\lambda u} = By$, де вектор $B = (b_1, ..., b_m) \in C^M$ є розв'язком двокритеріальної задачі мінімізації

$$\begin{cases} \varphi(B) = \|BG - \Pi_x^\lambda\|^2 \to \min\limits_B \\ h(B) = M\|B\nu\|^2 + M\|B\omega\|^2 \to \min\limits_B \end{cases}, \tag{17}$$

$\varphi(B)$ — операторна нев'язка оцінки $\hat{\Pi_x^\lambda u}$, що характеризує її зсув, $h(B)$ — рівень шумового фону (дисперсія) оцінки $\hat{\Pi_x^\lambda u}$. Задача мінімізації (17) природним чином випливає з перетворення рівняння (15) до вигляду

$$By = \Pi_x^\lambda u + (BG - \Pi_x^\lambda)u + B\omega + B\nu,$$

де другий доданок є зсувом оцінки $\hat{\Pi_x^\lambda u} = By$, а $B(\omega + \nu)$ — її шумовим фоном. В ході розв'язання задачі (17) в сенсі оптимізації за Парето [5] отримуємо множину векторів B у вигляді

$$B = \Pi_x^\lambda G^*(GG^* + \alpha(R_\nu + R_\omega))^{-1},\ 0 < \alpha < \infty,$$

звідки шукані парето-оптимальні оцінки мають вигляд

$$\hat{\Pi_x^\lambda u} = \Pi_x^\lambda G^*(GG^* + \alpha(R_\nu + R_\omega)^{-1})y,\ 0 < \alpha < \infty, \tag{18}$$

G^* — оператор, спряжений до G, $G^* = g^*(x)$. Оцінки (18) мають одночасно незменшувані операторну нев'язку

$$\varphi(\alpha) = t_r \Pi_x^\lambda G^*((GG^* + \alpha(R_\nu + R_\omega))^{-1} GG^*(GG^* + \alpha(R_\nu + R_\omega))^{-1} - \\ -2\,(GG^* + \alpha(R_\nu + R_\omega))^{-1})(\Pi_x^\lambda G^*)^*,$$

яка монотонно зростає з ростом α, і рівень шумового фону

$$h(\alpha) = t_r \Pi_x^\lambda G^*(GG^* + \alpha(R_\nu + R_\omega))^{-1}(R_\nu + R_\omega)\times \\ \times(GG^* + \alpha(R_\nu + R_\omega))^{-1}(\Pi_x^\lambda G^*)^*,$$

який монотонно спадає з ростом α, для $h^{'}(\alpha)$ і $\varphi^{'}(\alpha)$ виконується "закон збереження"

$$\alpha h^{'}(\alpha) + \varphi^{'}(\alpha) = 0. \tag{19}$$

З (19) випливає, що зменшення рівня шумового фону оцінки (18) приводить до зростання величини операторної нев'язки і навпаки.

З урахуванням (16) граничним переходом при $\lambda \to 0$ отримуємо парето-оптимальні оцінки фонового поля у вигляді

$$\hat{u}(x) = g^*(x)(K + \alpha(R_\nu + R_\omega))^{-1}y,\ 0 < \alpha < \infty, \\ K = \int\limits_D g(x)g^*(x)dx. \tag{20}$$

Аналогічним граничним переходом можна отримати рівень шуму і величину операторної нев'язки оцінок (20).

Множина пар точок $(h(\alpha),\ \varphi(\alpha)),\ 0 < \alpha < \infty$ задає множину Парето задачі (17) — параметричну залежність $\varphi(h),\ 0 < \alpha < \infty$, і остаточний вибір оцінки з множини (20) здійснює ОПР (особа, що приймає рішення) на основі аналізу цієї залежності.

Висновки.

Запропонований в роботі підхід вирішує проблему оцінювання поля, породженого скінченною множиною мерехтливих точкових джерел на фоні розподіленого джерела за даними вимірювань цього поля скінченною множиною датчиків. Будуються алгоритми знаходження кількості і координат точкових джерел, а також парето-оптимальні оцінки фонового джерела. Побудовані оцінки мають одночасно незменшувані рівень шумового фону (дисперсію) та величину операторної нев'язки, а множина Парето може використовуватися для вибору з множини оцінок оптимальної.

Література

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М: Наука, 1979. — 288 с.
2. Пытьев Ю. П. Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем. — М: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 400 с.
3. Bronez T., Cadzow J. An Algebraic Approach to Superresolution array Processing. // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. — 1983. — V. 19. — №1. — P. 123–133.
4. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. — М: Наука, 1977. — 224 с.
5. Kasyanyuk V., Volchyna I. Problem of restoring the function-signals by finite set of data with errors. // Information Models and Analysys, 2013. — V. 2. — №4. — P. 361 – 369.

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, МСП, Київ, 01601, Україна.

Надійшла 12.09.2014