

УДК 517.929

*100 річчю від дня народження Положія Г. М. присвячено*

## ПРО ОДИН НАПРЯМОК ПРАКТИЧНОГО ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕТИЧНОЇ СПАДЩИНИ Г.М. ПОЛОЖІЯ

О.Ю. Грищенко

**РЕЗЮМЕ.** У статті розглянуто два напрямки наукових досліджень член-кореспондента Г. М. Положія: метод сумарних зображень для чисельного розв'язування крайових задач математичної фізики та метод  $(p, q)$ -аналітичних функцій. Відзначено характерні якості цих методів і вказано на можливості ефективного комплексного застосування цих методів у нових прикладних проблемних областях, зокрема, у оптимізаційних задачах математичної теорії фільтрації при проектуванні гідротехнічних споруд.

### Вступ

Видатний математик і педагог, доктор фізико-математичних наук, професор, член-кореспондент АН України Георгій Миколайович Положіий народився 23 квітня 1914 року. Пройшовши роки навчання і буремні воєнні роки, він з 1949 року пройшов за конкурсом на посаду доцента кафедри математичної фізики механіко-математичного факультету Київського державного університету. З 1951 року Г. М. Положіий працював завідувачем цієї ж кафедри, а з 1958 р. і до останнього дня — завідувачем кафедри обчислювальної математики. Г. М. Положіий автор багатьох наукових праць, монографій і всесвітньо відомих підручників. Під його керівництвом одержала шлях у науку велика плеяда учнів, серед яких академіки та член-кори. (І. І. Ляшко, Б. М. Бублик та інші), доктори та кандидати наук. Він створив наукову школу, розвинув два наукові напрямки і фактично створив нову кафедру. Наукова і педагогічна праця Г. М. Положія відзначена державними і відомчими нагородами. Г. М. Положіий значну увагу у своїй діяльності приділяв пропаганді наукових результатів. Він став одним із ініціаторів і засновником, а також і першим редактором республіканського міжвідомчого наукового збірника "Вычислительная математика", який згодом став нашим "Журналом обчислювальної та прикладної математики".

Більш детально про життєвий шлях Г. М. Положія сказано у багатьох публікаціях, зокрема в [1].

Наукові досягнення Г. М. Положія знайшли і далі знаходять все нові і нові широкі галузі практичного застосування у багатьох прикладних аспектах математичного моделювання реальних процесів. Уже після його смерті виявилось, що однією з таких галузей є оптимізаційні задачі математичної теорії фільтрації ґрунтових вод. Зупинимось коротко на цій проблемі.

Якість гідротехнічної споруди визначається низкою вимог до параметрів протікання процесу, які є характеристиками як гідротехнічних споруд: витрата рідини  $Q$ , швидкість  $\vec{V}$  рідини під спорудою, умови стійкості споруди, так і вимогами до експлуатаційних властивостей, вартості споруди, терміну її зведення тощо. Ці вимоги записуються у вигляді системи обмежень

$$Q_i(a_1, a_2, \dots, a_l, h) \geq q_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad \psi_j(b_1, b_2, \dots, b_k, h) \geq \phi_j, \quad j = \overline{1, m}.$$

Тут  $a_i$  та  $b_j$  — геометричні та технологічні параметри.

У залежності від поточних обставин визначається відповідний функціонал якості

$$J(a_1, a_2, \dots, a_l, b_1, b_2, \dots, b_k, h),$$

в якому  $h$  — розв'язок відповідної крайової задачі фільтрації.

Побудова математичних моделей такого типу пов'язана з серйозними математичними проблемами. Навіть у простішому випадку, коли за обмеження вибрано тільки гідродинамічні характеристики  $Q_i(a_1, a_2, \dots, a_l, \phi) \geq q_i$ , а цільову функцію вважаємо функцією тільки вартості споруди  $J(a_1, a_2, \dots, a_l, h)$ , процес пошуку мінімуму цільової функції достатньо складний.

Виявилось, що у такій, новій на той час, постановці задачі ефективними є методи теорії  $(p, q)$ -аналітичних функцій [2] та сумарних зображень [3], запропоновані Г. М. Положієм.

### 1. ЗАГАЛЬНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ НАПІРНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ

Рівняння математичної теорії фільтрації було отримано на основі рівнянь динаміки ідеальної рідини. Зокрема, у випадку плоско-паралельної фільтрації маємо

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \theta \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \theta \frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0, \quad \vec{V} = -\theta \text{grad} h, \quad (1)$$

або для всталеного руху ґрунтових вод в однорідному середовищі

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0, \quad \vec{V} = -\theta \text{grad} h. \quad (2)$$

Оскільки швидкість фільтрації має потенціал

$$\phi = -\theta \left( \frac{P}{\rho g} + y \right) + c = -\theta h + c, \quad (3)$$

де  $c$  — дійсна стала (яку для зручності можемо вважати такою, що дорівнює нулю), то

$$\vec{V} = \text{grad} \phi, \quad (4)$$

а

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0. \quad (5)$$

Отже, існує функція току  $\psi(x, y)$  така, що

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (6)$$

а кожному плоско-паралельному фільтраційному потоку в однорідному середовищі можна поставити у відповідність аналітичну функцію

$$\omega = \varphi + i\psi, \quad (7)$$

яка називається комплексним потенціалом. Через вказані аналітичні функції вектор швидкості фільтрації визначається так:

$$\vec{V} = \frac{\overline{d\omega}}{dz}, \quad (8)$$

а кількість рідини, що пройшла через деякий контур  $L$  в бік його правої нормалі, можна визначити рівністю

$$Q = \int_L v_n ds = \int_L \frac{\partial \psi}{\partial s} ds = [\psi]_L. \quad (9)$$

Отже, задачі фільтрації зводяться до пошуку дійсної чи уявної частини функції (7) за крайовим умовам, які задано на границі області фільтрації.

На практиці найчастіше зустрічаються чотири види ділянок областей фільтрації, на яких задаємо відповідні граничні умови:

а) непроникні границі, які є лініями току, де функція току приймає постійне значення  $\psi = A = const$ ;

б) границі водойм та дренажів, які є лініями рівного потенціалу

$$\psi = B = const;$$

в) проміжки витікання, або ділянки, де вода з тіла греблі витікає не у водний басейн, а прямо в атмосферу

$$\phi = c - \theta y;$$

г) лінії вільних поверхонь, або криві депресії, які є лініями розділу між сухим та мокрим ґрунтом, тобто одночасно виконуються умови в) та умови

$$\psi = D + \varepsilon x,$$

де  $D$  та  $\varepsilon$  – сталі.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧА ОПТИМІЗАЦІЇ ВАРТОСТІ ПІДЗЕМНОЇ ЧАСТИНИ ГІДРОСПОРУДИ

Для ілюстрації запропонованого методу розглянемо простішу задачу мінімізації вартості підземної частини гідротехнічної споруди при виконанні однієї з гідротехнічних умов.

В області  $G$  (рис.1), обмеженій двома непроникними границями  $BCDC_1E$  і  $A'F'$  та двома границями водоймі  $AB$  і  $EF$ , під впливом різниці напорів  $H$  у верхньому та нижньому б'єфах проходить фільтраційний потік. Цьому потоку у відповідність можна поставити комплексний потенціал  $\omega = \phi + i\psi$ , де  $\phi$  і  $\psi$ , як гармонічні функції у смузі  $G$  з розрізом вздовж відрізка  $CDC_1$ , задовольняють граничні умови:

$$\phi|_{AB} = -\theta H, \quad \psi|_{BCDC_1E} = Q, \quad \phi|_{EF} = 0, \quad \psi|_{A'F'} = 0.$$

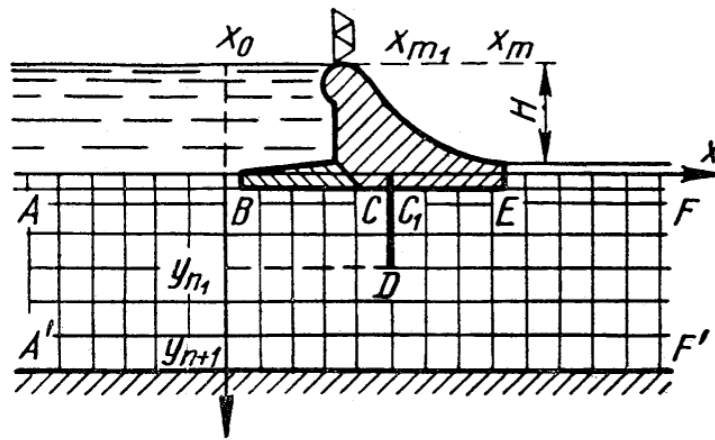


Рис. 1

Потрібно мінімізувати здавалося б достатньо простий функціонал

$$J = \int_{\alpha}^{\beta} a(x)dx + \int_{\gamma}^{\delta} b(y, x_{m_1})dy, \quad (10)$$

який визначає вартість гідротехнічної споруди. Але задача ускладнюється тим, що точки (розміри споруди)  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  повинні бути визначені в процесі моделювання так, щоб виконувалися задані технологічні обмеження  $x_m \leq \beta - \alpha \leq x_{\bar{m}}, y_n \leq \delta - \gamma \leq y_{\bar{n}}$ , де  $x_m, x_{\bar{m}}$  — мінімальна і максимальна ширина флотбету ( $x_m - x_0 = \beta - \alpha$ ), визначена як різниця відповідних координат  $B$  та  $E$ ,  $y_n, y_{\bar{n}}$  — мінімальна і максимальна довжина шпунта ( $y_{n_1} - y_0 = \gamma - \delta$ ), а  $(x_{m_1}, y_0)$  — точка прикріплення шпунта до флотбету. При цьому потрібно враховувати, що максимально допустима витрата води  $Q$  під гідротехнічною спорудою при фільтрації повинна не перевищувати деякого певного заданого значення, тобто  $Q = Q(x_m, x_{\bar{m}}, x_{m_1}, y_n, y_{\bar{n}}) \leq Q_0$ , а тиск під флотбетом повинен обмежуватися певним максимумом  $P_0$ .

### 3. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ЗАДАЧ

Побудова ефективних методів розв'язання фільтраційних задач є складною проблемою. Існують точні аналітичні методи, серед яких найбільш відомими є метод конформних відображень, метод аналітичної теорії диференціальних рівнянь, метод інтегральних рівнянь та метод крайових задач теорії функцій комплексної змінної. Але складність їх використання для встановлення основних характеристик при проведенні практичних розрахунків робить їх не завжди ефективними.

З наближених методів найбільш відомими стали метод фрагментів, метод послідовного розвертання шпунтів та варіаційні методи. Вони спрощують побудову розв'язку, але мають значну похибку, оцінити яку вдається не завжди.

Г. М. Положіть на основі доведеної ним теореми про рух граничних точок відображених областей отримав загальні варіаційні теореми фільтрації в однорідному середовищі. Виходячи з цих теорем, він запропонував для розв'язку фільтраційних задач метод мажорантних областей. Основна ідея полягає в заміні розв'язку даної крайової задачі розв'язками допоміжних крайових задач для більш простих областей, для яких ці розв'язки відомі або знаходяться порівняно легко. Метод було розвинено на інші класи задач.

Основним із наближених методів розв'язання задач математичної фізики є метод скінченних різниць. Багато дослідників робили спроби використати цей метод для розв'язання задач фільтрації. Але навіть поява швидкодіючих електронних обчислювальних машин не зробила метод скінченних різниць провідним у математичній теорії фільтрації. Це пов'язано з тим, що характерною особливістю фільтраційних задач є необхідність використання сітки з великою кількістю вузлів і при розв'язуванні відповідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь це призводить не тільки до великого об'єму обчислювальних робіт, але й до значних похибок.

Вказані труднощі значною мірою було усунено з появою нового підходу до розв'язування різницевих рівнянь – методу сумарних зображень.

#### 4. МЕТОД СУМАРНИХ ЗОБРАЖЕНЬ

При розробці нового чисельного методу розв'язання крайових задач для рівнянь в частинних похідних Г. М. Положіть поставив за мету розробити чисельний метод з найменшою кількістю необхідних обчислювальних операцій, для якого відповідні процеси не приводили б до накопичення великих похибок. Цей метод систематично викладено в монографії [3]. Метод сумарних зображень можна розглядати як дискретний аналог метода інтегральних зображень у застосуванні до крайових задач математичної фізики у їх дискретній постановці. Розв'язки отримуються в замкненому вигляді і записуються алгебраїчними формулами. У залежності від крайових умов вони або явні, або містять невелику кількість невідомих параметрів, що визначаються із системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Це метод вибіркового розрахунку. Остання обставина дуже важлива, оскільки для більшості практичних задач, зокрема, для задач фільтрації, достатньо знати розв'язок лише в тих вузлах області, в яких визначаються основні характеристики. Ця обставина надає змогу уникнути надмірно великої обчислювальної похибки. Методом сумарних зображень можна розв'язувати задачі теорії фільтрації, теорії пружності, теорії пластин та оболонок тощо при дуже великій і навіть необмеженій кількості вузлів сітки для однозв'язних та багатозв'язних плоских і просторових областей. Аналітична форма розв'язку дозволяє не тільки знаходити чисельне значення розв'язку у будь-якій точці, але й проводити певні якісні дослідження.

До задач моделювання гідротехнічних споруд в рамках лінійної стаціонарної теорії фільтрації метод сумарних зображень було розвинено і застосовано І. І. Ляшком [4, 5, 6] та його учнями. Метод полягає у наступному. У площині  $(x, y)$  будуємо рівномірну ортогональну сітку з вузлами

$(x_i, y_k)$ ,  $x_i = x_0 + ih$ ,  $y_k = y_0 + kh_1$ , ( $i = 1, 2, \dots, M$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ ),  $h$  та  $h_1$  – додатні сталі – кроки сітки відповідно по  $x$  та  $y$ . Сукупність точок-вузлів  $(x_i, y_k)$  будемо називати сітковим прямокутником  $D$ . Під скінченно-різницеvim оператором Лапласа  $\Delta_h u$  розуміємо п'ятиточковий оператор [3].

Введемо  $n$ -вимірні вектори  $\vec{u}(x_i) = \{u_k(x_i)\}_{k=1}^n$ ,  $u_k(x_i) = u(x_i, y_k)$ ,  $\vec{f}(x_i) = \{f_k(x_i)\}_{k=1}^n$ ,  $\vec{\omega}(x_i) = \{u_0(x_i), 0, \dots, 0, u_{n+1}(x_i)\}$  та квадратну матрицю порядку  $n$   $P_1 = [a_{ik}]_1^n = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \left[ \sin i \frac{k\pi}{n+1} \right]_{i,k=1}^n$ .

**Теорема 1.** *Теорема (Г. М. Положія)[3]. Для загального розв'язку скінченно-різницевого рівняння*

$$\Delta_h u = f(x, y)$$

з умовами першого роду на горизонтальних границях в сітковому прямокутнику  $D$  справедлива рівність

$$\vec{u}(x_i) = P_1 \left\{ \mu^i \vec{A} + \nu^i \vec{B} - \sum_{p=0}^{i-1} \frac{\mu^{i-p} - \nu^{i-p}}{\mu - \nu} P_1 \vec{H}_1 \right\}, \quad (11)$$

де остання сума дорівнює нулю при  $i = 0, 1$ ;  $\vec{A} = \{A_k\}_1^n$  та  $\vec{B} = \{B_k\}_1^n$  –  $n$ -вимірні вектори довільних постійних;  $\vec{H}_1 = h^2 \vec{f}(x_p) - \gamma^2 \vec{\omega}_1(x_p)$  є  $n$ -вимірним вектором;  $\mu^i = [\mu_k^i]_{k=1}^n$ ,  $\nu^i = [\nu_k^i]_{k=1}^n$ ,  $\frac{\mu^i - \nu^i}{\mu - \nu} = \left[ \frac{\mu_k^i - \nu_k^i}{\mu_k - \nu_k} \right]_{k=1}^n$  – діагональні матриці порядку  $n$ ;  $\mu_k = \eta_k + \sqrt{\eta_k^2 - 1}$ ,  $\nu_k = \eta_k - \sqrt{\eta_k^2 - 1}$ ,  $\eta_k = 1 + \gamma^2 - \gamma^2 \cos \frac{k\pi}{n+1}$ , а  $\gamma = h/h_1$ .

Формули аналогічні (11) було одержано і для інших типів граничних умов на горизонтальних сторонах прямокутника. Значення векторів  $\vec{A} = \{A_k\}_1^n$  та  $\vec{B} = \{B_k\}_1^n$  знаходяться з умов на вертикальних сторонах.

В роботах І. І. Ляшка ці формули було поширено на необмежені області. У загальному вигляді формули сумарних зображень для сіткової смуги  $(x_i, y_k)$  ( $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;  $k = 1, 2, \dots, n+1$ ) можна записати так:

$$\vec{u}(x_i) = P \left\{ \mu^i \vec{A} + \nu^i \vec{B} - \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{\nu^{|i-p|}}{\mu - \nu} \vec{H}_4(x_p) \right\}, \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (12)$$

де  $\vec{A} = \{A_k\}_1^n$  та  $\vec{B} = \{B_k\}_1^n$  –  $n$ -вимірні вектори довільних сталих, причому для розв'язку, обмеженого при  $i \rightarrow \infty$ , слід покласти  $\vec{A} = 0$ , а для розв'язку, обмеженого при  $i \rightarrow -\infty$ , відповідно  $\vec{B} = 0$ . Матриця  $n$ -го порядку  $P$ , діагональні матриці  $\mu^i$ ,  $\nu^i$ ,  $\frac{\nu^{|i-p|}}{\mu - \nu}$  та  $n$ -вимірний вектор  $\vec{H}_4(x_p)$ , як і раніше, визначаються в залежності від типу крайових умов на горизонтальних ділянках границь областей.

5. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СУМАРНИХ ЗОБРАЖЕНЬ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ НАПРІМНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ

Знаходження розв'язку поставленої задачі пов'язано зі складністю побудови конформного відображення багатокутника на півплощину і може бути виконано тільки у достатньо простих випадках. Крім того, його практичне використання ускладнено внаслідок громіздких обчислень. Розв'язок задачі методом сумарних зображень отримується у вигляді простої формули, що містить невелику кількість невідомих параметрів, які знаходяться з допоміжної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Достатня для практики точність при визначенні фільтраційних характеристик досягається навіть при великій кількості параметрів.

Розглянемо задачу про фільтрацію під одношпунтовим флютбетом (рис. 1). Диференціальну задачу сформулюємо так. Знайти уявну частину  $\psi(x, y)$  комплексного потенціалу  $\omega = \varphi + i\psi$ , як гармонічну функцію у смузі  $G$  з розрізом вздовж відрізка  $CDC_1$ , що задовольняє граничні умови:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{AB} = 0, \quad \psi|_{BCDC_1E} = Q, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{EF} = 0, \quad \psi|_{A'F'} = 0. \quad (13)$$

Поставимо відповідну скінченно-різницеву задачу. Сітку розташуємо так, щоб пряма  $AF$  була посередині між лініями сітки  $y = y_0$  та  $y = y_1$ , а лінія  $A'F'$  співпала з лінією сітки  $y = y_{n+1}$ ; передбачаємо, що точки  $B$  і  $E$  знаходяться посередині відрізків  $[x_0, x_1]$  і відповідно  $[x_m, x_{m+1}]$  (рис. 1). Будемо вважати, що відрізок  $CD$  розташовано вздовж лінії сітки  $x = x_{m_1}$ , а точці  $D$  відповідає вузлова точка  $(x_{m_1}, y_{n_1})$ . Для спрощення запису, покладемо, що сітка квадратна, тобто  $\gamma = \frac{h}{h_1} = 1$ . У сітковій смузі  $(x_i, y_k)$  ( $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; k = 1, 2, \dots, n$ ) шукаємо розв'язок  $\psi(x_i, y_k) = \psi_k(x_i)$  скінченно-різницевого рівняння Пуассона

$$\Delta_h \psi = f, \quad (14)$$

у якому права частина  $f$  відмінна від нуля лише у вузлах сітки  $(x_{m_1}, y_k)$  ( $k = 1, 2, \dots, n_1$ ), що відповідають положенню шпунта, оскільки в точках шпунта функція  $\psi(x, y)$  не є гармонічною. Значення  $f(x_{m_1}, y_k) = f_k$  будемо вважати невідомими параметрами. Граничні умови, що відповідають умовам (13), запишемо у вигляді

$$\psi_0(x_i) - \psi_1(x_i) = \begin{cases} 0, & i \leq 0, \quad i = m_1, \quad i > m, \\ \alpha_i, & i = 1, 2, \dots, m_1 - 1, m_1 + 1, \dots, m, \end{cases} \quad (15)$$

$$\psi_{n+1}(x_i) = 0 \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (16)$$

Тут  $\alpha_i$  також є ще невідомими параметрами. Отже, розв'язок скінченно-різницевої задачі буде виражено через параметри  $f_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, n_1$ ) і  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m_1 - 1, m_1 + 1, \dots, m$ ). Зупинимось на питанні знаходження цих параметрів.

Посилаючись на міркування, зроблені в [5], і увівши позначення  $\alpha'_i = \frac{\alpha_i}{Q}$ ,  $f'_k = -\frac{h^2 f_k}{Q}$ , приходимо до системи лінійних рівнянь відносно  $\alpha'_i$ ,  $f'_k$

$$\sum_{\substack{p=1 \\ p \neq m_1}}^m A'_{ip}(1) \alpha'_p + \sum_{l=1}^{n_1} B_{il}(i) f'_l = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, m_1 - 1, m_1 + 1, \dots, m),$$

$$\sum_{\substack{p=1 \\ p \neq m_1}}^m A_{m_1 p}(k) \alpha'_p + \sum_{l=1}^{n_1} B_{kl}(m_1) f'_l = 1 \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (17)$$

Матриця цієї системи симетрична, а вздовж діагоналі знаходяться максимальні елементи. До розв'язку такої системи можна застосувати найбільш ефективні та економічні методи, наприклад, метод квадратного кореня.

Визначивши  $\alpha'_i$ ,  $f'_k$ , легко обчислити також  $Q$ , а отже, і параметри  $\alpha_i$ ,  $f_k$ , розв'язок системи  $\psi$  та основні гідротехнічні параметри

$$Q = \theta H \left[ \begin{array}{c} \sum_{i=1}^m \alpha' + \sum_{k=1}^{n_1} f'_k \\ i \neq m_1 \end{array} \right]^{-1} \quad (18)$$

$$P = -\rho g \left( \frac{\varphi}{\theta} - y \right) \quad (19)$$

Отже, можна знайти розв'язок фільтраційної задачі в цілому.

## 6. ВАРІАЦІЙНІ ТЕОРЕМИ Г. М. ПОЛОЖІЯ ТА МЕТОД МАЖОРАНТНИХ ОБЛАСТЕЙ

Варіаційно-топологічні теореми було отримано для однорідного середовища на основі теореми про рух граничних точок відображених областей. Пізніше Г. М. Положій встановив теорему про збереження області для еліптичних систем диференціальних рівнянь, що дозволило розповсюдити метод мажорантних областей на задачі фільтрації в неоднорідному середовищі та просторові задачі з осьовою симетрією [2].

Математичною передумовою методу є теорема Г. М. Положія [2].

**Теорема 2.** (про збереження області для еліптичних систем диференціальних рівнянь). Нехай в деякій області  $G$  площини  $z = x + iy$  функції  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$ ,  $u, v \neq \text{const}$ , є неперервно-диференційовними розв'язками еліптичної системи рівнянь

$$\begin{aligned} au_x + bu_y - v_y &= 0, \\ du_x + cu_y - v_x &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$



Коефіцієнти цієї системи  $a, b, c, d$  є функціями  $x, y$ , що мають похідні, які задовольняють умову Гельдера. Тоді функція  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  перетворює область  $G$  в деяку іншу область в площині  $\omega = u + iv$ .

Вивчаючи локальні зміни фільтраційних характеристик потоку в залежності від руху вздовж границі області фільтрації точки, яка розділяє лінії току і потенціальні лінії, було встановлено важливі залежності. Для ілюстрації розглянемо в площині  $z = x + iy$  область  $G$ , обмежену двома потенціальними лініями  $AB$  і  $DC$  та двома лініями току  $AD$  і  $BC$  (рис. 2). Крайові умови для визначення аналітичної в області  $G$  функції  $\omega = f(z) = u + iv$  можна записати у вигляді

$$u|_{AB} = 0, \quad u|_{DC} = H = \text{const} > 0, \quad (21)$$

$$v|_{AD} = C = \text{const}, \quad v|_{BC} = C + Q = \text{const} > C. \quad (22)$$

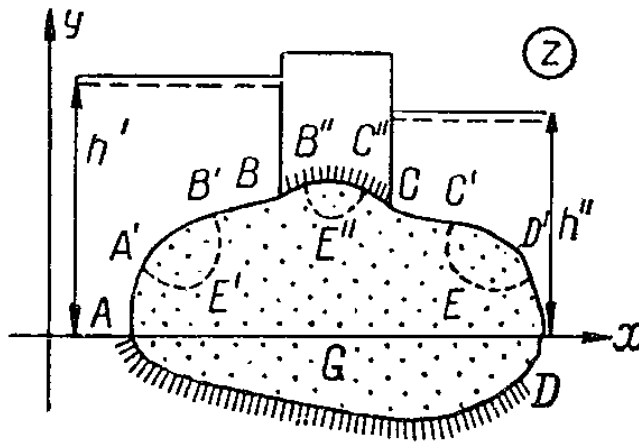


Рис. 2

Тоді при заміні області  $G$  областю  $G_1$ , отриманою з  $G$  за рахунок зміщення однієї з точок  $A, B, C, D$  вздовж границі  $G$  або втискання всередину області однієї з граничних потенціальних ліній чи ліній току, але при незмінних точках їх розділу та незмінному значенні  $H$ , відбуваються зміни характеристик потоку, для яких вірні наступні теореми (позначення у теоремах 1-3 відповідають позначенням [2]).

**Теорема 3.** При зменшенні потенціальної лінії:

- $Q_1 < Q$ ;
- в  $G_1 + L_1 L'_1$  буде  $u_1 > u$ , якщо зменшується лінія найменшого потенціалу, і  $u_1 < u$ , якщо зменшується лінія найбільшого потенціалу;
- $|\nabla u_1| > |\nabla u|$  на незмінній частині зменшеної потенціальної лінії та близько до її кінця на незмінній лінії току і  $|\nabla u_1| < |\nabla u|$  на незмінній частині збільшеної лінії току, на незмінній лінії току.

**Теорема 4.** При втисканні потенціальної лінії:

- $Q_1 > Q$ ;

б) в  $G_1 + L_1 - L_1 L'$  буде  $u_1 < u$ , якщо втискається лінія найбільшого потенціалу, і  $u_1 > u$ , якщо втискається лінія найменшого потенціалу;

в)  $|\nabla u_1| > |\nabla u|$  на незмінній потенціальній лінії і близько до її кінців на лініях току і  $|\nabla u_1| < |\nabla u|$  на незмінній частині втиснутої потенціальної лінії і близько до її кінців на лініях току.

**Теорема 5.** При втисканні лінії току:

а)  $Q_1 < Q$ ;

б) на незмінній частині втиснутої лінії току  $u_1 > u$  зі сторони лінії найбільшого потенціалу і  $u_1 < u$  на незмінній частині її зі сторони лінії найменшого напору;

в)  $|\nabla u_1| < |\nabla u|$  на незмінній частині лінії току, яка стискається і на одній з потенціальних ліній, а на другій потенціальній лінії, або  $|\nabla u_1| < |\nabla u|$  поблизу її кінця, причому на незмінній лінії току в першому випадку буде  $|\nabla u_1| < |\nabla u|$  поблизу кінців та  $|\nabla u_1| > |\nabla u|$  поза кінцями, а в іншому випадку  $|\nabla u_1| < |\nabla u|$  поблизу її кінця, що прилягає до потенціальної лінії, на якій  $|\nabla u_1| < |\nabla u|$  і  $|\nabla u_1| > |\nabla u|$  близько до її іншого кінця.

Аналогічні теореми доведено і для інших випадків напірної та безнапірної фільтрації.

Спираючись на ці твердження, було розроблено метод мажорантних областей. Суть методу полягає в тому, що для знаходження тієї чи іншої інтегральної характеристики, яка відповідає заданій області фільтрації  $G$ , будуються два фільтраційних потоки в таких допоміжних областях  $\bar{G}$  і  $\underline{G}$ , в яких відповідна інтегральна характеристика відома або знаходиться просто, та чисельне значення цієї характеристики внаслідок відповідних варіаційних теорем для області  $\bar{G}$  більше, а для області  $\underline{G}$  менше шуканої величини. Тобто, допоміжні крайові задачі вибирають так, щоб знайдені розв'язки цих задач обмежували шукані інтегральні характеристики зверху та знизу.

Пізніше ці теореми знайшли своє застосування при побудові розв'язків оптимізаційних задач математичної фільтрації.

## 7. ВИКОРИСТАННЯ ТЕОРЕМ ПОЛОЖІЯ ПРИ ПОВУДОВІ АЛГОРИТМУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ

Повернемося до задачі мінімізації функціоналу (10) при вказаних у пункті 2 умовах. Зупинимося тепер на одному з алгоритмів розв'язання [7].

Перехід до різницевої постановки задачі приводить до розв'язування задачі цілочисельного математичного програмування. Для цього побудуємо область допустимих значень

$$x \in D = \{X = (x_{m_1}, x_m, y_{n_1}, x_0) \mid Q(x_{m_1}, x_m, y_{n_1}, x_0) \leq Q_0, \\ P(x_{m_1}, x_m, y_{n_1}, x_0) \leq P_0\}, \\ x_{\underline{m}} \leq x_i \leq x_{\bar{m}}, \quad y_{\underline{n}} \leq y_j \leq y_{\bar{n}}$$

і сітковий функціонал

$$J = \sum_{i=0}^m a_i h_i + \sum_{j=0}^n b_j h_j \rightarrow \min .$$

Тут  $x_{m_1}$  — місце положення основи шпунта,  $x_{\underline{m}}, x_{\bar{m}} \geq 0$ ,  $y_{\underline{n}}, y_{\bar{n}} \geq 0$ ,  $a_i, b_j, Q_0$  — задані;  $a_i, b_j$  — вартість забудови одиниці ширини флотбету та довжини шпунта відповідно.

Задамо початкові координати —  $(x_m, x_{n_1}, x_{m_1})$ , де  $x_{m_1} = \left[ \frac{x_m + x_{\bar{m}}}{2} \right]$ .

**1.** Нехай на  $s$ -му кроці ми отримали координати  $(x_m, x_{n_1})$ , точка  $x_{m_1} = \left[ \frac{x_m + x_{\bar{m}}}{2} \right]$ . За допомогою методу сумарних зображень знаходимо  $Q(x_{m_1}, x_m, y_{n_1})$ . Порівнюємо  $Q(x_{m_1}, x_m, y_{n_1})$  та  $Q_0$ :

1.1) якщо  $Q(x_{m_1}, x_m, y_{n_1}) < Q_0$ , то переходимо до пункту 3.1);

1.2) якщо ж  $Q(x_{m_1}, x_m, y_{n_1}) \geq Q_0$ , то збільшуємо  $m_1$  на 1:

а) при  $m_1 + 1 \leq m$  порівнюємо  $Q(x_{m_1+1}, x_m, y_{n_1})$  та  $Q(x_{m_1}, x_m, y_{n_1})$ :

якщо  $Q(x_{m_1+1}, x_m, y_{n_1}) < Q(x_{m_1}, x_m, y_{n_1})$ , то покладаємо  $s = s + 1$ ,  $m_1 = m_1 + 1$  і повертаємося на початок алгоритму;

якщо ж  $Q(x_{m_1+1}, x_m, y_{n_1}) \geq Q(x_{m_1}, x_m, y_{n_1})$ , то переходимо на 1.2).б);

б) при  $m_1 + 1 > \underline{m}$  зменшуємо  $m_1$  на 1:

якщо  $m_1 - 1 \geq 0$ , покладаємо  $s = s + 1$ ,  $m_1 = m_1 - 1$  і повертаємося на початок алгоритму;

якщо ж  $m_1 - 1 < 0$ , то переходимо до пункту 2.1).

**2.** При зміні ширини флотбету  $m$  змінюється довжина потенціальної лінії  $EF$  (рис. 2), згідно твердження теореми 1 Г. М. Положія при цьому змінюється величина  $Q$ .

2.1) Збільшуємо  $m$  на 1:

а) якщо  $m + 1 \leq \bar{m}$ , тоді згідно тієї ж теореми  $Q$  зменшиться. Покладаємо  $s = s + 1$ ,  $m = m + 1$ , переходимо до першого пункту алгоритму;

б) якщо ж  $m + 1 > \bar{m}$ , то переходимо до пункту 3.2).

2.2) Зменшуємо  $m$  на 1:

а) якщо  $m - 1 \geq \underline{m}$ , тоді  $Q$  збільшиться. Покладемо  $s = s + 1$ ,  $m = m - 1$ , переходимо до першого пункту алгоритму;

б) при  $m - 1 < \underline{m}$  точка  $(x_{m_1}, x_m, y_{n_1})$  — оптимальна. Підраховуємо вартість споруди при  $x_{m_1}, x_m, y_{n_1}$  та  $x_m, y_{n_1}$ .

**3.** При зміні довжини шпунта  $n_1$  змінюється довжина лінії току  $BC$ , згідно твердження теореми 3 Г. М. Положія при цьому зменшується чи збільшується величина  $Q$ .

3.1) Зменшуємо  $n_1$  на 1:

а) якщо  $n_1 - 1 \geq \underline{n}$ , то згідно теореми 3  $Q$  збільшиться. Покладаємо  $s = s + 1$ ,  $n_1 = n_1 - 1$ , переходимо до першого пункту алгоритму;

б) при  $n_1 - 1 < \underline{n}$  переходимо до пункту 2.2).

3.2) Збільшуємо  $n_1$  на 1:

а) якщо  $n_1 + 1 \leq \bar{n}$ , то у відповідності до теореми 3  $Q$  зменшиться, отже, покладемо  $s = s + 1$ ,  $n_1 = n_1 + 1$ , переходимо до першого пункту алгоритму;

б) якщо  $n_1 + 1 > \bar{n}$ , то за таких умов оптимального розв'язку не існує.

### Висновок

Наведений приклад носить тільки ілюстративний характер. Підводячи підсумок, підкреслимо, що метод сумарних зображень дозволив обчислювати необхідні фільтраційні характеристики потоку, використовуючи мінімальну інформацію про розв'язок крайової задачі у незначній кількості вузлових точок, а варіаційні теореми вказали шлях пошуку мінімуму функціоналу. Ці теоретичні дослідження, теореми і розроблені нами чисельні алгоритми з успіхом було використано при розрахунку одного з фрагментів підземного контуру насосної станції Дніпро—Донбас [8].

Варіаційні теореми Г. М. Положія можна також використати у інших прикладних галузях, зокрема, у теорії пружності тощо. Ґрунтовне дослідження наукової спадщини видатного вченого математика Г. М. Положія може виявити ще багато нерозкритих можливостей її використання для знаходження розв'язків нових важливих задач.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Георгий Николаевич Положий. Библиография. / Составители А. А. Глущенко, Е. А. Карагодова и др. Отв. ред. В. Г. Самойленко, И. И. Ляшко, Т. Г. Положий // Ин-т математики НАН Украины, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, 2004. — 84 с.
2. Положий Г. Н. Теория и применение р-аналитических и (р,q)-аналитических функций. — К.: Наукова думка, 1973. — 424 с.
3. Положий Г. Н. Численное решение двухмерных и трёхмерных краевых задач математической физики и функций дискретного аргумента. — Изд-во Киевского ун-та, 1962. — 162 с.
4. Ляшко І. І. Про розвиток та застосування методу сумарних зображень в теорії фільтрації. // ДАН УРСР. — 1962. — Т.9.
5. Ляшко І. І. Решение фильтрационных задач методом суммарных представлений. — Изд-во Киевского ун-та, — К., 1963. — 174 с.
6. Ляшко І. І., Великоиваненко І. М. Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации. — К.: "Наукова думка", 1973. — 264 с.
7. Грищенко А. Е., Грищенко Г. И., Третьяк В. П. Об одной задаче минимизации стоимости подземной части сооружения. — Весник КГУ, Сер. модел. сложных систем. — 1984. — №3. — С. 98–103.
8. Грищенко А. Е., Ляшко І. І., Канарский В. Ф., Дорошенко Н. И. О численно-аналитическом исследовании фильтрационного потока под насосными станциями канала Днепр—Донбасс. // Сб. Вычислительная и прикладная математика. — К., 1977. — Вып. 31. — С. 32–40.

ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРНЕТИКИ, КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, УКРАЇНА.

Надійшла 06.09.2014