Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2014, №3(117) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.956

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ МНОГОМЕРНОГО ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

С. А. Алдашев

Резюме. В работе для модельного вырождающегося многомерного эллиптико-параболического уравнения показана однозначная разрешимость и получен явный вид классического решения задачи Дирихле в цилиндрической области.

В данной работе для модельного вырождающегося многомерного эллиптико-параболического уравнения доказана однозначная разрешимость и получен явный вид классического решения задачи Дирихле в цилиндрической области.

Для общих эллиптико-параболическких уравнений второго порядка постановку первой краевой задачи (или задачи Дирихле) впервые осуществил Г. Фикера [1]. Дальнейшее изучение этой задачи приведено в [2].

Пусть $\Omega_{\alpha\beta}$ — цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, ..., x_m, t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = \beta < 0$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, ..., x_m)$.

Обозначим через Ω_α и Ω_β части области $\Omega_{\alpha\beta}$, а через Γ_α, Γ_β — части поверхности Γ, лежащие в полупространствах $t > 0$и $t < 0$; σ_α — верхнее, а σ_β — нижнее основание области $\Omega_{\alpha\beta}$.

Пусть далее S — общая часть границ областей Ω_α, Ω_β представляющая множество $\{t = 0,\ 0 < |x| < 1\}$ в E_m.

В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим вырождающееся смешанно эллиптико-параболическое уравнение

$$0 = \begin{cases} t^q \Delta_x u - u_t,\ t > 0, \\ |t|^p \Delta_x u + u_{tt},\ t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $p, q = const$, $p > 0$, $q \geq 0$, Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, ..., x_m$, $m \geq 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, ..., x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, ..., \theta_{m-1}, t$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta_1 < 2\pi$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i = 2, 3, ..., m-1$, $\theta = (\theta_1, ..., \theta_{m-1})$.

Определение 1. Найти решение уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$ при $t \neq 0$ из класса $C(\overline{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_{\sigma_\alpha} = \varphi_1(r, \theta), \quad u\Big|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t, \theta), \tag{2}$$

$$u\Big|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t,\theta),\ u\Big|_{\sigma_\beta} = \varphi_2(r,\theta). \tag{3}$$

Пусть $\left\{Y^k_{n,m}(\theta)\right\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \le k \le k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $W^l_2(S)$, $l = 0, 1, ...$ — пространства Соболева.

Имеет место ([3])

Лемма 1. *Пусть $f(r,\theta) \in W^l_2(S)$. Если $l \ge m-1$, то ряд*

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} f^k_n(r) Y^k_{n,m}(\theta), \tag{4}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \le l - m + 1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. *Для того, чтобы $f(r,\theta) \in W^l_2(S)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (4) удовлетворяли неравенствам*

$$|f^1_0(r)| \le c_1,\ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{2l}|f^k_n(r)|^2 \le c_2,\ \ c_1,\, c_2 = const.$$

Через $\bar\varphi^k_{1n}(r)$, $\bar\varphi^k_{2n}(r)$, $\psi^k_{1n}(t)$, $\psi^k_{2n}(t)$, обозначим коэффициенты разложения ряда (4) по функциям $\varphi_1(r,\theta)$, $\varphi_2(r,\theta)$, $\psi_1(t,\theta)$, $\psi_2(r,\theta)$.

Тогда справедлива

Теорема 1. *Если $\varphi_1(r,\theta), \varphi_2(r,\theta) \in W^l_2(S)$, $\psi_1(t,\theta) \in W^l_2(\Gamma_\alpha)$, $\psi_2(t,\theta) \in W^l_2(\Gamma_\beta)$, $l > \frac{3m}{2}$, то задача 1 однозначно разрешима.*

Доведення. В сферических координатах уравнение (1) в области Ω_α имеет вид

$$t^q\left(u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u\right) - u_t = 0, \tag{5}$$

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(sin^{m-j-1}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right),\ g_1 = 1,\ g_j = (sin\theta_1 ... sin\theta_{j-1})^2,\ j > 1.$$

Известно ([3]), что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m- -2)$, $n = 0, 1, \dots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y^k_{n,m}(\theta)$.

Так как искомое решение задачи 1 в области Ω_α принадлежит классу $C(\overline{\Omega}_\alpha) \cap C^2(\Omega_\alpha)$, то его можно искать в виде ряда

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar u^k_n(r,t) Y^k_{n,m}(\theta), \tag{6}$$

где $\bar u^k_n(r,t)$– функции, подлежащие определению.

Подставляя (6) в (5), используя ортогональность сферических функций $Y^k_{n,m}(\theta)$ ([3]), будем иметь

$$t^q\left(\bar u^k_{nrr} + \frac{m-1}{r}\bar u^k_{nr} - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar u^k_n\right) - \bar u^k_{nt} = 0,\ k = \overline{1, k_n},\ n = 0, 1, \dots, \tag{7}$$

при этом краевое условие (2), с учетом леммы 1, соответственно запишется в виде

$$\bar{u}_n^k(r,\alpha)=\bar{\varphi}_{1n}^k(r),\quad \bar{u}_n^k(1,t)=\psi_{1n}^k(t),\quad k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,\dots. \tag{8}$$

В (7), (8), произведя замену $\bar{\upsilon}_n^k(r,t)=\overline{u}_n^k(r,t)-\psi_{1n}^k(t)$, получим

$$t^q\left(\bar{\upsilon}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\bar{\upsilon}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{\upsilon}_n^k\right)-\bar{\upsilon}_{nt}^k=\overline{f}_n^k(r,t), \tag{9}$$

$$\bar{\upsilon}_n^k(r,\alpha)=\varphi_{1n}^k(r),\quad \bar{\upsilon}_n^k(1,t)=0,\ k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,\dots, \tag{10}$$

$$\overline{f}_n^k(r,t)=\psi_{1nt}^k+\frac{\lambda_n t^q}{r^2}\psi_{1n}^k(t),\ \varphi_{1n}^k(r)=\overline{\varphi}_{1n}^k(r)-\psi_{1n}^k(\alpha).$$

Произведя замену $\bar{\upsilon}_n^k(r,t)=r^{\frac{(1-m)}{2}}\upsilon_n^k(r,t)$, задачу (9), (10) приведем к следующей задаче

$$L\upsilon_n^k\equiv t^q\left(\upsilon_{nrr}^k+\frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\upsilon_n^k\right)-\upsilon_{nt}^k=f_n^k(r,t), \tag{11}$$

$$\upsilon_n^k(r,\alpha)=\widetilde{\varphi}_{1n}^k(r),\ \upsilon_n^k(1,t)=0, \tag{12}$$

$$\bar{\lambda}_n=\frac{((m-1)(3-m)-4\lambda_n)}{4},\ f_n^k(r,t)=r^{\frac{(m-1)}{2}}\overline{f}_n^k(r,t),\ \widetilde{\varphi}_{1n}^k(r)=r^{\frac{(m-1)}{2}}\varphi_{1n}^k(r).$$

Решение задачи (11), (12) ищем в виде $\upsilon_n^k(r,t)=\upsilon_{1n}^k r,t+\upsilon_{2n}^k(r,t)$, где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$L\upsilon_{1n}^k=f_n^k(r,t), \tag{13}$$

$$\upsilon_{1n}^k(r,\alpha)=0,\ \upsilon_{1n}^k(1,t)=0, \tag{14}$$

а $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$L\upsilon_{2n}^k=0, \tag{15}$$

$$\upsilon_{2n}^k(r,\alpha)=\widetilde{\varphi}_{1n}^k(r),\ \upsilon_{2n}^k(1,t)=0. \tag{16}$$

Решение выше указанных задач, рассмотрим в виде

$$\upsilon_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}R_s(r)T_s(t), \tag{17}$$

при этом пусть

$$f_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}a_{s,n}^k(t)R_s(r),\ \tilde{\varphi}_{1n}^k(r)=\sum_{s=1}^{\infty}b_{s,n}^k R_s(r). \tag{18}$$

Подставляя (17) в (13), (14), с учетом (18), получим

$$R_{srr}+\frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}R_s+\mu_{s,n}R_s=0,\ 0<r<1, \tag{19}$$

$$R_s(1)=0,\ \left|R_s(0)\right|<\infty, \tag{20}$$

$$T_{st}+\mu_{s,n}t^qT_s(t)=-a_{s,n}(t),\ 0<t<\alpha, \tag{21}$$

$$T_s(\alpha)=0. \tag{22}$$

Ограниченным решением задачи (19), (20) является ([4])

$$R_s(r)=\sqrt{r}J_\nu(\mu_{s,n}r), \tag{23}$$

где $\nu = n + \frac{(m-2)}{2}$, $\mu_{s,n}$– нули функций Бесселя первого рода $J_\nu(z)$, $\mu = \mu_{s,n}^2$.

Решением задачи (21), (22) является

$$T_{s,n}(t) = (\exp(-\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1}t^{q+1}))\int\limits_t^\alpha a_{s,n}^k(\xi)(\exp\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1}\xi^{q+1})d\xi. \qquad (24)$$

Подставляя (23) в (18), получим

$$r^{-\frac{1}{2}}f_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}^k(t)J_\nu(\mu_{s,n}r),\ r^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varphi}_{1n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}^k J_\nu(\mu_{s,n}r),\ 0 < r < 1. \qquad (25)$$

Выражение (25) — разложения в ряды Фурье-Бесселя [5], если

$$a_{s,n}(t) = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int\limits_0^1 \sqrt{\xi}f_n^k(\xi,t)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi, \qquad (26)$$

$$b_{s,n} = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int\limits_0^1 \sqrt{\xi}\tilde{\varphi}_{1n}^k(\xi)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi, \qquad (27)$$

$\mu_{s,n}$, $s = 1, 2, ...$ — положительные нули функций Бесселя $J_\nu(z)$, расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (17), (23), (24) получим решение задачи (13), (14)

$$\upsilon_{1n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r}T_{s,n}(t)J_\nu(\mu_{s,n}r), \qquad (28)$$

где $a_{s,n}^k(t)$, определяется из (26).

Далее, подставляя (17) в (15), (16), с учетом (18), будем иметь задачу

$$T_{st} + \mu_{s,n}^2 t^q T_s = 0,\ 0 < t < \alpha,\ T_s(\alpha) = b_{s,n},$$

решением которой является

$$T_{s,n}(t) = b_{s,n}\exp\left(\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1}(\alpha^{q+1} - t^{q+1})\right). \qquad (29)$$

Из (23), (29) получим

$$\upsilon_{2n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}\sqrt{r}(\exp\left(\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1}(\alpha^{q+1} - t^{q+1})\right)J_\nu(\mu_{s,n}r), \qquad (30)$$

где $b_{s,n}$ находится из (27).

Следовательно, единственным решением задачи (1), (2) в области Ω_α является функция

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\psi_{1n}^k(t) + r^{\frac{(1-m)}{2}}\left[\upsilon_{1n}^k(r,t) + \upsilon_{2n}^k(r,t)\right]\right\}Y_{n,m}^k(\theta), \qquad (31)$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$, $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ определяются из (28), (30).

Учитывая формулу [5] $2J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)$, оценки [6,3]

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + 0\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right), \ \nu \geq 0,$$

$$|k_n| \leq c_1 n^{m-2}, \ \left|\frac{\partial^l}{\partial\theta_j^l} Y_{n,m}^k(\theta)\right| \leq c_2 n^{\frac{m}{2}-1+l}, \ j = \overline{1, m-1}, \ l = 0, 1, \dots,$$

а также леммы, ограничения на заданные функции $\psi_1(t,\theta), \ \varphi_1(r,\theta)$, как в [7, 8], можно показать, что полученное решение (31) принадлежит классу $C(\bar{\Omega}_\alpha) \cap C^2(\Omega_\alpha)$.

Далее, из (28), (30), (31) при $t \to +0$ имеем

$$u(r,\theta,t) = \tau(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \tau_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta),$$

$$\tau_n^k(r) = \psi_{1n}^k(0) + \sum_{s=1}^{\infty} r^{\frac{(2-m)}{2}} \left[\int_0^\alpha a_{s,n}(\xi)\left(\exp\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1}\xi^{q+1}\right)d\xi + \right.$$
$$\left. + \, b_{s,n}\left(\exp\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1}\alpha^{q+1}\right)\right] J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n} r). \quad (32)$$

Из (26)–(28), (30), а также из лемм вытекает, что $\tau(r,\theta) \in W_2^l(S), \ l > \frac{3m}{2}$.

Таким образом, учитывая краевые условия (3) и (32), приходим к задаче Дирихле в области Ω_β для вырождающегося многомерного эллиптического уравнения

$$|t|^p \Delta_x u + u_{tt} = 0 \quad (33)$$

с краевыми условиями

$$u\Big|_S = \tau(r,\theta), \quad u\Big|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t,\theta), \ u\Big|_{\sigma_\beta} = \varphi_2(r,\theta), \quad (34)$$

которое имеет единственное решение [8].

В [8] приводится явный вид решения задачи (33), (34), поэтому можно записать представление решения и для задачи 1. Теорема доказана. □

Литература

1. Фикера Г. К единой теории краевых задач для эллиптико-параболических уравнений второго порядка: Сб. переводов. Математика. — 1963. — Т. 7, №6. — С. 99–121.
2. Олейник О. А., Радкевич Е. В. Уравнения с неотрицательной характеристической формой. — М.: Изд-во Моск. ун-та. 2010. — 360 с.
3. Михлин С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. — М.: Физматгиз, 1962. — 254 с.
4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1965. — 703 с.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2 — М.: Наука, 1974. — 297 с.

6. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М: Наука, 1977. — 659 с.
7. Алдашев С. А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. — Алматы: Гылым, 1994. — 170 с.
8. Алдашев С. А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для вырождающихся многомерных эллиптических уравнений // Матем. заметки. — 2013. — Т. 94, вып. 6. — С. 936–939.
9. Иванов П. Н. Управление нелинейными системами. — К: Науковий світ, 2008. — 249 с.
10. Петренко С. А. Комп'ютерна модель відстіників промислових відходів. // Міжнародна наукова конференція "Інтелектуальні системи прийняття рішень та проблеми обчислювального експерименту (ISDMCI'2001)", 19–23 травня 2001: матеріали / Євпаторія, Україна. — 2001. — Т. 1, ч. 3. — С. 78–81.

Казахский Национальный Педагогический Университет имени Абая, Алматы, Казахстан

Поступила 01.07.2014