

УДК 517.925.7+532.536

**О ТРАНСФОРМАЦИЯХ РАЗРЕЗОВ ПРИ КОНФОРМНОМ
ОТОБРАЖЕНИИ НЕКОТОРЫХ КРУГОВЫХ
МНОГОУГОЛЬНИКОВ,
ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ
ЖИДКОСТИ И ГАЗА**

Э. Н. БЕРЕСЛАВСКИЙ

РЕЗЮМЕ. Рассматривается линейное дифференциальное уравнение класса Фукса с шестью регулярными особыми точками, которое соответствует задаче о конформном отображении круговых шестиугольников в полярных сетках с двумя разрезами, характерных для теории струй и кавитации, теории глиссирования в газовой динамике, в теории движения грунтовых вод и теории фильтрации. С помощью численного моделирования показано, что при фиксировании параметра, характеризующего отношение радиусов окружностей, составляющих противоположные стороны многоугольника, на которых присутствуют разрезы, конфигурация и взаимное расположение последних существенно зависит не столько от известных свойств тета-функций, на основе которых конструируются частные решения рассматриваемого уравнения, сколько от диапазонов изменения постоянных конформного отображения, входящих в выражения для отображающих функций, а также модуля эллиптических функций.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение класса Фукса с двоякопериодическими коэффициентами

$$v'' + 2(\Delta_1 + \Delta_2)\Delta f(\tau)v' + \Delta g(\tau)v = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} f(\tau) &= sn(2K\tau, k)cn(2K\tau, k)dn(2K\tau, k), \\ g(\tau) &= 2k^2sn^6(2K\tau, k) + \lambda_2sn^4(2K\tau, k) + \lambda_1sn^2(2K\tau, k) + \lambda_0, \\ \Delta_j &= sn^2(2K\tau_j, k) - sn^2(2K\tau, k), \quad j = 1, 2, \quad \Delta = (\Delta_1\Delta_2)^{-1}, \end{aligned}$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода при модуле k [1], $sn(2K\tau, k)$, $cn(2K\tau, k)$, $dn(2K\tau, k)$ — эллиптические функции Якоби [1], $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ — дополнительные (акцессорные) параметры [2].

Уравнение (1) тесно связано с задачей о конформном отображении круговых шестиугольников в полярных сетках [3] с двумя разрезами. Области подобного вида весьма часто возникают в теории струй и кавитации [4–8], теории глиссирования [4, 7–9], в газовой динамике [10], в теории движения грунтовых вод и теории фильтрации [11, 12]. Особенно характерны

круговые шестиугольники с разрезами при решении задач со свободными поверхностями в подземной гидромеханике (см., например, [13–15]).

Следует отметить, что многие из областей комплексной скорости потоков механики жидкости и газа с помощью цепочки дробно-линейных преобразований сводятся к круговым шестиугольникам, которые исследуются ниже.

Хорошо известно [2, 3], что при интегрировании уравнений фуксового типа (1) возникают трудности принципиального характера. Дело в том, что помимо неопределенных аффиксов вершин многоугольников коэффициенты этих уравнений содержат еще и аксессуарные параметры, также неизвестные заранее. Эти параметры не определяются полностью положением особых точек уравнения и характеристическими показателями в них. Известно лишь [2, 3], что эти постоянные должны однозначно определяться геометрией многоугольника, однако связь указанных параметров с характеристиками заданного многоугольника также заранее неизвестна и до настоящего времени не существует общего и удобного метода решения этой проблемы.

В работах автора [16, 17] установлено, что при определенных соотношениях между аксессуарными параметрами и неизвестными постоянными конформного отображения уравнение (1) имеет два линейно независимых частных решения вид

$$v_{1,2}(\tau) = \exp(\pm \pi \tau i) \vartheta_n(\tau \pm \alpha i) \vartheta_n(\tau \pm \beta i) / \vartheta_4^2(\tau). \quad (2)$$

В (2) для тета-функций $\vartheta_n(\tau)$ с индексом n ($n = 1, 2, 3, 4$) придерживаемся записи, принятой в [18], α и β — некоторые подходящие вещественные постоянные конформного отображения. Заметим [19, 20], что по сравнению со всеми эллиптическими функциями тета-функции более стандартизованы: сигма-функции Вейерштрасса, все эллиптические функции Якоби и, наконец, все полные и неполные эллиптические интегралы 1–3 родов можно выразить через тета-функции. Они, как известно, периодичны, представлены чрезвычайно быстро сходящимися рядами и являются наилучшим средством для вычисления значений всех указанных эллиптических функций.

Дальнейшие исследования, проведенные с помощью численного моделирования и представленные ниже, показывают, что при конформном отображении рассматриваемого кругового многоугольника конфигурация разрезов (прямолинейных или круговых) и их взаимное расположение зависят не только и даже не столько от индекса n , характеризующего, по сути дела, свойства тета-функций, исходя из которых конструируется комбинация вида (2), сколько от диапазонов изменения как постоянных конформного отображения α и β , так и модуля k (что, по-видимому, до сих пор не рассматривалось в литературе по конформным отображениям и специальным функциям). Иными словами, при одном и том же значении индекса n разным диапазонам изменения постоянных α и β и модуля k могут соответствовать различные по своей конфигурации и взаимному расположению разрезы: в одних случаях отображающая функция дает прямолинейные

разрезы, в других – круговые. Это, в свою очередь, существенно расширяет сферу применения комбинаций типа (2) в практике конформных отображений, поскольку позволяет привлекать для решений задач более общую, чем (2) конструкцию из частных решений уравнения (1) вида

$$v_{1,2}(\tau) = \exp(\pm \pi \tau i) \vartheta_n(\tau \pm \alpha i) \vartheta_m(\tau \pm \beta i) / \vartheta_4^2(\tau), \quad (3)$$

где теперь наряду с n вводится другой индекс $m, m \neq n (m = 1, 2, 3, 4)$. Приводятся и анализируются результаты численных расчетов. Основные моменты работы анонсированы ранее [21].

2. КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ КРУГОВОГО ШЕСТИУГОЛЬНИКА В ПОЛЯРНЫХ СЕТКАХ С ДВУМЯ РАЗРЕЗАМИ

Пусть в плоскости w задан круговой шестиугольник $ABCDEF$ с прямыми углами при вершинах A, C, D и F и двумя углами, равными 2π , которые имеют вершины в точках B и E , т.е. с двумя разрезами.

Как это принято [3], такой многоугольник будем обозначать $\pi/2, 2\pi, \pi/2, \pi/2, 2\pi, \pi/2$. Учитывая специфику подобных многоугольников, связанную с обилием прямых углов и наличием разрезов [22], удобно при конформном отображении в качестве канонической области взять прямоугольник $ABCD$ плоскости τ (рис. 1):

$$0 < \operatorname{Re} \tau < 1/2, \quad 0 < \operatorname{Im} \tau < \rho/2, \quad \rho(k) = K'/K, \quad K' = K(k'), \quad k' = \sqrt{1 - k^2}.$$

В дальнейшем, следуя [3], круговой шестиугольник будем характеризовать взаимным расположением противоположных сторон AC и DF многоугольника, на которых могут встречаться разрезы. При этом рассмотрим случаи, которые характерны в аэро- и гидромеханике.

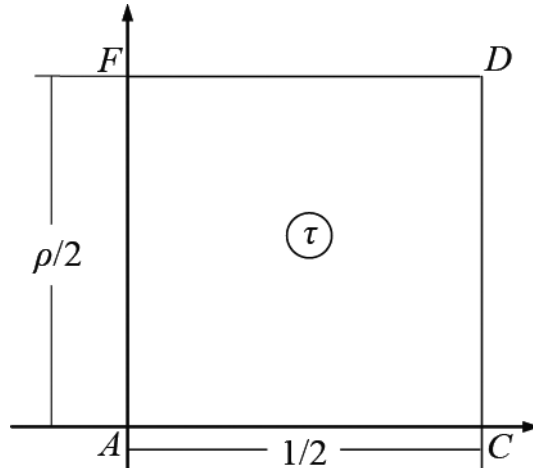


Рис. 1. Вспомогательная каноническая область параметрической переменной τ .

2.1. СЛУЧАЙ, КОГДА ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ СТОРОНЫ ПРИ
ПРОДОЛЖЕНИИ ПЕРЕСЕКАЮТСЯ (СЛИВАЮТСЯ)

Противоположные прямолинейные разрезы ABC и DEF с вершинами B и E при продолжении пересекаются или сливаются с соответствующими противоположными круговыми разрезами CDE и BCD с вершинами D и C (штриховые линии на рис. 2 и 3). В результате имеем дело с круговыми шестиугольниками $\{\pi/2, 2\pi, \pi/2, \pi/2, 2\pi, \pi/2\}$, $\{\pi/2, \pi/2, 2\pi, \pi/2, 2\pi, \pi/2\}$ и $\{\pi/2, 2\pi, \pi/2, 2\pi, \pi/2, \pi/2\}$. В этом случае, согласно [3], угловой мерой пересечения (слияния) противоположных сторон является величина $\pi/2(\pi)$.

Функция, совершающая конформное отображение прямоугольника плоскости τ на рассматриваемые круговые многоугольники, должна выражаться через отношение линейных комбинаций частных интегралов $\vartheta_1, 2(\tau)$ (2). Если составить такие комбинации и воспользоваться соответствием вершин A, C, D и E на плоскостях τ и ω , то для значений индекса $n = 4$ и $n = 1$ получим следующие представления:

$$w(\tau) = \begin{cases} -R^{1-2\tau} \vartheta_4(\tau - \alpha) \vartheta_4(\tau - \beta) / \vartheta_4(\tau + \alpha) \vartheta_4(\tau + \beta), & w_E < 0, \\ -R^{1-2\tau} \vartheta_1(\tau - \alpha) \vartheta_1(\tau - \beta) / \vartheta_1(\tau + \alpha) \vartheta_1(\tau + \beta), & w_B \geq 0. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь радиус большей окружности $R = (1 + \varepsilon^{1/2}) / (1 - \varepsilon^{1/2})$ зависит от параметра ε , $0 < \varepsilon < 1$, α и β — некоторые подходящие вещественные постоянные, связанные соотношениями

$$0 < \alpha < \beta < 1/2, \quad \alpha + \beta = 1/2 + \rho \ln R / 2\pi. \quad (5)$$

Условия (5) регламентируют взаимное расположение и конфигурацию разрезов ABC и DEF , а также BCD и DEF при применении первого выражения (4) и разрезов ABC и CDE , а также ABC и DEF при использовании второго представления (4) в зависимости как от величины параметра ε , а, следовательно, радиуса окружности R , так и диапазона изменения постоянной α (при этом диапазон изменения другой постоянной β определяется из второго соотношения (5)) и модуля k .

Анализ результатов вычислений показывает, что конформное отображение, осуществляемое функцией $w(\tau)$ (4), реализует наличие двух прямолинейных или прямолинейного с круговым разрезом (рис. 2 и 3) соответственно в следующих диапазонах изменения параметров: $\varepsilon \in (0, 0.3)$, $\alpha \in (0, 0.4)$, $k \in (0.7, 1)$ и $\varepsilon \in (0.3, 1)$, $\alpha \in (0.3, 0.5)$, $k \in (0, 0.7)$. При этом при малых значениях величин ε и α в первой формуле (4) большим значениям модуля k в большей степени соответствует присутствие двух прямолинейных разрезов, а меньшим k — прямолинейного с круговым. При больших значениях ε и α во второй формуле (4), наоборот, большим значениям модуля k отвечает в большей степени наличие прямолинейного разреза с круговым, а меньшим k — два прямолинейных разреза.

Расчеты по первой формуле (4) при значениях параметров $\varepsilon=0.2$, $\alpha = 0.3$, $k = 0.9$ дают значения вершин $x_B = -0.685$, $x_E = -0.0005$ прямолинейных разрезов, а при значениях параметров $\varepsilon = 0.3$,

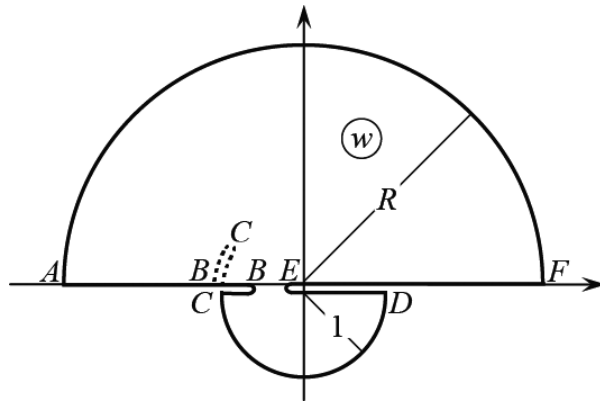


Рис. 2. Прямолинейный разрез DEF с вершиной E пересекается при продолжении или сливается с прямолинейным разрезом ABC с вершиной B или с круговым разрезом BCD с вершиной C (штриховая линия).

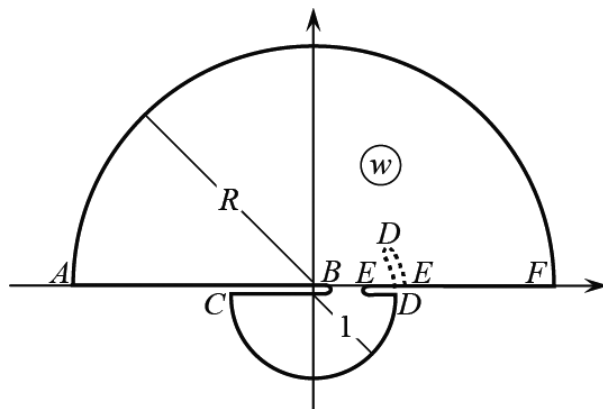


Рис. 3. Прямолинейный разрез ABC с вершиной B пересекается при продолжении или сливается с прямолинейным разрезом DEF с вершиной E или с круговым разрезом CDE с вершиной D (штриховая линия)..

$\alpha = 0.3, k = 0.6$ — вершин $x_E = -0.096$ прямолинейного и $x_C = -0.974, y_C = 0.227$ кругового разрезов.

Расчеты по второй формуле (4) при значениях параметров $\varepsilon = 0.3, \alpha = 0.3, k = 0.6$ приводят к вершинам $x_B = 0.0096$ прямолинейного и $x_D = 0.974, y_D = 0.227$ кругового разрезов, а при $\varepsilon = 0.2, \alpha = 0.3, k = 0.9$ — к вершинам $x_B = 0.0005, x_E = 0.685$ прямолинейных разрезов.

Можно заметить, что представления (4) соответствуют многоугольникам с симметричным относительно мнимой оси расположением прямолинейных и круговых разрезов. В этом, на наш взгляд, и проявляется отмеченная выше периодичность функций $\vartheta_4(\tau)$ и $\vartheta_1(\tau)$.

2.2. СЛУЧАЙ, КОГДА ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ СТОРОНЫ ЛЕЖАТ НА КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ ОКРУЖНОСТЯХ

Круговой разрез ABC или сторона AB при продолжении не пересекаются с противоположными сторонами соответственно EF и DF и лежат на концентрических окружностях (рис. 4 и 5). В результате имеем дело с круговым шестиугольником $\{\pi/2, 2\pi, \pi/2, 2\pi, \pi/2, \pi/2\}$, $\{\pi/2, \pi/2, 2\pi, \pi/2, \pi/2, 2\pi, \}$ и $\{\pi/2, 2\pi, \pi/2, \pi/2, \pi/2, 2\pi\}$. В этом случае, согласно [3], под угловой мерой пересечения противоположных сторон следует понимать величину, равную $i \ln R$. Отметим, что круговой шестиугольник $\{\pi/2, 2\pi, \pi/2, 2\pi, \pi/2, \pi/2\}$, с прямолинейным FEA и круговым ABC (штриховая линия на рис. 5) разрезами посредством другого соответствия вершин (при котором точка F переходит в начало координат на плоскости τ) сводится к рассмотрению кругового шестиугольника $\{\pi/2, 2\pi, \pi/2, 2\pi, \pi/2, \pi/2\}$ с прямолинейным ABC и круговым CDE (штриховая линия на рис. 3) разрезами.

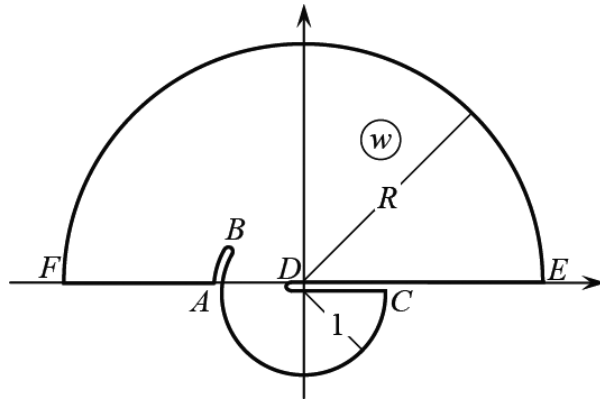


Рис. 4. Прямолинейный разрез CDE с вершиной D пересекается при продолжении с круговым разрезом ABC с вершиной B

Функция, дающая конформное отображение прямоугольника плоскости τ на рассматриваемые круговые многоугольники, может быть представлена в виде отношения двух линейно независимых частных интегралов $\vartheta_{1,2}(\tau)$ (2) и (3), которые соответствуют значениям индексов $n = 3$ и $n = 2$, $m = 3$, следующим образом:

$$w(\tau) = \begin{cases} -\exp(2\pi\tau i)\vartheta_3(\tau + \alpha i)\vartheta_3(\tau + \beta i)/\vartheta_3(\tau - \alpha i)\vartheta_3 \times \\ \times (\tau - \beta i), w_C, w_D \leq 0, \\ -\vartheta_2(\tau - \beta i)\vartheta_3(\tau + \alpha i)/\vartheta_2(\tau + \beta i)\vartheta_3(\tau - \alpha i), w_D > 0. \end{cases} \quad (6)$$

В этом случае подходящие вещественные постоянные α и β связаны такими соотношениями:

$$0 < \alpha, \beta < 1/2, \alpha + \beta = \rho/2 + \operatorname{arth}\sqrt{\varepsilon}/\pi \quad (7)$$

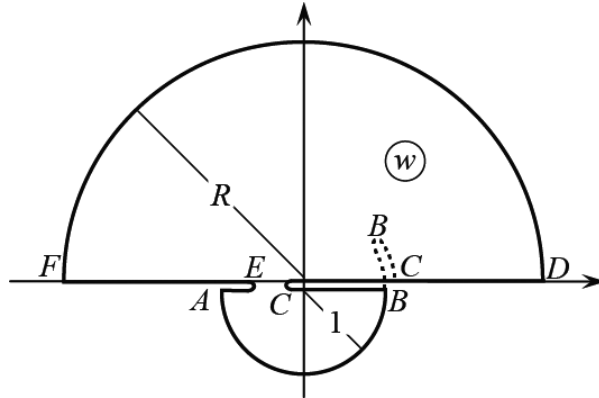


Рис. 5. Прямолинейный разрез FEA с вершиной E пересекается при продолжении или сливается с прямолинейным разрезом BCD с вершиной C или с круговым разрезом ABC с вершиной B (штриховая линия).

для первого представления (6) и

$$0 < \beta < \alpha < \rho/2, \quad \alpha - \beta = \operatorname{arth}\sqrt{\varepsilon}/\pi \quad (8)$$

для второго выражения (6).

Анализ результатов вычислений показывает, что конформное отображение, осуществляемое функцией $w(\tau)$ (6), реализует наличие кругового с прямолинейным и двух прямолинейных разрезов (рис. 4, 5) соответственно в следующих диапазонах изменения параметров: $\varepsilon \in (0, 0.2)$, $\alpha \approx \varepsilon$, $k \in (0.7, 1) \cup \varepsilon \in (0.2, 1)$, $\alpha \leq \varepsilon$, $k \in (0.2, 0.9)$ и $\varepsilon \in (0, 0.2)$, $\alpha \in (0.2, 0.6)$, $k \in (0, 0.7) \cup \varepsilon \in (0.2, 1)$, $\alpha \in (0.3, 0.8)$, $k \in (0, 0.7)$.

При этом в отличие от предыдущего случая здесь при малых значениях величин ε и α в первой формуле (6) большим значениям модуля k в большей степени соответствует наличие кругового с прямолинейным разрезом и, наоборот, большим значениям ε и α и меньшим k — два прямолинейных разреза. При малых величинах ε уже начиная со значений $\alpha = 0.2$ в диапазонах $\varepsilon \in (0, 0.5)$, $\alpha \geq \varepsilon \cup \varepsilon \in (0.5, 1)$, $\alpha < \varepsilon$ независимо от модуля k круговой разрез с прямолинейным отсутствует. Что касается второй формулы (6), то, наоборот, при малых значениях параметра ε , постоянной α и модуля k преобладают оба прямолинейных разреза. При этом подобные разрезы присутствуют при любых допустимых значениях ε , α и k , в то время, как в диапазонах $\varepsilon \in (0, 0.5)$, $\alpha \in (0.6, \rho/2) \cup \varepsilon \in (0.5, 1)$, $\alpha \in (0.1, 0.6)$ независимо от модуля k круговой разрез исчезает вовсе.

Расчеты по первой формуле (6) при значениях параметров $\varepsilon = 0.2$, $\alpha = 0.2$, $k = 0.8$ дают значения вершин $x_B = -0.989$, $y_B = 0.144$,

$x_D = -0.258$ кругового и прямолинейного разрезов, а при значениях $\varepsilon = 0.3$, $\alpha = 0.3$, $k = 0.3$ — вершин $x_C = -0.301$, $x_E = -0.768$ прямолинейных разрезов.

Расчеты по второй формуле (6) при значениях параметров $\varepsilon = 0.4$, $\alpha = 0.3$, $k = 0.7$ приводят к вершинам $x_B = -0.144$, $y_B = 0.983$, $x_D = -0.144$ кругового и прямолинейного разрезов, а при $\varepsilon = 0.4$, $\alpha = 0.3$, $k = 0.3$ — к вершинам $x_C = -0.447$, $x_E = -0.907$ обоих прямолинейных разрезов.

Справедливость представлений (4) и (6) при выполнении соотношений (5) и (7), (8) соответственно устанавливается непосредственной проверкой с учетом свойств тета-функций.

3. ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ О ТЕЧЕНИЯХ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Отметим, что параметр ε , который характеризует величину отношения R радиусов окружностей, в гидромеханике представляет собой интенсивность инфильтрации или испарения со свободной поверхности, а вершина круговых разрезов многоугольников соответствуют при этом в области годографа скорости точке перегиба на кривой депрессии. Так что различная конфигурация разрезов кругового многоугольника есть не что иное, как проявление трансформации фильтрационных потоков жидкости в зависимости от влияния различных физических факторов, характеризующих изучаемую модель течения, и, в первую очередь, от интенсивности инфильтрации или испарения на свободной поверхности. Некоторые практические результаты, полученные на основе изложенной выше методики, приведены в [23].

ЛИТЕРАТУРА

1. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971. — 1108 с.
2. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. — М.; Л.: Гостехиздат, 1950. — 436 с.
3. Коппенфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений. — М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
4. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. — М.: Наука, 1980.
5. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. — М.: Мир, 1964.
6. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. — М.: Наука, 1979.
7. Седов Л. И. Приложение теории функций комплексного переменного к некоторым задачам гидродинамики // Успехи мат. наук. — 1939. — Вып. 6. — С. 120–182.
8. Келдыш М. В., Седов Л. И. Приложения теории функций комплексного переменного к гидродинамике и аэродинамике. — М.: Наука, 1935.

9. Степанов Г. Ю. Гидродинамическая теория аппаратов на воздушной подушке. — М.: Мишгиз, 1963.
10. Фалькович С. В. К теории газовых струй. — // ПММ. — 1957. — Т. 21.— Вып. 4. — С. 458–464.
11. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. — М.: Гостехиздат, 1952. — 2-е изд. М.: Наука, 1977.
12. Кочина П. Я. Гидродинамика и теория фильтрации. Избр. тр. — М.: Наука, 1991.
13. Береславский Э. Н., Кочина П. Я. О некоторых уравнениях класса Фукса в гидро- и аэромеханике. // Изв. РАН. МЖГ. — 1992. — №5.— С. 3–7.
14. Кочина П. Я., Береславский Э. Н., Кочина Н. Н. Аналитическая теория линейных дифференциальных уравнений класса Фукса и некоторые задачи подземной гидромеханики. Ч. 1. Препринт. №567. — М.: Ин-т проблем механики РАН, 1996.
15. Береславский Э. Н., Кочина П. Я. О дифференциальных уравнениях класса Фукса, встречающихся в некоторых задачах механики жидкостей и газов. // Изв. РАН. МЖГ.— 1997. — №5.— С. 9–17.
16. Береславский Э. Н. О дифференциальных уравнениях класса Фукса, связанных с конформным отображением круговых многоугольников в полярных сетках. // Дифференц. уравнения.— 1997. — Т. 33.— №3.— С. 296–301.
17. Береславский Э. Н. Об интегралах некоторых дифференциальных уравнений класса Фукса, встречающихся в задачах механики жидкостей и газов // Дифференц. уравнения.— 2012.— Т.48.— №4.— С. 590–594.
18. Уиттекер Э. Д., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Т. 2: Пер. с англ. — М.: Физматгиз, 1963.
19. Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции: Пер. с англ. Т. 3. — М.: Наука, 1967.
20. Лаврентьев М. А., Шабат В. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1987.
21. Береславский Э. Н. О трансформациях разрезов при конформном отображении некоторых круговых многоугольников, возникающих в задачах течения со свободными границами. // ДАН. — 2013. — Т. 451. — №2. — С. 160–163.
22. Береславский Э. Н. О конформном отображении некоторых круговых многоугольников на прямоугольник. // Изв. вузов. Математика.— 1980. — №5. — С. 3–7.
23. Береславский Э. Н. О некоторых гидродинамических моделях, связанных с задачей Жуковского об обтекании шпунта. // Докл. РАН. — 2013. — Т. 448. — №5. — С. 529–533.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ, Г. САНКТ-ПЕТЕРБУРГ, ПР. ЛИТЕЙНЫЙ,
Д. 48/50, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ.

Поступила 01.11.2013