

УДК 517.9

НОВЫЙ ДВУХЭТАПНЫЙ ПРОКСИМАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ

Я. И. ВЕДЕЛЬ, В. В. СЕМЕНОВ

РЕЗЮМЕ. В работе предложен новый итерационный двухэтапный проксимальный метод решения задачи равновесного программирования в гильбертовом пространстве. Метод является развитием модификации Л. Д. Попова схемы Эрроу-Гурвица поиска седловых точек выпукло-вогнутых функций. Анализ сходимости метода проведен в предположении о существовании решения и при условиях псевдомонотонности и липшицевости бифункции.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: задача о равновесии, двухэтапный проксимальный метод, бифункция, псевдомонотонность, липшицевость, сходимость.

1. ВВЕДЕНИЕ

Популярным направлением современного прикладного нелинейного анализа является исследование задач равновесного программирования (неравенств Ки Фаня, задач о равновесии) вида

$$\text{найти } x \in C : F(x, y) \geq 0 \quad \forall y \in C, \quad (1)$$

где C — непустое подмножество гильбертова пространства H , $F : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ — бифункция. Задача (1) — удобная общая форма записи различных задач, возникающих в математической физике, исследовании операций и оптимизации [1, 2, 3, 4, 5]. Приведем несколько типичных формулировок.

- (1) Если $F(x, y) = f(y) - f(x)$, где $f : C \rightarrow \mathbb{R}$, то задача (1) является задачей условной минимизации $f \rightarrow \min_C$.
- (2) Если $F(x, y) = (Ax, y - x)$, где $A : C \rightarrow H$, то задача (1) сводится к классическому вариационному неравенству

$$\text{найти } x \in C : (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (2)$$

- (3) Пусть P, Q — выпуклые подмножества H , $C = P \times Q$, $L : C \rightarrow \mathbb{R}$ — выпукло-вогнутая функция. Точку $(\bar{x}, \bar{p}) \in C$ называют седловой точкой функции L , если

$$L(\bar{x}, p) \leq L(\bar{x}, \bar{p}) \leq L(x, \bar{p}) \quad \forall x \in P \quad \forall p \in Q. \quad (3)$$

Положим $F(v, w) = L(z, p) - L(x, y)$, где $v = (z, y)$, $w = (x, p)$. Тогда задача поиска седловой точки (3) равносильна задаче (1).

- (4) Пусть I — конечное множество индексов. Для каждого $i \in I$ заданы множество C_i и функция $f_i : C \rightarrow \mathbb{R}$, где $C = \prod_{i \in I} C_i$. Для $x = (x_i)_{i \in I} \in C$ обозначим $x^i = (x_j)_{j \in I, j \neq i}$. Точку $\bar{x} = (\bar{x}_i)_{i \in I}$ называют равновесием Нэша, если для всех $i \in I$ выполняются неравенства

$$f_i(\bar{x}) \leq f_i(\bar{x}^i, y_i) \quad \forall y_i \in C_i.$$

Определим функцию $F : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом

$$F(x, y) = \sum_{i \in I} (f_i(x^i, y_i) - f_i(x)).$$

Точка $\bar{x} \in C$ является равновесием Нэша тогда и только тогда, когда она является решением задачи (1).

Алгоритмам решения равновесных и близких задач посвящено много работ, например, [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21]. В методах, рассмотренных в работах [5, 6, 7, 8], на каждом шаге решаются вспомогательные равновесные задачи с сильно монотонными бифункциями. Отметим работы [10, 19, 20, 21], где предложены и исследованы итерационные алгоритмы, в которых на каждом шаге необходимо решать вспомогательные сильно выпуклые задачи минимизации.

В данной работе предложен новый итерационный двухэтапный проксимальный метод решения задачи равновесного программирования в гильбертовом пространстве. Метод является развитием модификации Л. Д. Попова [22, 23] схемы Эрроу-Гурвица поиска седловых точек выпукло-вогнутых функций. Анализ сходимости метода проведен в предположении о существовании решения и при условиях псевдомонотонности и липшицевости бифункции.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И АЛГОРИТМ

Всюду далее H — действительное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и порожденной нормой $\|\cdot\|$. Сильную и слабую сходимость в H последовательности (x_n) к x обозначим $\rightarrow$ и $\rightharpoonup$, соответственно.

Для непустого выпуклого замкнутого множества $C \subseteq H$ и бифункции $F : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ рассмотрим задачу о равновесии:

$$\text{найти } x \in C : F(x, y) \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (4)$$

Множество решений задачи (4) обозначим S .

Будем предполагать выполненными следующие условия:

- (A1) $F(x, x) = 0$ для всех $x \in C$;
- (A2) для всех $x, y \in C$ из $F(x, y) \geq 0$ следует $F(y, x) \leq 0$ (псевдомонотонность);
- (A3) для всех $x \in C$ функция $F(x, \cdot)$ полунепрерывна снизу и выпукла на C ;
- (A4) для всех $y \in C$ функция $F(\cdot, y)$ слабо полунепрерывна сверху на C ;

(A5) для всех $x, y, z \in C$ имеет место

$$F(x, y) \leq F(x, z) + F(z, y) + a \|x - z\|^2 + b \|z - y\|^2,$$

где a, b — положительные константы (липшицевость);

(A6) для ограниченных последовательностей $(x_n), (y_n)$ из C имеет место

$$\|x_n - y_n\| \rightarrow 0 \Rightarrow F(x_n, y_n) \rightarrow 0.$$

При выполнении условий (A1)–(A4) имеем

$$x \in S \Leftrightarrow x \in C : f(y, x) \leq 0 \quad \forall y \in C.$$

В частности, множество S — выпуклое и замкнутое.

Далее будем предполагать, что $S \neq \emptyset$.

Замечание 1. Условие (A5) типа липшицевости введено Mastroeni в [3]. Например, бифункция $F(x, y) = (Ax, y - x)$ с липшицевым оператором $A : C \rightarrow H$ удовлетворяет (A5). Действительно,

$$\begin{aligned} F(x, y) - F(x, z) - F(z, y) &= (Ax, y - x) - (Ax, z - x) - (Az, y - z) = \\ &= (Ax - Az, y - z) \leq \|Ax - Az\| \|y - z\| \leq L \|x - z\| \|y - z\| \leq \\ &\leq \frac{L}{2} \|x - z\|^2 + \frac{L}{2} \|y - z\|^2. \end{aligned}$$

Замечание 2. Условию (A6) удовлетворяет бифункция

$$F(x, y) = (Ax, y - x)$$

с липшицевым оператором $A : C \rightarrow H$.

Пусть $g : H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — собственная выпуклая полунепрерывная снизу функция. Напомним, что проксимальным оператором [24], ассоциированным с функцией g , называют оператор

$$H \ni x \mapsto \text{prox}_g x = \operatorname{argmin}_{y \in \operatorname{dom} g} \left(g(y) + \frac{1}{2} \|y - x\|^2 \right) \in \operatorname{dom} g.$$

Оператор prox_g — твердо нестягивающий (firmly nonexpansive) и

$$g(y) - g(z) + (z - x, y - z) \geq 0 \quad \forall y \in \operatorname{dom} g \Leftrightarrow z = \text{prox}_g x.$$

Для приближенного решения задачи (4) предлагаем следующий итерационный

Алгоритм 1. Для $x_1, y_1 \in C$ генерируем последовательность элементов $x_n, y_n \in C$ при помощи итерационной схемы

$$\begin{cases} x_{n+1} = \text{prox}_{\lambda \cdot F(y_n, \cdot)} x_n, \\ y_{n+1} = \text{prox}_{\lambda \cdot F(y_n, \cdot)} x_{n+1}, \end{cases}$$

где $\lambda > 0$.

Замечание 3. Если $F(x, y) = (Ax, y - x)$, то алгоритм 1 принимает вид:

$$\begin{cases} x_1 \in C, y_1 \in C, \\ x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda A y_n), \\ y_{n+1} = P_C(x_{n+1} - \lambda A y_n), \end{cases}$$

где P_C — оператор метрического проектирования на множество C .

Частный случай схемы из замечания 3 предложен российским математиком Л. Д. Поповым [22] для поиска седловых точек выпукло-вогнутых функций, определенных в конечномерном евклидовом пространстве. В недавних работах Ю. В. Малицкий и В. В. Семенов [23, 25] доказали сходимость этого алгоритма для неравенств с монотонными и липшицевыми операторами, действующими в бесконечномерном гильбертовом пространстве, а также предложили несколько его модификаций.

Относительно обоснования итерационного алгоритма 1 прежде всего заметим, что при выполнении для некоторого номера $n \in \mathbb{N}$ равенств

$$x_{n+1} = x_n = y_n \quad (5)$$

имеет место включение $y_n \in S$ и условие стационарности: $y_k = x_k = y_n$ для всех $k \geq n$. Действительно, равенство

$$x_{n+1} = \text{prox}_{\lambda \cdot F(y_n, \cdot)} x_n$$

означает

$$F(y_n, y) - F(y_n, x_{n+1}) + \frac{(x_{n+1} - x_n, y - x_{n+1})}{\lambda} \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

Из (5) следует

$$F(y_n, y) \geq 0 \quad \forall y \in C,$$

то есть $y_n \in S$.

Учитывая это соображение практическому варианту алгоритма 1 можно придать следующий вид.

Алгоритм 2. Задаем $x_1 \in C$, $y_1 \in C$, $\lambda > 0$ и $\varepsilon > 0$.

1. Для x_n и y_n вычисляем

$$x_{n+1} = \text{prox}_{\lambda \cdot F(y_n, \cdot)} x_n.$$

2. Если $\max \{\|x_{n+1} - x_n\|, \|y_n - x_n\|\} \leq \varepsilon$, то СТОП, иначе вычисляем

$$y_{n+1} = \text{prox}_{\lambda \cdot F(y_n, \cdot)} x_{n+1}.$$

3. Полагаем $n := n + 1$ и переходим на шаг 1.

Далее будем предполагать, что для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ условие (5) не имеет места.

Для доказательства сходимости алгоритма нам потребуются следующие факты.

Лемма 1. Пусть неотрицательные последовательности (a_n) , (b_n) таковы, что

$$a_{n+1} \leq a_n - b_n.$$

Тогда существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$.

Лемма 2 (Z. Oriá, [26]). Пусть последовательность (x_n) элементов гильбертова пространства H слабо сходится к элементу $x \in H$. Тогда для всех $y \in H \setminus \{x\}$ имеем

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\|.$$

3. ОСНОВНОЕ НЕРАВЕНСТВО

Анализ сходимости алгоритма начнем с доказательства важного неравенства для последовательностей (x_n) и (y_n) , порождаемых алгоритмом 1.

Имеет место

Лемма 3. Для порожденных алгоритмом 1 последовательностей (x_n) , (y_n) и элемента $z \in S$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 &\leq \|x_n - z\|^2 - (1 - 2\lambda b) \|x_{n+1} - y_n\|^2 - \\ &\quad - (1 - 4\lambda a) \|y_n - x_n\|^2 + 4\lambda a \|x_n - y_{n-1}\|^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 &= \|x_n - z\|^2 - \|x_n - x_{n+1}\|^2 + 2(x_{n+1} - x_n, x_{n+1} - z) = \\ &= \|x_n - z\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 - \\ &\quad - 2(x_n - y_n, y_n - x_{n+1}) + 2(x_{n+1} - x_n, x_{n+1} - z). \end{aligned} \quad (7)$$

Из определения точек x_{n+1} и y_n следует

$$\lambda F(y_n, z) - \lambda F(y_n, x_{n+1}) \geq (x_{n+1} - x_n, x_{n+1} - z), \quad (8)$$

$$\lambda F(y_{n-1}, x_{n+1}) - \lambda F(y_{n-1}, y_n) \geq -(x_n - y_n, y_n - x_{n+1}). \quad (9)$$

Используя неравенства (8), (9) для оценки скалярных произведений в (7), получаем

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 &\leq \|x_n - z\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ &\quad + 2\lambda \{F(y_n, z) - F(y_n, x_{n+1}) + F(y_{n-1}, x_{n+1}) - F(y_{n-1}, y_n)\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Из псевдомонотонности бифункции F и включения $z \in S$ следует

$$F(y_n, z) \leq 0,$$

а липшицевость F гарантирует выполнение неравенства

$$\begin{aligned} -F(y_n, x_{n+1}) + F(y_{n-1}, x_{n+1}) - F(y_{n-1}, y_n) &\leq \\ &\leq a \|y_{n-1} - y_n\|^2 + b \|y_n - x_{n+1}\|^2. \end{aligned}$$

Используя вышеприведенные оценки в (10), получаем

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 &\leq \|x_n - z\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ &\quad + 2\lambda a \|y_{n-1} - y_n\|^2 + 2\lambda b \|y_n - x_{n+1}\|^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Член $\|y_{n-1} - y_n\|^2$ оценим следующим образом

$$\|y_{n-1} - y_n\|^2 \leq 2\|y_{n-1} - x_n\|^2 + 2\|y_n - x_n\|^2.$$

Учтя эту оценку в (11), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 &\leq \|x_n - z\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ &\quad + 4\lambda a \|y_{n-1} - x_n\|^2 + 4\lambda a \|y_n - x_n\|^2 + 2\lambda b \|y_n - x_{n+1}\|^2, \end{aligned}$$

то есть к неравенству (6). $\square$

4. СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ

Перейдем непосредственно к доказательству сходимости алгоритма.

Пусть $z \in S$. Положим

$$\begin{aligned} a_n &= \|x_n - z\|^2 + 4\lambda a \|y_{n-1} - x_n\|^2, \\ b_n &= (1 - 4\lambda a) \|y_n - x_n\|^2 + (1 - 4\lambda a - 2\lambda b) \|y_n - x_{n+1}\|^2. \end{aligned}$$

Тогда (6) принимает вид

$$a_{n+1} \leq a_n - b_n.$$

Потребуем выполнения условия

$$0 < \lambda < \frac{1}{2(2a + b)}.$$

Тогда из леммы 1 можем сделать вывод, что существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\|x_n - z\|^2 + 4\lambda a \|y_{n-1} - x_n\|^2 \right)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left((1 - 4\lambda a) \|y_n - x_n\|^2 + (1 - 4\lambda a - 2\lambda b) \|y_n - x_{n+1}\|^2 \right) = 0.$$

Откуда получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x_{n+1}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_{n+1}\| = 0 \quad (12)$$

и сходимость числовой последовательности $(\|x_n - z\|)$ для всех $z \in S$. В частности, последовательности (x_n) , (y_n) ограничены.

Рассмотрим подпоследовательность (x_{n_k}) , слабо сходящуюся к некоторой точке $\bar{z} \in C$. Тогда из (12) следует, что $y_{n_k} \rightharpoonup \bar{z}$ и $x_{n_k+1} \rightharpoonup \bar{z}$. Покажем, что $\bar{z} \in S$. Имеем

$$F(y_n, y) \geq F(y_n, x_{n+1}) + \frac{(x_{n+1} - x_n, x_{n+1} - y)}{\lambda} \quad \forall y \in C. \quad (13)$$

Совершив предельный переход в (13) с учетом (12) и условий (A4), (A6), получим

$$\begin{aligned} F(\bar{z}, y) &\geq \limsup_{k \rightarrow \infty} F(y_{n_k}, y) \geq \\ &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ F(y_{n_k}, x_{n_k+1}) + \frac{(x_{n_k+1} - x_{n_k}, x_{n_k+1} - y)}{\lambda} \right\} = 0 \quad \forall y \in C, \end{aligned}$$

то есть $\bar{z} \in S$.

Покажем теперь, что $x_n \rightharpoonup \bar{z}$. Тогда из (12) следует, что и $y_n \rightharpoonup \bar{z}$. Рассуждаем от противного. Пусть существует подпоследовательность (x_{m_k})

такая, что $x_{m_k} \rightharpoonup \tilde{z}$ и $\tilde{z} \neq \bar{z}$. Ясно, что $\tilde{z} \in S$. Применим дважды лемму 2. Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \bar{z}\| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - \bar{z}\| < \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - \tilde{z}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \tilde{z}\| = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{m_k} - \tilde{z}\| < \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{m_k} - \bar{z}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \bar{z}\|, \end{aligned}$$

что невозможно. Следовательно, $x_n \rightharpoonup \bar{z}$.

Таким образом, имеет место

Теорема 1. Пусть H — гильбертово пространство, $C \subseteq H$ — непустое выпуклое замкнутое множество, для бифункции $F : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ выполнены условия (A1)–(A6) и $S \neq \emptyset$. Предположим, что $\lambda \in \left(0, \frac{1}{2(2a+b)}\right)$. Тогда порожденные алгоритмом 1 последовательности (x_n) , (y_n) слабо сходятся к решению $\bar{z} \in S$ задачи о равновесии (4), причем $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В работе был предложен новый итерационный двухэтапный проксимальный метод решения задачи равновесного программирования в гильбертовом пространстве. Метод является развитием модификации Л. Д. Попова [22, 23] схемы Эрроу-Гурвица поиска седловых точек выпукло-вогнутых функций. Анализ сходимости метода проведен в предположении о существовании решения и при условиях псевдомонотонности и липшицевости бифункции.

В одной из ближайших работ будет рассмотрен следующий регуляризованный сильно сходящийся вариант метода

$$\begin{cases} x_{n+1} = \text{prox}_{\lambda \cdot F(y_n, \cdot)}(1 - \alpha_n) x_n, \\ y_{n+1} = \text{prox}_{\lambda \cdot F(y_n, \cdot)}(1 - \alpha_{n+1}) x_{n+1}, \end{cases}$$

где $\lambda > 0$, (α_n) — бесконечно малая последовательность положительных чисел. Также запланировано изучение варианта метода с использованием метрики Брэгмана вместо евклидовой.

Интересным вопросом является обоснование использования алгоритма 1 в качестве элемента схемы поиска решения задачи о равновесии с априорной информацией, описанной в виде включения в множество неподвижных точек квазинерастягивающего оператора.

Еще одно перспективное направление заключается в развитии идей алгоритма 1 для решения стохастических задач равновесного программирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Байocchi К., Капело А. Вариационные и квазивариационные неравенства. — Москва: Наука, 1988. — 448 с.
2. Blum E., Oettli W. From optimization and variational inequalities to equilibrium problems // Math. Stud. — 1994, 63. — P. 123–145.

3. Mastroeni G. On auxiliary principle for equilibrium problems / G. Mastroeni // Publicatione del Dipartimento di Mathematica Dell'Universita di Pisa. — 2000. — 3. — P. 1244–1258.
4. Giannessi F., Maugeri A., Pardalos P. M. Equilibrium Problems: Nonsmooth Optimization and Variational Inequality Models. — New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers, 2004. — 300 p.
5. Combettes P. L., Hirstoaga S. A. Equilibrium Programming in Hilbert Spaces // J. Nonlinear Convex Anal. — 2005, 6. — P. 117–136.
6. Nguyen B., Dang T. T. H. Tikhonov regularization method for system of equilibrium problems in Banach spaces // Український математичний журнал. — 2009. — 61, №8. — С. 1098–1105.
7. Малицький Ю. В., Семенов В. В. Нові теореми сильної збіжності проксимального методу для задачі рівноважного програмування // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2010. — №3(102). — С. 79–88.
8. Semenov V. V. Strongly Convergent Algorithms for Variational Inequality Problem Over the Set of Solutions the Equilibrium Problems // In: M. Z. Zgurovsky and V. A. Sadovnichiy (eds.), Continuous and Distributed Systems, Solid Mechanics and Its Applications, Volume 211, Springer International Publishing Switzerland, 2014, pp. 131–146.
9. Корпелевич Г. М. Экстраградиентный метод для отыскания седловых точек и других задач // Экономика и математические методы. — 1976. — №4. — С. 747–756.
10. Антипин А. С. Равновесное программирование: проксимальные методы // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 1997. — 37, №11. — С. 1327–1339.
11. Semenov V. V. On the Parallel Proximal Decomposition Method for Solving the Problems of Convex Optimization // Journal of Automation and Information Sciences. — 2010. — V. 42, №4. — P. 14–18.
12. Денисов С. В. Параллельная схема декомпозиции для поиска седловой точки и равновесия Нэша // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2010. — №3(102). — С. 40–48.
13. Денисов С. В., Семенов В. В. Проксимальний алгоритм для дворівневих варіаційних нерівностей: сильна збіжність // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2011. — №3(106). — С. 27–32.
14. Войтова Т. А., Денисов С. В., Семенов В. В. Альтернуючий проксимальний алгоритм для задачі дворівневої опуклої мінімізації // Доповіді НАН України. — 2012. — №2. — С. 56–62.
15. Семенов В. В. Параллельная декомпозиция вариационных неравенств с монотонными операторами // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2012. — №2(108). — С. 53–58.
16. Семенов В. В. Параллельная декомпозиция операторных включений с максимальными монотонными операторами // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2013. — №2(112). — С. 155–160.
17. Semenov V. V. Hybrid Splitting Methods for the System of Operator Inclusions with Monotone Operators // Cybernetics and Systems Analysis. — 2014. — V. 50, №5. — P. 741–749.
18. Semenov V. V. A Strongly Convergent Splitting Method for Systems of Operator Inclusions with Monotone Operators // Journal of Automation and Information Sciences. — 2014. — V. 46, №5. — P. 45–56.

19. Tran D. Q., Muu L. D., Nguyen V. H. Extragradient algorithms extended to solving equilibrium problems // Optimization. — 2008. — 57(6). — P. 749–776.
20. Войтова Т. А., Денисов С. В., Семенов В. В. Сильно збіжний модифікований варіант методу Корпелевич для задач рівноважного програмування // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2011. — №1(104). — С. 10–23.
21. Lyashko S. I., Semenov V. V., Voitova T. A. Low-cost modification of Korpelevich's methods for monotone equilibrium problems // Cybernetics and Systems Analysis. — 2011. — V. 47, №4. — P. 631–639.
22. Попов Л.Д. Модификация метода Эрроу-Гурвица поиска седловых точек // Математические заметки. — 1980. — Т. 28, №5. — С. 777–784.
23. Malitsky Yu. V., Semenov V. V. An extragradient algorithm for monotone variational inequalities // Cybernetics and Systems Analysis. — 2014. — V. 50, №2. — P. 271–277.
24. Bauschke H. H., Combettes P. L. Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces. — Springer, 2011. — 408 + XVI p.
25. Malitsky Yu. V., Semenov V. V. A hybrid method without extrapolation step for solving variational inequality problems // Journal of Global Optimization. — 2015. — V. 61. — Issue 1. — P. 193–202.
26. Opial Z. Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings // Bull. Amer. Math. Soc. — 1967. — 73. — P. 591–597.

ФАКУЛЬТЕТ КИБЕРНЕТИКИ, КИЕВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ТАРАСА ШЕВЧЕНКО, УЛ. ВЛАДИМИРСКАЯ, 64, КИЕВ, 01601,
УКРАИНА, E-MAIL: YANDX@UKR.NET

ФАКУЛЬТЕТ КИБЕРНЕТИКИ, КИЕВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ТАРАСА ШЕВЧЕНКО, УЛ. ВЛАДИМИРСКАЯ, 64, КИЕВ, 01601,
УКРАИНА, E-MAIL: SEMENOV.VOLOGYA@GMAIL.COM

Поступила 19.10.2014