Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2015, № 1(118) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.9

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧІ МАКСИМІЗАЦІЇ ДОХОДУ НА ОСНОВІ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ РОСТУ КУЛЬТУРИ МІКРООРГАНІЗМІВ

І. П. Сіренко, Л. І. Потапенко, М. В. Пасічна, Н. І. Ляшко

Резюме. В роботі проводиться аналітичне дослідження задачі максимізації доходу на множині розв'язків системи звичайних диференційних рівнянь моделі Херберта, яка описує ріст популяції клітин мікроорганізмів в періодичній глибинній культурі.

Вступ

В роботі [1] наводиться модель Херберта, яка описує ріст популяції клітин мікроорганізмів в періодичній глибинній культурі. Модель подається такою системою рівнянь

$$\frac{dX}{dt} = X\left(\frac{\mu_m S}{K_S + S} - a\right), \tag{1}$$

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{cXS\mu_m}{K_S + S}, \tag{2}$$

$$X(0) = X_0, \quad S(0) = S_0, \tag{3}$$

де X — концентрація біомаси, S — концентрація субстрату, X_0 — початкова концентрація біомаси, S_0 — початкова концентрація субстрату, μ_m — максимальна питома швидкість синтезу біомаси, K_S — константа насичення швидкості синтезу, a — питома швидкість підтримання життєдіяльності, яка в рамках моделі вважається постійною, c — постійна, що характеризує ефективність перетворення субстрату в біомасу.

Для аналітичного дослідження моделі (1)–(3), за [2] перейдемо до безрозмірних змінних $x = cX/K_S$, $y = S/K_S$, $\tau = \mu_m t$, $\alpha = a/\mu_m$, причому $0 < \alpha < 1$.

Тоді система (1)–(3) набуде вигляду

$$\frac{dx}{d\tau} = x\left(\frac{y}{1+y} - \alpha\right), \tag{4}$$

$$\frac{dy}{d\tau} = -\frac{xy}{1+y}, \tag{5}$$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0. \tag{6}$$

1. Постановка задачі максимізації доходу на основі досліджуваної моделі

Для розробки конкретних біотехнологічних режимів через економічні обмеження виникає необхідність оптимізувати їх в деякому сенсі. Одним з важливих економічних показників є чистий дохід, що є сумою всіх грошових надходжень від реалізації продукції зі знаком плюс і видатків зі знаком мінус. Таким чином для вирощування біомаси мікроорганізмів в глибинній періодичній культурі функція чистого доходу буде мати вигляд

$$F(X,S,X_0,S_0,t-t_0)= \\ =-A_1X_0V-A_2S_0V+A_3XV+A_4SV-A_5(t-t_0)-A_6, \quad (7)$$

де V — об'єм ферментатора, A_1 — вартість одиниці посівної біомаси, A_2 — вартість одиниці субстрату, A_3 — вартість одиниці вирощеної біомаси (в загальному випадку $A_1 \neq A_3$), A_4 — вартість одиниці залишкового субстрату (в загальному випадку $A_2 \neq A_4$), A_5 — вартість одиниці часу роботи ферментатора, A_6 — одноразові витрати на кожну ферментацію. Перший, другий, п'ятий та шостий доданки описують витрати виробництва, а третій та четвертий — доходи виробництва.

В періодичній культурі об'єм культури не змінюється тому можна можна розглядати чистий дохід на одиницю об'єму ферментатора

$$\tilde{F}(X,S,X_0,S_0,t-t_0)=\frac{F(X,S,X_0,S_0,t-t_0)}{V}= \\ =-A_1X_0-A_2S_0+A_3X+A_4S-A_5\frac{(t-t_0)}{V}-A_6\frac{1}{V}. \quad (8)$$

Для зручності аналітичного дослідження перейдемо до безрозрозмірних змінних. Тоді (8) набуде вигляду

$$F(X,S,X_0,S_0,t-t_0)=f(x,y,x_0,y_0,\theta)= \\ =-a_1x_0-a_2y_0+a_3x+a_4y-a_5\theta-a_6, \quad (9)$$

де $a_1=A_1K_S/c$, $a_2=A_2K_S$, $a_3=A_3K_S/c$, $a_4=A_4K_S$, $a_5=A_5/(\mu_mV)$, $a_6=A_6/V$, $\theta=\tau-\tau_0$.

Таким чином, задача максимізації чистого доходу при вирощуванні біомаси в періодичній глибинній культурі зводиться до такою задачі нелінійної оптимізації

$$max f(z) \quad (10)$$

при $x>0,\ y>0,\ x_0>0,\ y_0>0,\ \tau>0$ та умовах, що є розв'язком системи (4)–(6) [1].

$$g_1(z)\equiv x-x_0+(1-\alpha)(y-y_0)-\alpha\ln(y/y_0)=0, \quad (11)$$

$$g_2(z)\equiv -\tau+\int_{y_0}^{y}\frac{(1+u)du}{u[(1-\alpha)(u-y_0)-\alpha\ln(u/y_0)-x_0]}, \quad (12)$$

де $z=(x,y,x_0,y_0,\theta)$.

2. Дослідження задачі максимізації доходу

Для аналізу задачі (10)–(12) використаємо функцію Лагранжа

$$L(z,\lambda) = f(z) - \lambda_1 g_1(z) - \lambda_2 g_2(z),$$

де $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, λ_1, λ_2 — множники Лагранжа, $g_1(z)$ та $g_2(z)$ задаються залежностями (11), (12).

Якщо в точці $z^* = (x^*, y^*, x_0^*, y_0^*, \theta^*)$ досягається максимум функції $f(z)$ при умовах (11) і (12), то існує хоча б одна ненульова система множників Лагранжа $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*)$ така, що точка (z^*, λ^*) є точкою стаціонарності функції Лагранжа $L(z,\lambda)$ за змінними $x, y, x_0, y_0, \theta, \lambda_1, \lambda_2$, які розглядаються як незалежні змінні. Необхідні умови стаціанарності функції Лагранжа зводяться до такою системи з 7 рівнянь

$$\frac{\partial L}{\partial x_0} \equiv -a_1 + \lambda_1 - \lambda_2 h(x_0, y_0, y) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_0} \equiv -a_2 - \lambda_1(\alpha - 1 + \frac{\alpha}{y_0}) + \lambda_2(h(x_0, y_0, y)(\alpha - 1 + \frac{\alpha}{y_0}) - \frac{1 + y_0}{x_0 y_0}) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} \equiv a_3 - \lambda_1 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} \equiv a_4 - \lambda_1(\alpha - 1 + \frac{\alpha}{y}) - \lambda_2 \frac{1 + y}{y((1-\alpha)(y - y_0) - \alpha \ln \frac{y}{y_0} - x_0)} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} \equiv -a_5 + \lambda_2 = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} \equiv -g_1(z) = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} \equiv -g_2(z) = 0,$$

де

$$h(x_0, y_0, y) = \int_{y_0}^{y} \frac{(1+u)du}{u(x_0 + (\alpha - 1)(u - y_0) + \alpha \ln \frac{u}{y_0})^2}.$$

Легко бачити, що ця система еквівалентна такій

$$a_1 - a_3 + a_5 h(x_0, y_0, y) = 0, \tag{13}$$

$$a_2 + a_1(\alpha - 1 + \frac{\alpha}{y_0}) + a_5 \frac{1 + y_0}{x_0 y_0} = 0, \tag{14}$$

$$a_4 + a_3(\alpha - 1 + \frac{\alpha}{y}) + a_5 \frac{1 + y}{xy} = 0, \tag{15}$$

$$x - x_0 - (\alpha - 1)(y - y_0) - \alpha \ln \frac{y}{y_0} = 0, \tag{16}$$

$$\theta = -\int_{y_0}^{y} \frac{(1+u)du}{u(x_0 + (\alpha - 1)(u - y_0) + \alpha \ln \frac{u}{y_0})}, \tag{17}$$

$$\lambda_1 = a_3, \quad \lambda_2 = a_5.$$

Для будь-якого розв'язку системи рівнянь (13)–(17) вектори $\operatorname{grad} g_1$ та $\operatorname{grad} g_2$ є лінійно незалежними, а

$$\operatorname{grad} f = \operatorname{grad} g_1 + \operatorname{grad} g_2,$$

тому для розв'язку $z^* = (x^*, y^*, x_0^*, y_0^*, \theta^*)$ задачі (10)–(12) існує єдина ненульова система множників Лагранжа $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*)$ така, що точка (z^*, λ^*) є стаціонарною точкою функції Лагранжа $L(z, \lambda)$.

Отже, справджується така теорема

Теорема 1. *Нехай z^* розв'язок задачі (10)–(12). Тоді справджуються такі твердження:*

1. *z^* є розв'язком системи рівнянь (13)–(17);*
2. *$a_3 < a_1$, $(1-\alpha)a_1 > a_2$, $(1-\alpha)a_3 > a_4$;*
3. *$x_0^* > a_5/((1-\alpha)a_1 - a_2)$, $y_0^* > a_1\alpha/[(1-\alpha)a_1 - a_2]$*
4. *$x^* > a_5/((1-\alpha)a_3 - a_4)$, $y^* > a_1\alpha/[(1-\alpha)a_3 - a_4]$*

Пункт 1 є наслідком метода множників Лагранжа.

Очевидно що рівняння (13)–(16) складають систему для знаходження невідомих x_0, y_0, x, y. Зокрема рівняння (14)–(15) дають необхідні співвідношення x_0 та y_0, а також між x та y відповідно для оптимального розв'язку:

$$x_0 = -\frac{a_5(1+y_0)}{(a_2 + a_1\alpha - a_1)y_0 + a_1\alpha}, \tag{18}$$

$$x = -\frac{a_5(1+y)}{(a_4 + a_3\alpha - a_3)y + a_3\alpha}. \tag{19}$$

З (18) випливає, що

$$\lim_{y_0\to\infty} x_0 = \frac{a_5}{(1-\alpha)a_1 - a_2} = x_1.$$

Якщо в (14) y_0 виразити через x_0, то отримаємо

$$y_0 = -\frac{a_5 + a_1\alpha x_0}{x_0(a_2 + a_1\alpha - a_1) + a_5}.$$

Звітси отримуємо

$$\lim_{x_0\to\infty} y_0 = \frac{a_1\alpha}{(1-\alpha)a_1 - a_2} = y_1.$$

При $(1-\alpha)a_1 > a_2$ та $a_1 > a_2$ легко бачити, що

$$\frac{dx_0}{dy_0} = \frac{a_5(a_2 - a_1)}{[(a_2 + a_1\alpha - a_1)y_0 + a_1\alpha]^2} < 0.$$

Отже, функція $x_0 = x_0(y_0)$, що задається рівнянням (18) монотонно спадає.

Якщо ж $(1-\alpha)a_1 \le a_2$, то

$$x_0 = -\frac{a_5(1-y_0)}{[a_2 - a_1(1-\alpha)]y_0 + a_1\alpha} < 0$$

при будь-якому y_0, що суперечить фізичному сенсу x_0. Отже, при $(1-\alpha)a_1 \le a_2$ функція Лагранжа не має стаціонарних точок з умовою $x_0 > 0$, $y_0 > 0$. Це означає, що задача знаходження максимума функції $f(z)$ при умовах (11), (12) не має розв'язку.

Аналогічно попередньому з (19) маємо:

1. $x_2 = \lim_{y\to\infty} x = \dfrac{a_5}{(1-\alpha)a_3 - a_4}$, $y_2 = \lim_{x\to\infty} y = \dfrac{a_3\alpha}{(1-\alpha)a_3 - a_4}$;
2. При $(1-\alpha)a_3 > a_4$ функція $x = x(y)$, що задається рівністю (19), монотонно спадає (крива 2 на рис. 1), $x_2 > 0$, $y_2 > y^0$;
3. Якщо $(1-\alpha)a_3 \le a_4$ то $x < 0$ при будь-якому y, тобто задача знаходження максимума функції $f(z)$ при умовах (11), (12) не має розв'язку.

Легко бачити, що $h \le 0$ через те, що $y \le y_0$. Тоді з (13) витікає, що $a_3 \le a_1$, причому $a_3 = a_1$ при $h = 0$, тобто $y = y_0$, $x = x_0$, $\tau = 0$. При $a_3 > a_1$ задача знаходження максимума функції $f(z)$ при умовах (11), (12) не має розв'язку через те, що не виконується необхідна умова (13).

Таким чином, Теорема 1 дає деякі необхідні умови існування розв'язку задачі (10)–(12), однак нічого не не каже про знечення функціонала чистого доходу $f(z)$. Хоча дана задача має сенс і при значеннях $f(z) \le 0$ (у цьому випадку мова йтиме про мінімізацію збитків), проте більший інтерес являє пошук умов, при яких $f(z) > 0$. Відповідь на це запитання дає

Теорема 2. *Функціонал чистого доходу $f(z)$ може набувати додатніх значень (при умові, що існують інтервали часу, на яких значення $f(z)$ зростає), тільки у двах випадках:*

1. *якщо $(1-\alpha)a_3 > a_4$ та $a_3 > a_1$;*
2. *якщо $(1-\alpha)a_3 > a_4$, $a_3 \le a_1$, $a_2 < (1-\alpha)a_3$, $a_2 < (1-\alpha)a_1$.*

Вище було показано, що при $(1-\alpha)a_3 \le a_4$ чистий дохід зменшується з плином часу. Отже необхідною умовою зростання чистого доходу є умова $(1-\alpha)a_3 > a_4$.

Підставивши x з (11) у вираз для $f(z)$ отримаємо

$$f(z) = (a_3 - a_1)x_0 - y_0[a_2 - a_3(1-\alpha)] - y[a_3(1-\alpha) - a_4] + a_3\alpha \ln\frac{y}{y_0} - a_5\tau - a_6.$$

Якщо $a_3 > a_1$, то з ростом x_0 член $(a_3 - a_1)x_0$ можна зробити як завгодно великим (тут ми не враховуємо чисто фізіологічні обмеження на x_0) При цьому доданки у виразі для $f(z)$ (крім $a_5\tau$) не змінюються, а τ зменшується тому, що в (12) знаменник підінтегрального виразу збільшується. Отже при достатньо великих x_0 можливо $f(z) > 0$.

Нехай $a_3 \le a_1$. Якщо $a_2 \ge (1-\alpha)a_3$ то $f(z) < 0$ для будь-якого z, тому що меншими нуля будуть і всі доданки у виразі для $f(z)$. Якщо ж $a_2 < (1-\alpha)a_3$ то з представлення $f(z)$ у вигляді

$$\begin{aligned} f(z) = (a_3 - a_1)x_0 + y_0[a_1(1-\alpha) - a_2] + y_0(1-\alpha)(a_3 - a_1) - \\ - y[a_3(1-\alpha) - a_4] + a_3\alpha \ln\frac{y}{y_0} - a_5\tau - a_6 \end{aligned}$$

витікає, що при $a_2 \ge (1-\alpha)a_3$ значення $f(z) < 0$ для будь-якого z, а при $a_2 < (1-\alpha)a_3$ можуть існувати такі значення z, при яких $f(z) > 0$.

Висновки

Якщо перейти до вихідних змінних то можна зробити такі висновки (відмітимо, що всі умови залежать не тільки від вихідних вартостей A_i, $i = \overline{1,6}$, але і від фізіологічних парметрів конкретної культури мікроорганізмів (μ_m, K_S, c, a):

1. Задача максимізації чистого доходу при вирощуванні біомаси в гомогенній періодичній культурі має розв'язок, якщо $A_3 < A_4$, $(1 - a/\mu_m)A_1 c > A_2, (1 - a/\mu_m)A_3 c > A_4$;
2. Оптимальні початкові значення концентрації біомаси X_0^* та концентрації субстрату S_0^* повинні задовольняти співвідношення
$$X_0 = -\frac{A_5(K_S + S_0)}{V\left\{\left[\dfrac{A_2\mu_m}{c} + A_1(\mu_m - a)\right]S_0 + A_1 a K_S\right\}}, \tag{20}$$
звідси випливає, що необхідно виконання умов
$$X_0^* > X_1 = \frac{A_5}{V\left[A_1(\mu_m - a) - \dfrac{A_2\mu_m}{c}\right]},$$
$$S_0^* > S_1 = \frac{aA_1K_S}{\left[A_1(\mu_m - a) - \dfrac{A_2\mu_m}{c}\right]}.$$
В іншому випадку процес буде не оптимальним.
3. Оптимальні кінцеві значення концентрації біомаси X^* та концентрації субстрату S^* повинні задовольняти співвідношення
$$X = -\frac{A_5(K_S + S)}{V\left\{\left[\dfrac{A_4\mu_m}{c} + A_3(a - \mu_m)\right]S + A_3 a K_S\right\}}, \tag{21}$$
в іншому випадку процес буде не оптимальним.
4. Якщо $(1 - a/\mu_m)A_3 c \le A_4$, то процес економічно збитковий.
5. Вирощування глибинної періодичної культури може приносити чистий дохід у двох випадках:
   (a) коли $(1 - a/\mu_m)A_3 > A_4$ та $A_3 \ge A_1$ (ця умова збігається з умовою висновку 5 і тому, відповідно, необхідно враховувати чисто фізіологічні обмеження на X_0);
   (b) коли до умов існування розв'язку задачі максимізації чистого доходу додається умова $A_3 c(1 - a/\mu_m) \ge A_2$.
   Відмітимо, що ці умови необхідні, але не достатні для отримання чистого доходу.

Література

1. Сіренко І. П. Дослідження математичної моделі росту культури мікроорганізмів. I. Основні властивості моделі // Журн. обчисл. та приклад. матем. — 2011, №1(104). — С. 121–126.
2. Романовский Ю. Я., Степанова Н. В., Чернавский Д. С. Математическая биофизика. — М.: Наука, 1984. — 304 с.

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна.
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, пр. Академіка Глушкова, 40, Київ, 03680 МСП, Україна.

Надійшла 05.09.2014