Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2015, №3(120) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.9
MSC 35D30, 35R11, 65M60

WEAK SOLVABILITY AND SPACE-TIME DISCRETIZATION FOR A VARIABLE-ORDER DIFFUSION EQUATION

A. L. Hulianytskyi
Faculty of Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, E-mail: andriyhul@gmail.com.

СЛАБКА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ І ПРОСТОРОВО-ЧАСОВА ДИСКРЕТИЗАЦІЯ ДЛЯ ЗМІННОПОРЯДКОВОГО РІВНЯННЯ ДИФУЗІЇ

А. Л. Гуляницький
Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна, E-mail: andriyhul@gmail.com.

Abstract. We study the solvability of a subdiffusion equation with a position-dependent time derivative in a bounded domain. The problem is reformulated in a such way that allows to investigate it employing the methods developed for constant-order fractional differential equations. A weak solvability theorem in a variable-order Sobolev space is proven. In order to solve the problem numerically, we suggest a space-time Galerkin method which combines finite-element space discretization with a polynomial approximation with respect to the time variable. The numerical results for the case of 1-dimensional space variable are presented.
Keywords: fractional differential equation, diffusion, weak solution, Galerkin method.

Резюме. Досліджено розв'язність рівняння субдифузії (повільної дифузії) в обмеженій області, яке містить дробову похідну за часом, порядок якої залежить від просторової змінної. Задачу зведено до вигляду, який дає змогу аналізувати її методами, розробленими для рівнянь сталого дробового порядку. Одержано теорему існування та єдиності слабкого розв'язку у соболєвському просторі змінного порядку. Для чисельного розв'язання запропоновано метод Гальоркіна з одночасною дискретизацією за усіма змінними: за допомогою поліноміальних функцій за часом і скінченноелементних — за просторовими змінними. Наведено результати обчислювального експерименту для випадку однієї просторової змінної.
Ключові слова: рівняння дробових порядків, дифузія, слабкий розв'язок, метод Гальоркіна.

1. Вступ

Дробові рівняння у частинних похідних (надалі — ДРЧП) виникають при моделювання ряду фізичних і біологічних систем [1]–[3]). Одним з процесів, що описуються такими рівняннями, є субдифузія (повільна дифузія), для якої середньоквадратичне зміщення частинки, що дифундує, зростає з часом повільніше, ніж лінійна функція; класичний закон Фіка при цьому не виконується. Зокрема, поширеним є випадок, коли середньоквадратичне зміщення зростає за степеневим законом з показником $\alpha \in (0,1)$. Таку закономірність відзначено для середовищ з пастками, які затримують частинки речовини, що дифундує. Важливою особливістю субдифузійних процесів є їхня нелокальність у часі: стан системи залежить від усієї передісторії процесу [1]. Відповідне одновимірне рівняння для щільності ймовірності має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_0^{1-\alpha} K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

де $K > 0$ — коефіцієнт дифузії, $D_0^{1-\alpha}$ — дробова похідна Рімана-Ліувілля порядку $1-\alpha$ за часовою змінною t з нижньою межею 0; цей оператор визначається виразом

$$(D_0^{\beta} u)(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{u(x,s)}{(t-s)^{\beta}}\, ds.$$

Рівняння (1) можна переписати у вигляді

$$^*D_0^{\alpha} u = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2}$$

де $(^*D_0^{\alpha} u)(x,t) = D_t^{\alpha}(u - u_0)$ — дробова похідна Капуто; $u_0(x) = u(x,0)$. Зауважимо, що для абсолютно неперервних за змінною t функцій, справедливе подання ([4], теорема 2.1):

$$(^*D_0^{\alpha} u)(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\frac{\partial u}{\partial s}(x,s)}{(t-s)^{\alpha}}\, ds.$$

Рівняння такого типу інтенсивно досліджувались впродовж останніх десятиліть. Ейдельман і Кочубей [5] одержали фундаментальний розв'язок для оператора з похідною Капуто за часом і рівномірно еліптичним оператором, що діє за просторовими змінними, зі змінними коефіцієнтами, які задовольняють умову Гьольдера.

Bazhlekova [6] довела строгу L_p-розв'язність для неоднорідного ДРЧП з похідною Рімана-Ліувілля за часом. Нещодавно Li й Xu [7, 8] встановили, що дробові рівняння порядку $\alpha \in (0,1)$ за своїм властивостями подібні до еліптичних рівнянь у тому розумінні, що їх можна переформулювати у термінах симетричних білінійних форм. Завдяки цьому, їхня розв'язність у відповідних просторах випливає з леми Лакса-Мільґрама. У цих самих статтях, Li й Xu запропонували метод Гальоркіна з поліноміальними базисними функціями. Ford, Xiao і Yan [9] розглянули дискретизацію за часом для багатовимірного рівняння субдифузії, а також його скінченноелементну дискретизацію за просторовими змінними.

Втім, усі ці дослідження стосуються ДРЧП сталого порядку. З іншого боку, Chechkin, Gorenflo і Sokolov [10] розглянули випадок, коли показник дифузії змінюється у просторі. Використовуючи апарат випадкових блукань з неперервним часом, вони вивели таке рівняння для щільності ймовірності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(K(x)D_0^{1-\alpha(x)}u\right), \tag{3}$$

де $x \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha(x) < 1$, $K(x) > 0$ (насправді $K(x)$ залежить від $\alpha(x)$). Тут слід наголосити, що друга похідна за просторовою змінною діє на похідну Рімана-Ліувілля, порядок якої також залежить від просторової змінної. У зв'язку з цим, безпосередньо звести рівняння (3) до вигляду (2) чи хоча б (1) з $\alpha = \alpha(x)$ не є можливим.

Мета роботи полягає у тому, щоб дослідити неоднорідний багатовимірний аналог рівняння (3). Розділ 2 містить основні позначення, постановку задачі і її перетворення на еквівалентну, більш зручну для подальших мікрувань. У розділі 3 представлено теорему слабкої розв'язності змінно-порядкової задачі з однорідними крайовими й неоднорідними початковими умовами. Для її доведення застосовано підхід, запропонований у [7, 8], і узагальнено його на випадок рівняння змінного порядку. У розділі 4 розглядається метод чисельного розв'язання цієї задачі.

2. Постановка задачі й основні позначення

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$ — обмежена область з гладкою межею $\partial\Omega$, $Q = \Omega \times [0, T]$. Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta(K(x)D_0^{1-\alpha(x)}u) = f \tag{4}$$

з початковою й крайовою умовами

$$u|_{t=0} = u_0(x), \tag{5}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{6}$$

де $u = u(x,t)$, $f = f(x,t)$, Δ — оператор Лапласа

$$\Delta\varphi = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2},$$

а $D_0^{1-\alpha(x)}$ — похідна Рімана-Ліувілля порядку $1-\alpha(x)$ за часом. Припустимо також, що $\alpha, K \in C^2(\overline{\Omega})$, $\min_{x\in\overline{\Omega}} \alpha(x) > \frac{1}{2}$ і $\max_{x\in\overline{\Omega}} \alpha(x) < 1$.

Перш за все, переформулюємо (4)–(6) як задачу з нульовою початковою умовою. Для цього зробимо заміну $\widetilde{u} = u - u_0$. Маємо задачу

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} - \Delta\left(K(x)D_0^{1-\alpha(x)}\widetilde{u}\right) = F, \tag{7}$$

$$\widetilde{u}|_{t=0} = 0, \tag{8}$$

$$\widetilde{u}|_{\partial\Omega} = 0, \tag{9}$$

де $F = f + \Delta\left(K(x)D_0^{1-\alpha(x)}u_0\right)$.

Проте у задачі (7)–(9) залишається дробова похідна за часом, на яку діє оператор Лапласа, що робить рівняння незручним для дослідження. У зв'язку з цим, введемо іншу функцію $\widetilde{v} = D_0^{1-\alpha(x)}\widetilde{u}$. Оскільки $\widetilde{u}|_{t=0} = 0$, маємо ([4], лема 2.5) $\widetilde{u} = I_0^{1-\alpha(x)}\widetilde{v}$, де $I_0^{1-\alpha(x)}$ позначає інтеграл Рімана-Ліувілля за t з нижньою межею 0.

Підставивши v у (7)–(9), одержуємо задачу

$$D_0^{\alpha(x)}\widetilde{v} - \Delta(K(x)\widetilde{v}) = F, \tag{10}$$

$$I_0^{1-\alpha(x)}\widetilde{v}|_{t=0} = 0, \tag{11}$$

$$\widetilde{v}|_{\partial\Omega} = 0, \tag{12}$$

Щоб спростити її, виконаємо заміну $v = K(x)\widetilde{v}$. Оскільки

$$D_0^{\alpha(x)}\widetilde{v}(x,t) = D_0^{\alpha(x)}\left(\frac{v(x,t)}{K(x)}\right) = \frac{1}{K(x)}D_0^{\alpha(x)}v(x,t),$$

$$(I_0^{1-\alpha(x)}\widetilde{v}(x,t))|_{t=0} = \frac{1}{K(x)}(I_0^{1-\alpha(x)}v(x,t))|_{t=0},$$

одержимо задачу

$$\frac{1}{K(x)}D_0^{\alpha(x)}v - \Delta v = F, \tag{13}$$

$$I_0^{1-\alpha(x)}v|_{t=0} = 0, \tag{14}$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0. \tag{15}$$

Зазначимо, що початкові умови, які включають інтеграли дробових порядків, є цілком стандартними для рівнянь з похідними Рімана-Ліувілля [11]. Розв'язок початкової задачі (4)–(6) при цьому можна подати у вигляді $u = u_0 + \frac{1}{K(x)}I_0^{1-\alpha(x)}v$. У наступному розділі досліджується розв'язність задачі (13)–(15).

Позначимо через $H_0^1(\Omega)$ класичний соболєвський простір першого порядку функцій з нульовим слідом, в якому задано норму $\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)}$, а через $H_0^{-1}(\Omega)$ спряжений до нього. Нехай також C_Ω — оптимальна стала у нерівності Пуанкаре $\|\varphi\|_{L_2(\Omega)} \le C_\Omega\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}$, $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Надалі позначатимемо, наприклад, через $\underline{g}$ й $\overline{g}$ мінімум і максимум функції g, а через C — додатну сталу, яка може бути різною в різних нерівностях. Через, наприклад, g_{x_i} позначатимемо частинну похідну функції g за змінною x_i.

3. Слабка розв'язність

Нагадаємо деякі властивості соболєвських просторів. Нехай $\mathcal{F}$ позначає перетворення Фур'є. Визначимо простір

$$H^\beta(\mathbb{R}) = \{g \in L_2(\mathbb{R}) | (1+\omega^2)^{\frac{\beta}{2}}(\mathcal{F}g)(\omega) \in L_2(\mathbb{R})\}$$

з нормою

$$\|g\|_{\beta,\mathbb{R}} = \|(1+\omega^2)^{\frac{\beta}{2}}(\mathcal{F}g)(\omega)\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Тепер введемо простір

$$H^{\beta}([0,T]) = \{g \in L_2([0,T]) | \exists \widetilde{g} \in H^{\beta}(\mathbb{R}) : \widetilde{g}|_{[0,T]} = g\}$$

з нормою

$$\|g\|_{\beta} = \inf_{\widetilde{g} \in H^{\beta}(\mathbb{R}), \widetilde{g}|_{[0,T]} = g} \|\widetilde{g}\|_{\beta,\mathbb{R}}.$$

Позначимо через $C_0^{\infty}([0,T])$ множину нескінченно диференційновних функцій з компактним носієм у $(0,T)$. Нехай H_0^{β} — поповнення $C_0^{\infty}([0,T])$ за $\|g\|_{\beta}$. Через $H_l^{\beta}([0,T])$, $H_r^{\beta}([0,T])$ і $H_s^{\beta}([0,T])$ позначимо поповнення $C_0^{\infty}([0,T])$ за нормами

$$\|g\|_{\beta,l}^2 = \|g\|_{L_2([0,T])}^2 + \|D_0^{\beta} g\|_{L_2([0,T])}^2,$$

$$\|g\|_{\beta,r}^2 = \|g\|_{L_2([0,T])}^2 + \|D_T^{\beta} g\|_{L_2([0,T])}^2,$$

$$\|g\|_{\beta,c}^2 = (D_0^{\beta} g, D_T^{\beta} g)_{L_2([0,T])},$$

де D_T^{β} — похідна Рімана-Ліувілля з верхньою межею T.

У [7] доведено таке твердження:

Лема 1. *Нехай* $\beta > 0$, $\beta \neq m + \frac{1}{2}, m \in \mathbb{N}$. *Тоді простори* $H_l^{\beta}([0,T])$, $H_r^{\beta}([0,T])$, $H_s^{\beta}([0,T])$ *і* $H_0^{\beta}([0,T])$ *рівні у тому розумінні, що їхні норми еквівалентні.*

Крім того, справедливе таке твердження [12]:

Лема 2. *Якщо* $0 < \beta < \frac{1}{2}$, *то* $H^{\beta}([0,T]) = H_0^{\beta}([0,T])$.

Для дослідження задачі змінного порядку нам знадобляться соболєвські простори змінного порядку. Нехай $C_0^{\infty}(Q)$ — множина нескінченно диференційовних функцій з компактним носієм у Q, а $W^{\beta(\cdot),1}$ — поповнення $C_0^{\infty}(Q)$ за нормою

$$\|u\|_{\beta(\cdot),1}^2 = \int_Q (D_0^{\beta(x)} u(x,t))^2 + \sum_{i=1}^{N} u_{x_i}^2(x,t)\, dQ,$$

де $D_0^{\beta(x)}$ — правобічна похідна Рімана-Ліувілля за змінною t з нижньою межею 0, а β є функцією просторових змінних. Через $W^{-\beta(\cdot),-1}$ позначатимемо простір, спряжений до $W^{\beta(\cdot),1}$.

Лема 3. *Якщо* $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, *то* $\Delta \left(D_0^{1-\alpha(x)} u_0 \right) \in W^{-\frac{\alpha(\cdot)}{2},-1}(Q)$.

Доведення. Можна безпосередньо перевірити, що

$$\Delta \left(D_0^{1-\alpha(x)} u_0 \right) = \Delta \left(\frac{u_0(x)}{\Gamma(\alpha(x)) t^{1-\alpha(x)}} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left(A_{i,1}(x) t^{\alpha(x)-1} + A_{i,2}(x) t^{\alpha(x)-1} \ln t + A_{i,3}(x) t^{\alpha(x)-1} \ln^2 t \right),$$

де

$$A_{i,1}(x) = \frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_i^2}\Gamma(\alpha(x)) + 2\frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i}\frac{\partial \Gamma(\alpha(x))}{\partial x_i},$$

$$A_{i,2}(x) = 2\frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i}\Gamma(\alpha(x))\frac{\partial \alpha(x)}{\partial x_i} + u_0(x)\frac{\partial(\Gamma(\alpha(x))\frac{\partial \alpha(x)}{\partial x_i})}{\partial x_i} + u_0(x)\frac{\partial \Gamma(\alpha(x))}{\partial x_i}\frac{\partial \alpha(x)}{\partial x_i},$$

$$A_{i,3}(x) = u_0(x)\Gamma(\alpha(x))\left(\frac{\partial \alpha(x)}{\partial x_i}\right)^2,$$

причому $A_{i,j} \in H_0^{-1}(\Omega)$ завдяки припущенням щодо u_0 й α. Щоб довести лему, достатньо показати, що $\Delta\left(D_0^{1-\alpha(x)}u_0\right) \in L_2([0,T], H_0^{-1}(\Omega))$. Спочатку розглянемо доданки $A_{i,1}(x)t^{\alpha(x)-1}$. Позначимо через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ двоїстість між $H_0^{-1}(\Omega)$ і $H_0^1(\Omega)$. Маємо

$$\int_0^T \|A_{i,1}(x)t^{\alpha(x)-1}\|^2_{H_0^{-1}(\Omega)}\,dt = \int_0^T \left(\sup_{\varphi\neq 0}\frac{\left\langle A_{i,1}\cdot t^{\alpha(x)-1},\varphi\right\rangle}{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}}\right)^2 dt =$$

$$= \int_0^T \left(\sup_{\varphi\neq 0}\frac{\left\langle A_{i,1}, t^{\alpha(x)-1}\varphi\right\rangle}{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}}\right)^2 dt \leq$$

$$\leq \int_0^T \left(\sup_{\varphi\neq 0}\frac{\|A_{i,1}\|_{H_0^{-1}(\Omega)}\|t^{\alpha(x)-1}\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}}{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}}\right)^2 dt =$$

$$= \|A_{i,1}\|^2_{H_0^{-1}(\Omega)}\int_0^T \left(\sup_{\varphi\neq 0}\frac{\|t^{\alpha(x)-1}\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}}{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}}\right)^2 dt.$$

Зауважимо, що

$$\|t^{\alpha(x)-1}\varphi\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^N\left(\int_\Omega (t^{\alpha(x)-1}\varphi_{x_i} + t^{\alpha(x)-1}\ln t\cdot\alpha_{x_i}\varphi)^2\,dx\right) \leq$$
$$\leq \sum_{i=1}^N\left(\int_\Omega 2t^{2\alpha(x)-2}\varphi_{x_i}^2 + 2t^{2\alpha(x)-2}\ln^2 t\cdot\alpha_{x_i}^2\varphi^2\,dx\right). \quad (16)$$

З іншого боку, можна вибрати таке δ, що $2\alpha(x)-\delta > 1\ \forall x\in\Omega$, а також таке $\mu = \mu(\delta) < 1$, що $\ln^2 t \leq t^{-\delta}$ for $t < \mu$. Для таких δ й μ має місце

$$\int_0^T \left(\sup_{\varphi\neq 0}\frac{\|t^{\alpha(x)-1}\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}}{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}}\right)^2 dt = \int_0^\mu \left(\sup_{\varphi\neq 0}\frac{\|t^{\alpha(x)-1}\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}}{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}}\right)^2 dt +$$

$$\int_\mu^T \left(\sup_{\varphi\neq 0}\frac{\|t^{\alpha(x)-1}\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}}{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}}\right)^2 dt = I_1 + I_2.$$

Тепер оцінимо ці два інтеграли окремо, використовуючи (16) і нерівність $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

$$I_1 \leq \int_0^\mu \left(\sup_{\varphi \neq 0} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\int_\Omega 2t^{2\alpha(x)-2}\varphi_{x_i}^2 + 2t^{2\alpha(x)-2} \ln^2 t \cdot \alpha_{x_i}^2 \varphi^2 \ dx \right)}}{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}} \right)^2 \ dt \leq$$

$$\leq 2 \int_0^\mu \left(\sup_{\varphi \neq 0} \frac{\sqrt{t^{2\underline{\alpha}-2} \sum_{i=1}^n \int_\Omega \varphi_{x_i}^2 \ dx} + \sqrt{t^{2\underline{\alpha}-2-\delta} \cdot \sum_{i=1}^N \int_\Omega \alpha_{x_i}^2 \varphi^2 \ dx}}{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}} \right)^2 \ dt \leq$$

$$2 \int_0^\mu \left(\sup_{\varphi \neq 0} \frac{t^{\underline{\alpha}-1} \sqrt{\sum_{i=1}^n \int_\Omega \varphi_{x_i}^2 \ dx} + t^{\underline{\alpha}-1-\frac{\delta}{2}} \sqrt{\sum_{i=1}^N \int_\Omega \alpha_{x_i}^2 \varphi^2 \ dx}}{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}} \right)^2 \ dt \leq$$

$$2 \int_0^\mu \left(t^{\underline{\alpha}-1} + M_1 t^{\underline{\alpha}-1-\frac{\delta}{2}} \right)^2 \ dt,$$

де $M_1 = C_\Omega \sum_{i=1}^n \overline{\alpha_{x_i}^2}$. Отже,

$$I_1 \leq 2 \int_0^\mu t^{2\underline{\alpha}-2} + 2M t^{2\underline{\alpha}-2-\frac{\delta}{2}} + M^2 t^{2\underline{\alpha}-2-\delta} \ dt < \infty.$$

Більше того,

$$I_2 \leq \int_\mu^T \left(\sup_{\varphi \neq 0} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\int_\Omega 2t^{2\alpha(x)-2}\varphi_{x_i}^2 + 2t^{2\alpha(x)-2} \ln^2 t \cdot \alpha_{x_i}^2 \varphi^2 \ dx \right)}}{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}} \right)^2 \ dt \leq$$

$$\leq 2 \int_\mu^T \left(\sup_{\varphi \neq 0} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\int_\Omega \mu^{2\alpha(x)-2}\varphi_{x_i}^2 + \mu^{2\alpha(x)-2} \ln^2 \mu \cdot \alpha_{x_i}^2 \varphi^2 \ dx \right)}}{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}} \right)^2 \ dt \leq$$

$$2(T-\mu)M_2^2,$$

де $M_2 = \mu^{\underline{\alpha}-1} \sqrt{1 + C_\Omega^2 \ln^2 \mu \cdot \sum_{i=1}^N \overline{\alpha_{x_i}^2}}$. З цих оцінок випливає, що $\|A_{i,1}(x) t^{\alpha(x)-1}\|_{L_2([0,T],H_0^1(\Omega))}^2 = \|A_{i,1}\|_{H_0^{-1}(\Omega)}^2 (I_1 + I_2) < \infty$.

Аналогічними міркуваннями можна переконатись, що $A_{i,2}(x) t^{\alpha(x)-1} \ln t$ і $A_{i,3}(x) t^{\alpha(x)-1} \ln^2 t$ також належать простору $L_2([0,T], H_0^{-1}(\Omega))$. $\square$

Лема 4. *Якщо* $v \in W^{\frac{\alpha(\cdot)}{2},1}(Q)$, *то* $(I_0^{1-\alpha(x)} v)|_{t=0} = 0$ *у* $L_2(\Omega)$.

Доведення. Достатньо показати, що $\|I_0^{1-\alpha(\cdot)} v(\cdot, t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \to 0$ при $t \to 0$. Маємо

$$\int_\Omega \left(I_0^{1-\alpha(x)} v(x,t) \right)^2 \ dx = \int_\Omega \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha(x))} \int_0^t \frac{v(x,s)}{(t-s)^{\alpha(x)}} \ ds \right)^2 \ dx \leq$$

$$\leq C \int_\Omega \left(\int_0^t \frac{v(x,s)}{(t-s)^{\alpha(x)}} \ ds \right)^2 \ dx \leq$$

$$\leq C\int_\Omega\left(\|v(x,\cdot)\|_{H^{\alpha(x)}([0,t])}\left\|\frac{1}{(t-\cdot)^{\alpha(x)}}\right\|_{L_{r(x)}([0,t])}\right)^2 dx,$$

де $r(x)=2/(1+\alpha(x))$, і використано вкладення $H^{\frac{\alpha}{2}}([0,t])$ у $L_{r'}([0,t])$ з $r'=2/(1-\alpha(x))$ [8]. Звідси

$$\int_\Omega\left(I_0^{1-\alpha(x)}v(x,t)\right)^2 dx\leq C\max_{x\in\Omega}\left\|\frac{1}{(t-\cdot)^{\alpha(x)}}\right\|^2_{L_{r(x)}([0,t])}\|v(x,\cdot)\|^2_{W^{\frac{\alpha(\cdot)}{2},1}(Q)}\to 0,$$

а отже

$$\left\|\frac{1}{(t-\cdot)^{\alpha(x)}}\right\|_{L_{r(x)}([0,t])}\to 0$$

рівномірно на Ω при $t\to 0$. □

Зауваження 1. Доведення леми 4 повторює міркування доведення леми 2.2, [8].

Лема 5. [8] *Нехай* $0<\beta<2$, $\beta\neq 1$, *а* $g,h\in H_0^{\frac{\beta}{2}}([0,T])$. *Тоді*

$$\left\langle D_0^\beta g,h\right\rangle_{H_0^{-\frac{\beta}{2}}\times H_0^{\frac{\beta}{2}}}=(D_0^{\frac{\beta}{2}}g,D_T^{\frac{\beta}{2}}h)_{L_2},$$

де простори й відповідні білінійні форми визначені на $[0,T]$.

Зауваження 2. Відповідно до леми 1, твердження леми 5 справедливе також для $g,h\in H^{\frac{\beta}{2}}([0,T])$, якщо при цьому $\beta<\frac{1}{2}$.

Тепер розглянемо слабку постановку (13)–(15). Позначимо

$$b(v,w)=\int_Q\frac{1}{K(x)}D_0^{\frac{\alpha(x)}{2}}v\cdot D_T^{\frac{\alpha(x)}{2}}w+\nabla v\cdot\nabla w\,dQ,$$

де ∇ — градієнт за просторовими змінними.

З леми 5 випливає, що для гладких v і w тотожність

$$b(v,w)=(D_0^{\alpha(\cdot)}v+\Delta v,w)_{L_2(Q)}$$

виконується для довільного $w\in W^{\frac{\alpha(\cdot)}{2},1}(Q)$.

Позначимо через $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\frac{\alpha(\cdot)}{2},1}$ двоїстість між $W^{-\frac{\alpha(\cdot)}{2},-1}(Q)$ і $W^{\frac{\alpha(\cdot)}{2},1}(Q)$.

Означення 1. Під слабким розв'язком задачі (13)–(15) розумітимемо v, для якого

$$b(v,w)=\langle F,w\rangle_{\frac{\alpha(\cdot)}{2},1}.$$

Теорема 1. *Нехай* $F\in W^{-\frac{\alpha(\cdot)}{2},-1}(Q)$. *Тоді задача (13)–(15) має єдиний розв'язок* $v\in W^{\frac{\alpha(\cdot)}{2},1}(Q)$, *причому*

$$\|v\|_{W^{\frac{\alpha(\cdot)}{2},1}(Q)}\leq C\|F\|_{W^{-\frac{\alpha(\cdot)}{2},-1}(Q)}.$$

Доведення. Відомо [8], що для $g \in H^\beta([0,T])$, $\beta < \frac{1}{2}$

$$(D_0^\beta g, D_T^\beta g)_{L_2([0,T])} \geq C_1 \cos(\pi\beta)\|g\|^2_{H^\beta([0,T])}$$

для деякого $C_1 > 0$. Отже, використовуючи цю оцінку з $\beta = \frac{\alpha(x)}{2}$ і додатність оператора Δ, одержуємо

$$b(v,v) \geq C\int_\Omega \frac{1}{K(x)}\cos\left(\frac{\pi\alpha(x)}{2}\right)\int_0^T (D_0^{\frac{\alpha(x)}{2}}v(x,t))^2\,dt\,dx + \int_Q \nabla v\cdot\nabla v\,dQ \geq$$

$$\geq C\cos\left(\frac{\pi\overline{\alpha}}{2}\right)\int_Q (D_0^{\frac{\alpha(x)}{2}}v(x,t))^2\,dQ + \int_0^T \|v(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,dt \geq C\|v\|^2_{W^{\frac{\alpha(\cdot)}{2},1}(Q)}.$$

Неперервність білінійної форми $b(\cdot,\cdot)$ перевіряється безпосередньо; отже, існування і єдиність розв'язку задачі випливає з леми Лакса-Мільґрама. □

Зауваження 3. Виконання початкової умови (14) забезпечується лемою 4.

Зауваження 4. Відповідно до леми 3, теорема 1 дає змогу розглядати неоднорідні початкові умови (5) з $u_0 \in H_0^1(\Omega)$.

4. Метод Гальоркіна

Побудуємо схему просторово-часової дискретизації системи (13)–(15). Виберемо базис $\{\vartheta_i\}_{i=1}^\infty$ у просторі $W^{\frac{\alpha(\cdot)}{2},1}(Q)$, позначимо через $W^{m,n}$ лінійну оболонку $\{\vartheta_{1,1},...,\vartheta_{m,n}\}$ й розглянемо наближення

$$v^{m,n}(x,t) = \sum_{i,j=1}^{m,n} c_{i,j}\vartheta_{i,j}(x,t),$$

де $c_{i,j}$ — невідомі коефіцієнти, які визначаються з системи

$$b(v^{i,j}, w^{k,l}) = \left\langle F, w^{k,l}\right\rangle_{\frac{\alpha(\cdot)}{2},1} \quad \forall w^{k,l} \in W^{m,n},$$

яка є системою лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i,j=1}^{m,n} c_{i,j} b(\vartheta_{i,j},\vartheta_{k,l}) = \langle F, \vartheta_{k,l}\rangle_{\frac{\alpha(\cdot)}{2},1}, \quad i,k = \overline{1,m}, j,l = \overline{1,n}. \tag{17}$$

Тоді наближений розв'язок задачі (4)–(6) виражається за формулою

$$u^{m,n}(x,t) = u_0(x) + \frac{1}{K(x)}\sum_{i,j=1}^{m,n} c_{i,j}(I_0^{1-\alpha(x)}\vartheta_{i,j})(x,t) \tag{18}$$

Оскільки $b(\cdot,\cdot)$ коерцитивна, система (17) має єдиний розв'язок.

Окремими проблемами є вибір конкретного базису $\{\vartheta_{i,j}\}_{i,j=1}^{m,n}$ й аналіз похибки апроксимації. Покладемо $\vartheta_{i,j}(x,t) = \psi_i(t)\cdot\omega_j(x)$, де $\{\psi_i\}$ й $\{\omega_j\}$ — лійнійно незалежні системи функцій у $H^{\overline{\alpha}/2}([0,T])$ й $H_0^1(\Omega)$ відповідно. А саме, виберемо $\psi_i(t) = \widetilde{P}_{i-1}(t)$ — зміщені многочлени Лежандра на $[0,1]$ (без обмеження загальності можна вважати, що $T = 1$). Цей вибір зумовлено тим, що для степеневої функцій відомі аналітичні формули дробового диференціювання й інтегрування, що дає змогу легко застосувати формулу (18). Крім того, многочлени Лежандра ортогональні у просторі L_2, що спрощує обчислення білінійної форми $b(\widetilde{P}_i(t)\cdot\omega_j(x), \widetilde{P}_k(t)\cdot\omega_l(x))$.

Якість запропонованого методу при моделюванні реальних процесів аномальної дифузії має стати предметом подальших досліджень. Нижче подано результати його тестування на кількох наборах вхідних даних.

Покладемо $\Omega=(0,1)$, $\alpha(x)=0.6+0.3\exp(-8(x-0.5)^2$, $u_0(x)=0$, $K(x)=1$. Розглянемо такі праві частини:

1. $F_1(x,t)=\left(\frac{2}{K(x)\Gamma(3-\alpha(x))}t^{2-\alpha(x)}+4\pi^2t^2\right)\sin(2\pi x)$. У цьому випадку $u(x,t)=t^2\sin(2\pi x)$.

2. $F_2(x,t)=\sqrt{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha(x)}t^{\frac{1-2\alpha}{4}}J_{\frac{1}{2}-\alpha(x)}(\pi\sqrt{t})-2\sin(2\pi\sqrt{t})$, де J_ν — функція Бесселя першого роду порядку ν. У цьому випадку $u(x,t)=\sin(\pi\sqrt{t})\cdot x(x-1)$.

2. $F_3(x,t)=\frac{\pi t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\left({}_1F_1(1;2-\alpha(x);i\pi x)+{}_1F_1(1;2-\alpha(x);-i\pi x)\right)x(x-1)-2\sin(\pi t)$, де ${}_1F_1$ — вироджена гіпергеометрична функція Куммера. У цьому випадку $u(x,t)=\sin(\pi t)\cdot x(x-1)$.

Ці формули можна перевірити, скориставшись таблицями дробових похідних ([13], с.140; [14], с.193). У таблиці наведено результати чисельного розв'язування задачі (13)–(15): відносні похибки у дискретизованій нормі просторів $L_2([0,T];L_2(\Omega))$ (похибка 1) і $L_2([0,T];H^1(\Omega))$ (похибка 2) для $m=11$ (многочлени Лежандра до 10 степеню), $n=50$.

права частина	похибка 1	похибка 2
F_1	$1.186*10^{-3}$	$2.503*10^{-3}$
F_2	$2.525*10^{-2}$	$8.859*10^{-3}$
F_3	$1.377*10^{-3}$	$4.551*10^{-3}$

Зауваження 5. Оскільки функція F_2 має особливість при $t=0$, похибка методу чутлива до точності інтегрування при обчисленні правої частини СЛАР (17).

Зауваження 6. Може здатись природною ідея дискретизації за часом

$$v^m(x,t)=\sum_{i=1}^{m}\psi_i(t)\omega_i(x), \tag{19}$$

де ψ_i — невідомі коефіцієнти, залежні від часу. Проте насправді така дискретизація неможлива: підставивши (19) у (13), одержимо сім'ю систем звичайних диференціальних рівнянь дробового порядку

$$\mathbf{B}D_0^{\alpha(x)}\Psi_m+\mathbf{A}\Psi_m=\mathbf{F},$$

де $\Psi_m=(\psi_i,...,\psi_m)^T$, $\mathbf{F}(t)=(\langle F(t),\omega_j\rangle)^T$, $\mathbf{B}=\{(\omega_i,\omega_j)_{L_2(\Omega)}\}_{i,j=1}^m$ і $\mathbf{A}=\{a(\omega_i,\omega_j)\}_{i,j=1}^m$.

Отже, замість однієї такої системи сталого порядку відносно функцій ψ_i, одержано сім'ю систем, параметризовану змінною $x\in\Omega$. Це означає, що ψ_i має залежати від x, що суперечить поданню (19).

Література

1. Metzler R., Klafter J. The restaurant at the end of the random walk: recent develpoments in the description of anomalous transport by fractional dynamics // J. Phys. A: Math. Gen. — 2004. — Vol. 37. — P. R161–R208.
2. Учайкин В. В. Метод дробных производных — Ульяновск: Издательство «Артишок», 2008. — 512 с.
3. Sokolov I. M. Models of anomalous diffusion in crowded environments // Soft Matter — 2012. — №8. — P. 9043-0952.
4. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applictaions of Fractional Differential Equations — Amsterdam: Elsevier, 2006. — xv + 523 p.
5. Eidelman S. D., Kochubei A. N. Cauchy problem for fractional diffusion equations // Differential Equations — 2004. — Vol. 199, №2. — P. 211–255.
6. Bajlekova, E. G. Fractional Evolution Equations in Banach Spaces, PhD Thesis. — Eindhoven: Press Facilities of Eindhoven University of Technology, 2001. — iv + 107 p.
7. Xianjuan Li, Chuanju Xu A space-time spectral method for the time fractional diffusion equation // SIAM J. Numer. Anal. — 2009. — Vol. 47, №3. — P. 2108–2131.
8. Xianjuan Li, Chuanju Xu, Existence and Uniqueness of the Weak Solution of the Space-Time Fractional Diffusion Equation and a Spectral Method Approximation // Commun. Comput. Phys. — 2010. — Vol. 8, №5. — P. 1016–1051.
9. Ford N. J., Jingyu Xiao, Yubin Yan A finite element method for time fractional partial differential equations // Frac. Calc. Appl. Anal. — 2011. — Vol. 14, №3. — P. 454–474.
10. Chechkin A. V., Gorenflo R., Sokolov I. M. Fractional diffusion in inhomogenous media // J.Phys. A: Math. Gen. — 2005. — Vol. 38. — P. L679–L684.
11. Podlubny I. Fractional Differential Equations. — San Diego: Academic Press, 1999. — xxiv + 340 p.
12. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. — Москва: Мир, 1971. — 372 с.
13. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.
14. Diethelm K.: The Analysis of Fractional Differential Equations. — Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. — viii + 244 p.

Надійшла 20.11.2015