Журнал обчислювальної та прикладної математики 2015, №3(120) Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.21: 519.6

MSC 60G17, 60G07, 68U20

ACCURACY OF SIMULATION SUB-GAUSSIAN WIENER PROCESSES IN THE UNIFORM METRIC

Anatolii Pashko

Faculty of Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, E-mail: aapashko@gmail.com.

ТОЧНІСТЬ МОДЕЛЮВАННЯ СУБГАУССОВИХ ВІНЕРІВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ В РІВНОМІРНІЙ МЕТРИЦІ

А. О. Пашко

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна, E-mail: aapashko@gmail.com.

Abstract. Studied sub-Gaussian Wiener and generalized Wiener random processes that represented as a random series. Constructed models of such processes. It analyzes estimation of accuracy and reliability of models Wiener random processes in uniform metric.
Keywords: Wiener process, simulation, accuracy, reliability.

Резюме. Вивчаються субгауссові вінерівський та узагальнений вінерівський випадкові процеси, що допускають зображення у вигляді рядів. Будуються моделі таких процесів. В роботі досліджуються оцінки точності і надійності моделей вінерівських випадкових процесів в нормі простору неперервних функцій.
Ключові слова: Вінерівський процес, статистичне моделювання, точність моделювання, надійність моделювання.

Вступ

В работі продовжуються дослідження методів статистичного моделювання субгауссових випадкових процесів, а саме, отримано оцінки точності і надійності моделювання субгауссових вінерівського та узагальненого вінерівського процесів в рівномірній метриці [1]. Моделі випадкових процесів будуються у вигляді строго субгауссових випадкових рядів. Ці моделі наближають випадкові процеси з заданими точністю і надійністю в просторі неперервних функцій. При отриманні результатів істотньо використовувались роботи [2]–[3]. В роботах [4]–[6] досліджувались оцінки точності і надійності моделювання вінерівського та узагальненого вінерівського випадкових процесів в деяких просторах Орліча. Відомості з теорії субгауссових випадкових величин та процесів містяться в [7]. Аналогічні результати для Sub_φ — узагальненого вінерівського процесу отримані в роботі

[10]. Методи статистичного моделювання вінерівських випадкових процесів використовуються при розв'язуванні задач атмосферної турбулентності, неоднорідностях земної поверхні, метеорології, обчисленні інтегралів.

1. Основні поняття і визначення.

Нехай (Ω, Σ, P) — стандартний ймовірносний простір, $T(T=[0,T]$ або $T=[0,\infty])$ — деяка параметрична множина.

Для моделювання випадкових процесів використовуються представлення процесів у вигляді стохастичних рядів $X(t)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\xi_k$, де $\{\xi_k\}$ — послідовність незалежних суюгауссових випадкових величин з нульовим середнім та $E\xi_k^2=\sigma_k^2$. Модель будується у вигляді $S(t,M)=\sum_{k=1}^{M} f_k(t)\xi_k$. При реальному моделюванні послідовності $\{\xi_k\}$ отримуються, як правило, строго субгауссові випадкові величини.

Нехай (T,Θ,μ) — деякий вимірний простір. Нехай всі $S(t,M)$ та $X(t)$ належать деякому функціональному простору $A(T)$.

Означення 1. Модель $S(t,M)$ наближає процес $X(t)$ з заданими точністю $\delta>0$ і надійністю ε, $\quad 0<\varepsilon<1$ в нормі функціонального простору $A(T)$, якщо має місце нерівність $P\{\|X(t)-S(t,M)\|_A \geq \delta\} \leq 1-\varepsilon$.

Модель $S(t,M)$, що наближає процес $X(t)$ з точністю $\delta>0$ і надійністю ε, називається апроксимаційною моделлю (А–модель).

Означення 2. Випадкова величина ξ називається субгауссовою, якщо існує таке $a>0$, що для всіх $\lambda \in R$ виконується нерівність $E\exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\{\frac{a^2\lambda^2}{2}\}$.

Клас субгауссових випадкових величин є банаховим простором. Властивості субгауссових випадкових величин і процесів досліджувались в роботі [7]. При $E\xi^2=a^2$ маємо клас строго субгауссових випадкових величин.

Означення 3. Вінерівським процесом або процесом дробового броунівського руху називається гауссівський процес $\{W(t), t\in T\}$ з нульовим середнім $EW(t)=0$ та кореляційною функцією

$$R(t,s)=\frac{1}{2}\big(t+s-|t-s|\big), \tag{1}$$

такий, що $W(0)=0$.

Вінерівський процес можна представити у вигляді ряду. Розклад за власними функціями кореляційного оператора броунівського мосту має вигляд [8]

$$W_1(t)=t\xi_0+\sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\pi n t)}{\pi n}\xi_n, \tag{2}$$

де $\{\xi_n, n=0,1...\}$ — незалежні стандартні гауссові випадкові величини.

Відповідна модель має вигляд

$$S_1(t,N)=t\xi_0+\sqrt{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin(\pi n t)}{\pi n}\xi_n,$$

а похибка моделювання обчислюється за формулою

$$S_1(t) = W_1(t) - S_1(t, N) = \sqrt{2} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n t)}{\pi n} \xi_n.$$

Розклад у вигляді ряду Фур'є має вигляд [8]

$$W_2(t) = t\xi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n t)}{2\pi n} \xi_n^1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(2\pi n t)}{2\pi n} \xi_n^2, \tag{3}$$

де $\{\xi_n^1, \xi_n^2, n = 0, 1...\}$ — незалежні стандартні гауссові випадкові величини.

Відповідна модель має вигляд

$$S_2(t, N) = t\xi_0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(2\pi n t)}{2\pi n} \xi_n^1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{1 - \cos(2\pi n t)}{2\pi n} \xi_n^2,$$

а похибка моделювання обчислюється за формулою

$$S_2(t) = W_2(t) - S_2(t, N) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n t)}{2\pi n} \xi_n^1 + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1 - \cos(2\pi n t)}{2\pi n} \xi_n^2.$$

Вінерівський процес є неперервним з ймовірністю одиниця, а отже, і сепарабельним. Для оцінки точності і надійності моделювання будемо використовувати результати роботи [1].

2. Оцінка точності моделювання строго субгауссового вінерівського процесу в рівномірній метриці.

Нехай у представленнях (2) та (3) послідовність $\{\xi_n^1, \xi_n^2, n = 0, 1...\}$ — це незалежні строго субгауссові випадкові величини з $E\xi_n^1 = E\xi_n^2 = 0$ та $E(\xi_n^1)^2 = E(\xi_n^2)^2 = 1$. В цьому випадку має місце твердження.

Теорема 1. *Ряди в представленнях (2) та (3), де* $\{\xi_n^1, \xi_n^2, n = 0, 1...\}$ *— незалежні центровані строго субгауссові випадкові величини з* $E(\xi_n^1)^2 = E(\xi_n^2)^2 = 1$*, рівномірно збігаються з ймовірністю одиниця і граничний процес є рівномірно неперервним з ймовірністю одиниця на* $T = [0, 1]$.

Твердження теореми випливає з відомої теореми Ханта [7]. Оскільки ряди збігаються, то граничний процес буде строго субгауссовим випадковим процесом, а кореляційна функція матиме вигляд (1)[9].

Будемо називати такий процес строго субгауссовим вінерівським процесом.

Для строго субгауссового вінерівського процесу має місце оцінка

$$\sup_{|t-s| \le h} \left(E(W(t) - W(s))^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\sup_{|t-s| \le h} \left(E(W(t))^2 + E(W(s))^2 - 2EW(t)W(s) \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sup_{|t-s| \le h} \left(t + s - 2\frac{1}{2}(t + s - |t - s|) \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sup_{|t-s|\le h} \big(|t-s|\big)^{\frac{1}{2}} \le h^{\frac{1}{2}} = \sigma(h).$$

І в цьому випадку $\sigma^{(-1)}(h) = h^2$.

Нехай ω — довільна точка з T, позначимо $\gamma_\omega = (E(W(\omega))^2)^{\frac{1}{2}}$ та $\nu = \sigma(\sup_{t\in T}|t-\omega|) \le \sigma(T)$. Нехай $\varepsilon_k = \sigma^{(-1)}(\nu p^k), k = 0,1,2...$ та $0 < p < 1$, V_{ε_k} — множина центрів мінімального покриття T замкненими кулями радіуса ε_k, $N(\varepsilon_k)$ — число точок в множині V_{ε_k}. Тоді має місце оцінка $N(\varepsilon) \le \frac{T}{2\varepsilon} + 1$.

Оскільки $\int_0^1 \big(\ln\big(\frac{1}{2u}+1\big)\big)^{\frac{1}{2}} du < \infty$, то викунуються умови теореми 1 із [1]. І для строго субгауссового вінерівського процесу мають місце твердження.

Теорема 2. *Нехай $W(t)$ — строго субгауссовий вінерівський випадковий процес. Для будь-якого $0 < p < 1$ при $x > D_1$ має місце нерівність*

$$P\Big\{\sup_{t\in T}|W(t)| > x\Big\} \le 2\exp\bigg\{-\frac{(x-D_1)^2}{2A_1}\bigg\}, \tag{4}$$

де

$$A_1 = \frac{\gamma_\omega^2}{1-p} + \frac{\nu^2}{p(1-p)^2},$$

$$D_1 = \frac{\sqrt{2}}{p(1-p)} \int_0^{\nu p} \ln^{\frac{1}{2}}(N(\sigma^{(-1)}(u)))du.$$

Позначимо $\gamma_0 = \sup_{t\in T}(E(W(t))^2)^{\frac{1}{2}}$ і виберемо $\beta > 0$ — довільне число таке, що $\beta \le \sigma(\inf_{s\in T}\sup_{t\in T}|t-s|) \le \sigma(T) = T^{\frac{1}{2}}$.

Теорема 3. *Нехай $W(t)$ — строго субгауссовий вінерівський випадковий процес. Для будь-якого $0 < p < 1$ при $x > D_1$ має місце нерівність*

$$P\Big\{\sup_{t\in T}|W(t)| > x\Big\} \le 2\exp\bigg\{-\frac{(x-D_2)^2}{2A_2}\bigg\}, \tag{5}$$

де

$$A_2 = \frac{\gamma_0^2}{1-p} + \frac{p\beta^2}{(1-p)^2},$$

$$D_2 = \sqrt{2}\bigg(\gamma_0 \ln^{\frac{1}{2}} N(\sigma^{(-1)}(p\beta)) + \frac{1}{p(1-p)} \int_0^{p^2\beta} \ln^{\frac{1}{2}}(N(\sigma^{(-1)}(u)))du\bigg).$$

Доведення. Доведення вказаних результатів слідує безпосередньо з наслідку теореми 1 та теореми 2 із [1]. □

Для отримання оцінок точності і надійності моделювання строго субгауссового вінерівського процесу в рівномірній метриці необхідно оцінити для представлення $W_1(t)$ величини

$$E(S_1(t))^2 = E(W_1(t) - S_1(t,N))^2 = E\bigg(\sqrt{2}\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n t)}{\pi n}\xi_n\bigg)^2$$

та

$$E(S_1(t)-S_1(s))^2 = E\biggl(\sqrt{2}\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{\sin(\pi n t)-\sin(\pi n s)}{\pi n}\xi_n\biggr)^2,$$

а для представлення $W_2(t)$ величини

$$E(W_2(t)-S_2(t,N))^2 = E\biggl(\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi n t)}{2\pi n}\xi_n^1 + \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1-\cos(2\pi n t)}{2\pi n}\xi_n^2\biggr)^2$$

та

$$E(S_2(t)-S_2(s))^2 = E\biggl(\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi n t)-\sin(2\pi n s)}{2\pi n}\xi_n^1 +$$

$$+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{(1-\cos(2\pi n t))-(1-\cos(2\pi n s))}{2\pi n}\xi_n^2\biggr)^2.$$

Для першої моделі, при $0 \le \kappa \le 1$, маємо

$$\gamma_0^2 = \sup_{t\in T}\biggl(2\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{\sin^2(\pi n t)}{\pi^2 n^2}\biggr) \le 2\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{\pi^2 n^2} \le \frac{2}{\pi^2 N}.$$

$$E(S_1(t)-S_1(s))^2 = E\biggl(\sqrt{2}\sum_{n=N+1}^{\infty}\biggl(\frac{\sin(\pi n t)}{\pi n}-\frac{\sin(\pi n s)}{\pi n}\biggr)\xi_n\biggr)^2 =$$

$$= E\biggl(\sqrt{2}\sum_{n=N+1}^{\infty}2\biggl(\cos\biggl(\frac{\pi n t+\pi n s}{2}\biggr)\sin\biggl(\frac{\pi n t-\pi n s}{2}\biggr)\biggr)\frac{\xi_n}{\pi n}\biggr)^2 \le$$

$$\le 8\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{\sin^2(\frac{\pi n t-\pi n s}{2})}{\pi^2 n^2} \le \frac{2^{3-2\kappa}}{\pi^{2-2\kappa}}|t-s|^{2\kappa}\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^{2-2\kappa}}.$$

В якості $\sigma(u)$ розглянемо $\sigma(u) = Ch^{\kappa}$, де

$$C = \biggl(\frac{2^{3-2\kappa}}{\pi^{2-2\kappa}}\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^{2-2\kappa}}\biggr)^{\frac{1}{2}}$$

при $0 < \kappa < \frac{1}{2}$. Отже, має місце твердження.

Теорема 4. *Модель $S_1(t,N)$ наближає процес $W_1(t)$ з заданими точністю $\delta > 0$ і надійністю $0 < \varepsilon < 1$ в рівномірній метриці, якщо мають місце нерівності $\delta > D_1(N)$ та*

$$1-\varepsilon \ge 2\exp\biggl\{-\frac{(\delta-D_1(N))^2}{2A_1(N)}\biggr\},$$

де

$$A_1(N) = \frac{2}{\pi^2 N(1-p)} + \frac{p\beta^2}{(1-p)^2},$$

$$D_1(N) = \sqrt{2}\biggl(\frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{N}}\ln^{\frac{1}{2}}(N(\sigma^{(-1)}(\beta p))) + \frac{1}{p(1-p)}\int_0^{p^2\beta}\ln^{\frac{1}{2}}(N(\sigma^{(-1)}(u)))du\biggr).$$

Для другої моделі,при $0 \le \kappa \le 1$, маємо

$$\gamma_0^2 = \sup_{t\in T}\Bigg(\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{\sin^2(2\pi nt)}{4\pi^2n^2} + \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{(1-\cos(2\pi nt))^2}{4\pi^2n^2}\Bigg) \le \frac{5}{4\pi^2N}.$$

$$E(S_2(t)-S_2(s))^2 =$$

$$= E\Bigg(\sum_{n=N+1}^{\infty}\Bigg(\frac{\sin(2\pi nt)-\sin(2\pi ns)}{2\pi n}\Bigg)\xi_n^1 + \sum_{n=N+1}^{\infty}\Bigg(\frac{\cos(2\pi ns)-\cos(2\pi nt)}{2\pi n}\Bigg)\xi_n^2\Bigg)^2 \le$$

$$\le \frac{1}{\pi^{2-2\kappa}}|t-s|^{2\kappa}\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^{2-2\kappa}}.$$

В якості $\sigma(u)$ розглянемо $\sigma(u) = Ch^{\kappa}$, де

$$C = \left(\frac{1}{\pi^{2-2\kappa}}\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^{2-2\kappa}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

при $0 < \kappa < \frac{1}{2}$.

Отже, має місце твердження.

Теорема 5. *Модель $S_2(t,N)$ наближає процес $W_2(t)$ з заданими точністю $\delta > 0$ і надійністю ε в рівномірній метриці, якщо мають місце нерівності $\delta > D_2(N)$ та*

$$1-\varepsilon \ge 2\exp\Bigg\{-\frac{(\delta - D_2(N))^2}{2A_2(N)}\Bigg\}$$

де

$$A_2(N) = \frac{5}{4\pi^2N(1-p)} + \frac{p\beta^2}{(1-p)^2},$$

$$D_2(N) = \sqrt{2}\Bigg(\frac{5^{\frac{1}{2}}}{2\pi\sqrt{N}}\ln^{\frac{1}{2}}(N(\sigma^{(-1)}(\beta p))) + \frac{1}{p(1-p)}\int_0^{p^2\beta}\ln^{\frac{1}{2}}(N(\sigma^{(-1)}(u)))du\Bigg).$$

3. Оцінка точності моделювання строго субгауссового узагальненого вінерівського процесу в рівномірній метриці.

Нехай $W_\alpha(t)$ — строго субгауссовий узагальнений вінерівський процес. Процес $W_\alpha(t)$ можна представити у вигляді [11]

$$W_\alpha(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\sin(x_nt)X_n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n(1-\cos(y_nt))Y_n, \tag{6}$$

де

$$c_n = \frac{\sqrt{2c}}{x_n^{\alpha+1}J_{1-\alpha}(x_n)},$$

$$d_n = \frac{\sqrt{2c}}{y_n^{\alpha+1}J_{-\alpha}(y_n)},$$

$\{x_n\}$ — дійсні нулі функції Бесселя $J_{-\alpha}(x)$,
$\{y_n\}$ — дійсні нулі функції Бесселя $J_{1-\alpha}(x)$,
$\{X_n, Y_n\}$ — незалежні гауссові випадкові величини з $EX_n^2 = EY_n^2 = 1$.

Модель узагальненого вінерівського процесу будуємо у вигляді

$$S_\alpha(t,N)=\sum_{n=1}^{N}c_n\sin(x_nt)X_n+\sum_{n=1}^{N}d_n(1-\cos(y_nt))Y_n,$$

де $\{X_n,Y_n\}$ — послідовність незалежних строго субгауссових випадкових величин. Розглянемо

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2(\sin(x_nt))^2+\sum_{n=1}^{\infty}d_n^2(1-\cos(y_nt))^2\le\sum_{n=1}^{\infty}(c_n^2+4d_n^2).$$

На основі роботи [12] маємо

$$x_n=(n+\frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2})\pi-\frac{4\alpha^2-1}{2\pi(4n+3-2\alpha)}+...$$

$$y_n=(n+\frac{5}{4}-\frac{\alpha}{2})\pi-\frac{4(1-\alpha)^2-1}{2\pi(4n+1+2\alpha)}+...$$

тобто, $x_n\approx y_n\approx n\pi$ при $n\to\infty$. Для функцій Бесселя $J_\alpha(x),\alpha>-1$ має місце асимптотичне співвідношення $J_{-\alpha}^2(x)+J_{1-\alpha}^2(x)\approx\frac{2}{x\pi}$ для великих x. Тоді для x_n та y_n справедливо $J_{1-\alpha}^2(x_n)\approx\frac{2}{x_n\pi}$ та $J_{-\alpha}^2(y_n)\approx\frac{2}{y_n\pi}$ при $n\to\infty$. Тому

$$\sum_{n=1}^{\infty}(c_n^2+4d_n^2)\approx\Gamma(2\alpha+1)\sin(\pi\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x_n^{2\alpha+1}}+\frac{4}{y_n^{2\alpha+1}}\right)<\infty.$$

А, отже, випадковий процес $W_\alpha(t)$ в представленні (6), коли $\{X_n,Y_n\}$ незалежні центровані строго субгауссові випадкові величини з $EX_n^2=EY_n^2=1$, буде строго субгауссівським випадковим процесом.

Означення 4. Строго субгауссовим узагальненим вінеровським випадковим процесом з індексом Хюрста $\alpha\in(0,1)$ називається строго субгауссівський випадковий процес $\{W_\alpha(t),t\in[0,T]\}$ з нульовим середнім $EW_\alpha(t)=0$ та кореляційною функцією

$$R(t,s)=\frac{1}{2}\big(|t|^{2\alpha}+|s|^{2\alpha}-|t-s|^{2\alpha}\big),$$

такий, що $W_\alpha(0)=0$.

Оскільки нулі функції Бесселя точно знайти не можемо, то будемо знаходити їх з деякою точністю. Позначимо наближені значення c_n,d_n,x_n,y_n відповідно $\tilde{c}_n,\tilde{d}_n,\tilde{x}_n,\tilde{y}_n$. Нехай

$$|c_n-\tilde{c}_n|\le h_n^c,$$
$$|d_n-\tilde{d}_n|\le h_n^d,$$
$$|x_n-\tilde{x}_n|\le h_n^x,$$
$$|y_n-\tilde{y}_n|\le h_n^y,$$

де h_n^c,h_n^d,h_n^x,h_n^y - задана точність. Тоді модель процесу $W_\alpha(t)$ має вигляд

$$\tilde{S}_\alpha(t,N)=\sum_{n=1}^{N}\tilde{c}_n\sin(\tilde{x}_nt)X_n+\sum_{n=1}^{N}\tilde{d}_n(1-\cos(\tilde{y}_nt))Y_n,$$

Похибка моделювання $\Delta(t)$ рівна $\Delta(t) = W_\alpha(t) - \tilde{S}_\alpha(t, M)$. Має місце оцінка

$$\sup_{|t-s|\le h}\Big(E(W_\alpha(t) - W_\alpha(s))^2\Big)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\sup_{|t-s|\le h}\Big(E(W_\alpha(t))^2 + E(W_\alpha(s))^2 - 2EW_\alpha(t)W_\alpha(s)\Big)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sup_{|t-s|\le h}\Big(|t|^{2\alpha} + |s|^{2\alpha} - 2\frac{1}{2}(|t|^{2\alpha} + |s|^{2\alpha} - |t-s|^{2\alpha})\Big)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sup_{|t-s|\le h}\Big(|t-s|^{2\alpha}\Big)^{\frac{1}{2}} \le h^\alpha = \sigma(h).$$

При $x > 0$ виконується нерівність

$$P\big\{\sup_{t\in T} \mid W_\alpha(t) - \tilde{S}_\alpha(t,N) \mid > \delta\big\} \le \inf_{0\le x\le 1}\big(G_1(x\delta) + G_2((1-x)\delta)\big),$$

де

$$G_1(x) = P\big\{\sup_{t\in T} \mid S_\alpha(t,N) - \tilde{S}_\alpha(t,N) \mid > x\big\},$$

$$G_2(x) = P\big\{\sup_{t\in T} \mid W_\alpha(t) - S_\alpha(t,N) \mid > x\big\}.$$

Лема 1. *Модель $\tilde{S}_\alpha(t,N)$ є A-моделлю, що наближає процес $W_\alpha(t)$ з точністю $\delta > 0$ і надійністю ε в рівномірній метриці, якщо виконується нерівність*

$$\inf_{0\le x\le 1}\big(G_1(x\delta) + G_2((1-x)\delta)\big) \le 1 - \varepsilon.$$

Для оцінювання ймовірності $G_1(x)$ доцільно використовувати теорему 2, а для оцінювання ймовірності $G_2(x)$ доцільно використовувати теорему 3.

Позначимо

$$Z_1(t) = \tilde{S}_\alpha(t,N) - S_\alpha(t,N)$$

та

$$Z_2(t) = W_\alpha(t) - S_\alpha(t,N).$$

Для отримання оцінок точності і надійності моделювання субгауссового узагальненого вінерівського процесу в рівномірній метриці необхідно оцінити для ймовірністі $G_1(x)$ величини $E(Z_1(t))^2$ та $E(Z_1(t) - Z_1(s))^2$, а для ймовірністі $G_2(x)$ необхідно оцінити величини $E(Z_2(t))^2$ та $E(Z_2(t) - Z_2(s))^2$. Оцінювати вказані величини будемо аналогічно, як і в роботі [10].

Для першої ймовірності маємо

$$\gamma_\omega^2 = E(Z_1(\omega))^2 =$$

$$= E\Bigg(\sum_{n=1}^{N} c_n \sin(x_n\omega)X_n + \sum_{n=1}^{M} d_n(1 - \cos(y_n\omega))Y_n -$$

$$- \sum_{n=1}^{N} \tilde{c}_n \sin(\tilde{x}_n\omega)X_n - \sum_{n=1}^{N} \tilde{d}_n(1 - \cos(\tilde{y}_n\omega))Y_n\Bigg)^2 \le$$

$$\leq \left(\sum_{n=1}^{N} (c_n h_n^x \omega + h_n^c)^2 + \sum_{n=1}^{N} (d_n h_n^y \omega + 2h_n^d)^2 \right).$$

При $0 < \kappa \leq 1$ має місце оцінка

$$E(Z_1(t) - Z_1(s))^2 =$$

$$= E\Bigg(\sum_{n=1}^{N} (c_n(\sin(x_n t) - \sin(x_n s)) - \tilde{c}_n(\sin(\tilde{x}_n t) - \sin(\tilde{x}_n s))) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{N} (d_n(\cos(y_n s) - \cos(y_n t)) - \tilde{d}_n(\cos(\tilde{y}_n s) - \cos(\tilde{y}_n t))) \Bigg)^2 \leq$$

$$\leq |t-s|^{2\kappa} 2^{3-2\kappa} \sum_{n=1}^{N} \Bigg(x_n^{2\kappa}(h_n^c)^2 + y_n^{2\kappa}(h_n^d)^2 + 2^{3-2\kappa} \Bigg(\tilde{c}_n^2 (h_n^x)^{2\kappa} \Bigg(\left(\frac{x_n + \tilde{x}_n}{2} \right)^{2\kappa} + 1 \Bigg) +$$

$$+ (\tilde{d}_n)^2 (h_n^y)^{2\kappa} \Bigg(\left(\frac{y_n + \tilde{y}_n}{2} \right)^{2\kappa} + 1 \Bigg) \Bigg) \Bigg) = B1_\kappa^2 |t - s|^{2\kappa}.$$

Для другої ймовірності маємо

$$\gamma_0^2 = \sup_{t \in [0,1]} \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} c_n \sin(x_n t) X_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} d_n (1 - \cos(y_n t)) Y_n \right)^2 \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} (c_n^2 + 4d_n^2).$$

При $0 < \kappa \leq 1$ має місце оцінка

$$E(Z_2(t) - Z_2(s))^2 =$$

$$= E\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} c_n(\sin(x_n t) - \sin(x_n s)) X_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} d_n(\cos(y_n s) - \cos(y_n t)) Y_n \right)^2 \leq$$

$$\leq \left(2^{2-2\kappa} \sum_{n=N+1}^{\infty} (c_n^2 (x_n)^{2\kappa} + d_n^2 (y_n)^{2\kappa}) \right) |t - s|^{2\kappa} \leq$$

$$\leq B2_\kappa^2 |t - s|^{2\kappa}.$$

З асимптотичної поведінки c_n і d_n та того, що $x_n \sim y_n \sim \pi n$, слідує, що останній ряд збігається при $\kappa < \alpha$.

Виберемо $x = \frac{1}{2}$ та покладемо $\omega = 0$. Тоді

$$\gamma_\omega^2(0) = E(Z_1(0))^2 \leq \sum_{n=1}^{N} \left((h_n^c)^2 + 4(h_n^d)^2 \right).$$

Має місце твердження.

Теорема 6. *Модель* $\tilde{S}_\alpha(t, N)$ *наближає процес* $W_\alpha(t)$ *з заданими точністю* $\delta > 0$ *і надійністю* ε *в рівномірній метриці, якщо для* $0 < p < 1$ *та* $\beta < \sigma(1)$ *мають місце нерівності* $\delta > \max(\tilde{D}1_(N), \tilde{D}_2(N))$ *та*

$$1 - \varepsilon \geq 2\left(\exp\left\{ -\frac{(\frac{\delta}{2} - \tilde{D}_1(N))^2}{2\tilde{A}_1(N)} \right\} + \exp\left\{ -\frac{(\frac{\delta}{2} - \tilde{D}_2(N))^2}{2\tilde{A}_2(N)} \right\} \right),$$

де

$$\tilde{A}_1(N) = \frac{\gamma_\omega^2(0)}{(1-p)} + \frac{\nu^2}{p(1-p)^2},$$

$$\tilde{A}_2(N) = \frac{\gamma_0^2}{(1-p)} + \frac{p\beta^2}{(1-p)^2},$$

$$\tilde{D}_1(N) = \frac{\sqrt{2}}{p(1-p)} \int_0^{\nu p} \ln^{\frac{1}{2}}(N(\sigma^{(-1)}(u)))du,$$

$$\tilde{D}_2(N) = \sqrt{2}\left(\gamma_0 \ln^{\frac{1}{2}}(N(\sigma^{(-1)}(\beta p))) + \frac{1}{p(1-p)} \int_0^{p^2\beta} \ln^{\frac{1}{2}}(N(\sigma^{(-1)}(u)))du\right).$$

Представляє інтерес використання методів статистичного моделювання вінерівського і узагальненого вінерівського процесів при розв'язуванні задач фінансової та актуарної математики, математичної статистики.

Література

1. Пашко А. О. Оцінка точності моделювання гауссових випадкових процесів в рівномірній метриці // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2014. — №1(115). — С. 119–131.
2. Kozachenko Yu. V., Pashko A. A. On the simulation of random fields. I // Theor. Probability and Math. Statist. — 2000. — №. 61. — P. 61–74.
3. Kozachenko Yu. V., Pashko A. A. On the simulation of random fields. II // Theor. Probability and Math. Statist. — 2001. — №62. — P.51–63.
4. Pashko A. A. Simulations of standart Brownian motion // Computer modelling and new Technologies. — 2014. — Vol. 18, №10. — P. 516–521.
5. Пашко А. О. Статистичне моделювання узагальненого вінерівського процесу // Науковий вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. — 2014. — Вип. 2. — С. 180–183.
6. Пашко А. О. Оцінка точності моделювання узагальненого вінерівського процесу // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія:математика і інформатика. — 2014. — Вип. 25, №1. — С. 106–113.
7. Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В. Метрические характеристики случайных величин и процессов. — К.: ТВиМС, 1998. — 289 с.
8. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1977. — 720 с.
9. Булдыгин В. В. Сходимость случайных элементов в топологических пространствах. — К.: Наукова думка, 1980. — 240 с.
10. Kozachenko Yu. V., Sottien T., Vasylyk O. I. Simulation of weakly self-similar stationary increment $Sub_\varphi(\Omega)$ -processes: a series expansion approach // Methodology and computing in applied probability. — 2005. — 7. — P. 379–400.
11. Dzhaparidze K. O., Zanten J. H. A series expansion of fractional Brownian motion // CWI. Probability, Networks and Algorithms, R0216.
12. Вигдорович И. И., Алексин В. А. Асимптотические разложения корней алгебраических уравнений. — М.: МГИУ, 2007. — 38 с.

Надійшла 07.11.2015