Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2015, №3(120) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.9

COMBINED NEWTON-POTRA METHOD FOR SOLVING NONLINEAR OPERATOR EQUATIONS

Stepan Shakhno, Andrij-Vasyl Babjak, Halyna Yarmola
Faculty of Applied Mathematics and Informatics, Ivan Franko National University of Lviv, Ukraine.
E-mail:shakhno@lnu.edu.ua, andrij@myscience.org.ua,yarmola@lnu.edu.ua.

КОМБІНОВАНИЙ МЕТОД НЬЮТОНА-ПОТРА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ

С. М. Шахно, А.-В. І. Баб'як, Г. П. Ярмола
Факультет прикладної математики та інформатики, Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна.
E-mail: shakhno@lnu.edu.ua, andrij@myscience.org.ua, yarmola@lnu.edu.ua.

Resume. In the paper a local and a semi-local convergence of combined iterative process for solving nonlinear operator equations is investigated. This method is built on top of Newton method and method with convergence order 1,839 .... The radius of the convergence ball and convergence order of the proposed method are determined. Numerical experiments are carried out on the test examples with nondifferentiable operator.
Keywords: nonlinear equation, nondifferentiable operator, local and semi-local convergence, convergence order, divided difference.

Резюме. В роботі досліджено локальну та напівлокальну збіжність комбінованого ітераційного процесу для розв'язування нелінійних операторних рівнянь, побудованого на основі методу Ньютона та методу з порядком збіжності 1.839 . . .. Встановлено радіус області збіжності та порядок збіжності запропонованого методу. На тестових прикладах з недиференційовним оператором проведено чисельні експерименти.
Ключові слова: нелінійне рівняння, недиференційовний оператор, локальна та напівлокальна збіжність, порядок збіжності, поділена різниця.

Вступ

Розглянемо операторне рівняння

$$H(x) \equiv F(x) + G(x) = 0, \tag{1}$$

де F і G — нелінійні оператори, визначені на опуклій множині D банахового простору X зі значеннями в банаховому просторі Y. Відомо, що F —

диференційовний за Фреше оператор, G – неперервний оператор, диференційовності якого, взагалі кажучи, не вимагається.

Оскільки G є недиференційовним оператором, то скористатися класичним методом Ньютона для знаходження розв'язку рівняння (1) не можна. В такому випадку застосовують метод типу Ньютона, різницеві або комбіновані (диференціально-різницеві) ітераційні процеси [1, 2, 4, 5, 7, 9].

Частковим випадком (1) є рівняння $F(x) = 0$. Для його розв'язування найчастіше застосовують метод Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - [F'(x_n)]^{-1} F(x_n),\ n \geq 0,$$

який має квадратичний порядок збіжності [6, 8]. Також розроблено різницеві методи, які використовують у своїх ітераційних формулах тільки значення нелінійного оператора і не вимагають аналітично заданих похідних. Одним із них є метод з порядком збіжності 1.839...

$$x_{n+1} = x_n - [F(x_n; x_{n-1}) + F(x_{n-2}; x_n) - F(x_{n-2}; x_{n-1})]^{-1} F(x_n),\ n \geq 0.$$

Цей ітераційний процес запропонував Дж.Ф. Трауб для розв'язування одного нелінійного рівняння, а Ф.А. Потра узагальнив його на випадок банахових просторів [3, 10, 11].

На базі методів Ньютона та Потра нами побудовано комбінований ітераційний процес

$$\begin{aligned} &x_{n+1} = x_n - A_n^{-1} H(x_n), \quad n \geq 0, \\ &A_n = F'(x_n) + G(x_n; x_{n-1}) + G(x_{n-2}; x_n) - G(x_{n-2}; x_{n-1}). \end{aligned} \tag{2}$$

У цій праці вивчено локальну та напівлокальну збіжність методу (2). Встановлено, що порядок збіжності комбінованого ітераційного процесу збігається з порядком збіжності базового методу Потра.

1. Локальна збіжність методу (2)

Збіжність методу проведена за класичних умов Ліпшиця для перших похідних оператора F та поділених різниць першого та другого порядку оператора G. Наступна теорема встановлює радіус області збіжності та оцінку швидкості збіжності ітераційного процесу (2). Доведення проведено за методикою з [3, 11]. Також зроблено припущення, що G — диференційовний за Фреше оператор.

Теорема 1. *Нехай F і G — нелінійні оператори, які визначені на відкритій опуклій множині D банахового простору X зі значеннями в банаховому просторі Y. Припустимо, що рівняння (1) має розв'язок $x^* \in D$ та існує оборотна похідна Фреше $H'(x^*)$. Нехай $G(\cdot;\cdot)$ і $G(\cdot;\cdot;\cdot)$ — поділені різниці першого та другого порядку оператора G, визначені на множині $U = \{x : \|x - x^*\| < r_*\} \subseteq D$ і в U виконуються умови Ліпшиця*

$$\|H'(x^*)^{-1}(F'(x) - F'(y))\| \leq 2l_* \|x - y\|, \tag{3}$$

$$\|H'(x^*)^{-1}(G(x; y) - G(u; v))\| \leq p_* (\|x - u\| + \|y - v\|), \tag{4}$$

$$\|H'(x^*)^{-1}(G(u; x; y) - G(v; x; y))\| \leq q_* \|u - v\|, \tag{5}$$

$r_* = \dfrac{2}{3(l_* + p_*) + \sqrt{9(l_* + p_*)^2 + 16q_*}}$.

Тоді для всіх $x_{-2},\ x_{-1},\ x_0 \in U$ *ітераційний процес (2) коректно визначений, генерована ним послідовність* $\{x_n\}_{n\geq 0}$ *належить до* U*, збігається до* x^* *і задовольняє нерівність*

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \frac{l_* + p_*}{C_n}\|x_n - x^*\|^2 + \\ + \frac{q_*}{C_n}(\|x_n - x^*\| + \|x_{n-2} - x^*\|)\|x_{n-1} - x^*\|\|x_n - x^*\|, \quad (6)$$

де $C_n = 1 - 2(l_* + p_*)\|x_n - x^*\| - q_*(\|x_n - x^*\| + \|x_{n-2} - x^*\|)\|x_{n-1} - x^*\|$.

Доведення. Нехай $x,\ y,\ z\ \in U$. Позначимо $A = F'(x) + G(x; y) + G(z; x) - G(z; y)$. Тоді, врахувавши умови (3)–(5), отримаємо

$$\|I - H'(x^*)^{-1}A\| =$$
$$= \|H(x^*)^{-1}[F'(x^*) - F'(x) + G(x^*; x^*) - G(x; y) - G(z; x) + G(z; y)]\| \leq$$
$$\leq \|H(x^*)^{-1}[F'(x^*) - F'(x) + G(x^*; x^*) - G(x; x^*) +$$
$$+ G(z; x^*) - G(z; x) + G(x; x^*) - G(x; y) + G(z; y) - G(z; x^*)]\| =$$
$$= \|H(x^*)^{-1}[F'(x^*) - F'(x) + G(x^*; x^*) - G(x; x^*) +$$
$$+ G(z; x^*) - G(z; x) + [G(x; x^*; y) - G(z; x^*; y)](x^* - y)]\| =$$
$$\leq 2l_*\|x - x^*\| + 2p_*\|x - x^*\| + q_*\|x - z\|\|y - x^*\| \leq$$
$$\leq 2(l_* + p_*)\|x - x^*\| + q_*(\|x - x^*\| + \|z - x^*\|)\|y - x^*\|.$$

З означення r_* маємо, що

$$(l_* + p_*)r_* + 2q_*r_*^2 = 1 - 2(l_* + p_*)r_* - 2q_*r_*^2 < 1. \quad (7)$$

Тоді, за теоремою Банаха про обернений оператор, $H'(x^*)^{-1}A$ є оборотний і

$$\|(I - (I - H'(x^*)^{-1}A))^{-1}\| = \|A^{-1}H'(x^*)\| \leq \\ \leq [1 - 2(l_* + p_*)\|x - x^*\| - q_*(\|x - x^*\| + \|z - x^*\|)\|y - x^*\|]^{-1}. \quad (8)$$

Припустимо, що $x_{n-2},\ x_{n-1},\ \ x_n \in U$. Тоді оператор

$$A_n = F'(x_n) + G(x_n; x_{n-1}) + G(x_{n-2}; x_n) - G(x_{n-2}; x_{n-1})$$

є оборотний.

Далі можна записати

$$\|x_{n+1} - x^*\| = \|x_n - x^* - A_n^{-1}(H(x_n) - H(x^*))\| \leq \\ \leq \|A_n^{-1}H'(x^*)\|\|H'(x^*)^{-1}[H(x_n) - H(x^*) - A_n(x_n - x^*)]\|. \quad (9)$$

Врахувавши умови (3)–(5), отримаємо

$$\|H'(x^*)^{-1}[H(x_n) - H(x^*) - A_n(x_n - x^*)]\| =$$
$$= \|H'(x^*)^{-1}[F(x_n) - F(x^*) + G(x_n) - G(x^*) - A_n(x_n - x^*)]\| \leq$$
$$\leq \left\|H'(x^*)^{-1}\int_0^1 \Big(F'(x^* + t(x_n - x^*)) - F'(x_n)\Big)dt\right\|\|x_n - x^*\| +$$

$$+\|H'(x^*)^{-1}[G(x_n;x^*)-G(x_n;x_n)+G(x_n;x_n)-G(x_n;x_{n-1})-G(x_{n-2};x_n)+$$
$$+G(x_{n-2};x_{n-1})]\|\|x_n-x^*\| \le (l_*+p_*)\|x_n-x^*\|^2+$$
$$+\|H'(x^*)^{-1}[G(x_n;x_n;x_{n-1})-G(x_{n-2};x_n;x_{n-1})]\|\|x_n-x_{n-1}\|\|x_n-x^*\| \le$$
$$\le (l_*+p_*)\|x_n-x^*\|^2+q_*\|x_n-x_{n-2}\|\|x_n-x_{n-1}\|\|x_n-x^*\|.$$

З (8) і (9) отримаємо оцінку (6). Далі, з нерівностей (6) і (7) випливає, що

$$\|x_{n+1}-x^*\| < \|x_n-x^*\| < r_*,\ n \ge 0$$

Отже, ітераційний процес (2) є коректно визначений, генерована ним послідовність $\{x_n\}_{n\ge 0}$ належать U і збігається до x^*. З останньої нерівності та оцінки (6) отримуємо, що $\lim\limits_{n\to 0}\|x_n-x^*\|=0$. □

Наслідок 1. *Порядок збіжності комбінованого ітераційного методу (2) дорівнює* $1.839\ldots$.

Доведення. З оцінки (6) випливає, що існує константа C і натуральне число N, таке що

$$\|x_{n+1}-x^*\| \le C\|x_n-x^*\|\|x_{n-1}-x^*\|\|x_{n-2}-x^*\|,\ n \ge N.$$

Звідси отримуємо, що порядок збіжності методу (2) є єдиним додатним коренем нелінійного рівняння $t^3-t^2-t-1=0$ [3]. □

2. Напівлокальна збіжність методу (2)

Обґрунтування напівлокальної збіжності комбінованого методу Ньютона-Потра (2) проведено з використаням принципу мажорант Л.В. Канторовича.

Теорема 2. *Нехай F і G — нелінійні оператори, які визначені на відкритій опуклій множині D банахового простору X зі значеннями в банаховому просторі Y. Нехай $G(\cdot;\cdot)$ і $G(\cdot;\cdot;\cdot)$ — поділені різниці першого та другого порядку оператора G, визначені на множині $U_0=\{x:\ \|x-x_0\|\le r_0\}$. Припустимо, що лінійний оператор $A_0=F'(x_0)+G(x_0;x_{-1})+G(x_{-2};x_0)-$ $-G(x_{-2};x_{-1})$, де $x_{-2},\ x_{-1},\ x_0\in U_0$, є оборотний і для всіх $x,\ y,\ u,\ v\in U_0$ виконуються умови Ліпшиця*

$$\|A_0^{-1}(F'(x)-F'(y))\| \le 2l_0\|x-y\|, \tag{10}$$

$$\|A_0^{-1}(G(x;y)-G(u;v))\| \le p_0(\|x-u\|+\|y-v\|), \tag{11}$$

$$\|A_0^{-1}(G(u;x;y)-G(v;x;y))\| \le q_0\|u-v\|. \tag{12}$$

Нехай a, b і c – невід'ємні числа, такі що

$$\|x_0-x_{-1}\|\le a,\quad \|x_{-1}-x_{-2}\|\le b,\quad \|A_0^{-1}(F(x_0)+G(x_0))\|\le c. \tag{13}$$

Якщо $q_0a(a+b)\le 1$, для дійсного полінома

$$h(t)=-q_0t^3-(l_0+p_0+q_0a)t^2+[1-q_0a(a+b)]t$$

виконується нерівність

$$c \le h(r)=\frac{1}{3}\frac{l_0+p_0+q_0a+2s}{(l_0+p_0+q_0a+s)^2}(1-q_0a(a+b))^2, \tag{14}$$

де $s = \{(l_0+p_0+q_0a)^2+3q_0(1-q_0a(a+b))\}^{1/2}$, $r = \dfrac{1-q_0a(a+b)}{l_0+p_0+q_0a+s}$ *і замкнена куля* $U_0 \subset D$*, де* $r_0 \in (0, r]$ *є коренем рівняння* $h(t) = c$*, то ітераційний процес (2) коректно визначений і генерована ним послідовність* $\{x_n\}_{n\geq 0}$ *збігається до единого розв'язку* $x^* \in U_0$ *рівняння (1).*

Крім цього, для всіх $n \geq -2$ *виконується нерівність*

$$\|x_n - x^*\| \leq t_n, \tag{15}$$

де

$$\begin{gathered} t_{-2} = r_0 + a + b,\ t_{-1} = r_0 + a,\ t_0 = r_0, \\ a_0 = l_0 + p_0 + 3q_0r_0 + q_0a,\ b_0 = 3q_0r_0^2 - 2a_0r_0 - q_0a(a+b) + 1, \\ t_{n+1} = t_n \cdot \frac{a_0t_n + q_0(t_n - t_{n-1})(t_n - t_{n-2}) - 2q_0t_n^2}{b_0 + 2a_0t_n + q_0(t_n - t_{n-1})(t_n - t_{n-2}) - 3q_0t_n^2}, \quad n \geq 0. \end{gathered} \tag{16}$$

Доведення. Зазначимо, що послідовність $\{t_n\}_{n\geq 0}$ можна одержати, застосовуючи ітераційний алгоритм Ньютона-Потра (2) до дійсного полінома $f(t) = -q_0t^3 + a_0t^2 + b_0t$. Легко довести, що ця послідовність монотонно збігається до нуля. Також маємо, що

$$t_{k+1} - t_{k+2} \geq \frac{(l_0+p_0)(t_k - t_{k+1}) + q_0(t_{k-1} - t_k)(t_{k-2} - t_k)}{1 - 2(l_0+p_0)(t_0 - t_{k+1}) - q_0a(a+b)}(t_k - t_{k+1}).$$

Методом математичної індукції покажемо, що ітераційний процес є добре визначений і

$$\|x_k - x_{k+1}\| \leq t_k - t_{k+1},\ k \geq -2. \tag{17}$$

Використовуючи (13), (14), (16) і те, що

$$t_0 - t_1 = t_0 \cdot \left(1 - \frac{a_0t_0 + q_0(t_0 - t_{-1})(t_0 - t_{-2}) - 2q_0t_0^2}{b_0 + 2a_0t_0 + q_0(t_0 - t_{-1})(t_0 - t_{-2}) - 3q_0t_0^2}\right) = h(r_0) = c,$$

ми доводимо, що (17) виконується для $k = -2, -1, 0$.

Припустимо, що для всіх $k \leq n$ виконується оцінка (17). Тоді, врахувавши умови Ліпшиця (10)–(12), для $k = n+1$ матимемо

$$\begin{gathered} \|I - A_0^{-1}A_{n+1}\| = \|A_0^{-1}(A_0 - A_{n+1})\| \leq \|A_0^{-1}[F'(x_0) - F'(x_{n+1})]\| + \\ + \|A_0^{-1}[G(x_0; x_{-1}) - G(x_0; x_0) + G(x_{-2}; x_0) - G(x_{-2}; x_{-1}) + G(x_0; x_0) - \\ - G(x_{n+1}; x_0) + G(x_{n+1}; x_0) - G(x_{n+1}; x_n) + G(x_{n-1}; x_n) - G(x_{n-1}; x_{n+1})]\| = \\ = \|A_0^{-1}[F'(x_0) - F'(x_{n+1})]\| + \|A_0^{-1}[(G(x_0; x_{-1}; x_0) - G(x_{-2}; x_{-1}; x_0))(x_{-1} - x_0) + \\ + G(x_0; x_0) - G(x_{n+1}; x_0) + G(x_{n+1}; x_0) - G(x_{n+1}; x_n) + G(x_{n-1}; x_n) - \\ - G(x_{n-1}; x_{n+1})]\| \leq 2l_0\|x_0 - x_{n+1}\| + q_0a(a+b) + p_0(\|x_0 - x_{n+1}\| + \|x_0 - x_n\| + \\ + \|x_n - x_{n+1}\|) \leq 2(l_0+p_0)(t_0 - t_{n+1}) + q_0a(a+b) \leq 2(l_0+p_0)t_0 + q_0a(a+b) \leq \\ \leq 2(l_0+p_0)r_0 + q_0a(a+b) \leq 2(l_0+p_0)\frac{1 - q_0a(a+b)}{2(l_0+p_0)} + q_0a(a+b) = 1. \end{gathered}$$

За теоремою Банаха маємо, що A_{n+1} є оборотний і

$$\begin{gathered} \|A_{n+1}^{-1}A_0\| \leq \\ \leq \left[1 - q_0a(a+b) - 2l_0\|x_0 - x_{n+1}\| - p_0(\|x_0 - x_{n+1}\| + \|x_0 - x_n\| + \|x_n - x_{n+1}\|)\right]^{-1}. \end{gathered}$$

Врахувавши означення поділеної різниці та умови (10)–(12) отримаємо

$$\|A_0^{-1}[F(x_{n+1}) + G(x_{n+1})]\| =$$
$$= \|A_0^{-1}[F(x_{n+1}) + G(x_{n+1}) - F(x_n) - G(x_n) - A_n(x_{n+1} - x_n)]\| \le$$
$$\le \left\|A_0^{-1} \int_0^1 \Big(F'(x_n + t(x_{n+1} - x_n)) - F'(x_n)\Big)dt\right\| \|x_n - x_{n+1}\| +$$
$$+\|A_0^{-1}[G(x_n; x_{n+1}) - G(x_n; x_n) + (G(x_n; x_n; x_{n-1}) - G(x_{n-2}; x_n; x_{n-1}))\times$$
$$\times(x_n - x_{n-1})]\| \|x_n - x_{n+1}\| \le (l_0 + p_0)\|x_n - x_{n+1}\|^2 +$$
$$+q_0\|x_{n-2} - x_n\| \|x_{n-1} - x_n\| \|x_n - x_{n+1}\|.$$

Звідси і з попередніх міркувань маємо

$$\|x_{n+1} - x_{n+2}\| = \|A_{n+1}^{-1} H(x_{n+1})\| \le \|A_{n+1}^{-1} A_0\| \|A_0^{-1}[F(x_{n+1}) + G(x_{n+1})]\| \le$$
$$\le \frac{(l_0 + p_0)\|x_n - x_{n+1}\|^2 + q_0\|x_{n-1} - x_n\| \|x_{n-2} - x_n\| \|x_n - x_{n+1}\|}{1 - (2l_0 + p_0)\|x_0 - x_{n+1}\| - p_0(\|x_0 - x_n\| + \|x_n - x_{n+1}\|) - q_0 a(a + b)} \le$$
$$\le \frac{(l_0 + p_0)(t_n - t_{n+1}) + q_0(t_{n-1} - t_n)(t_{n-2} - t_n)}{1 - 2(l_0 + p_0)(t_0 - t_{n+1}) - q_0 a(a + b)}(t_n - t_{n+1}) \le t_{n+1} - t_{n+2}.$$

Отже, ітераційний процес (2) є добре визначений для всіх n. Звідси випливає, що

$$\|x_n - x_k\| \le t_n - t_k, \quad -2 \le n \le k, \tag{18}$$

тобто послідовність $\{x_n\}_{n\ge 0}$ є фундаментальною і збіжною в просторі X. З (18) при $k \to \infty$ випливає нерівність (15).

Покажемо, що x^* є коренем рівняння $F(x) + G(x) = 0$. Справді,

$$\|A_0^{-1} H(x_{n+1})\| \le (l_0 + p_0)\|x_n - x_{n+1}\|^2 +$$
$$+q_0\|x_n - x_{n-2}\| \|x_n - x_{n-1}\| \|x_n - x_{n+1}\| \to 0$$

при $n \to \infty$. Отже, $F(x^*) + G(x^*) = 0$.

Доведення єдиності проведемо від супротивного. Припустимо, що існує $x^{**} \in U_0$, $x^{**} \ne x^*$ і $H(x^{**}) = 0$. Позначимо $P \equiv \int_0^1 F'(x^* + t(x^{**} - x^*))dt + G(x^{**}; x^*)$. Тоді справедлива рівність $P(x^{**} - x^*) = H(x^{**}) - H(x^*)$. Якщо оператор P^{-1} оборотний, то $x^{**} = x^*$. Справді,

$$\|I - A_0^{-1}P\| = \|A_0^{-1}(A_0 - P)\| \le \left\|A_0^{-1} \int_0^1 \Big(F'(x_0) - F'(x^* + t(x^{**} - x^*))\Big)dt\right\| +$$
$$+\|A_0^{-1}[G(x_0; x_{-1}) + G(x_{-2}; x_0) - G(x_{-2}; x_{-1}) - G(x^{**}; x^*)]\| \le$$
$$\le (l_0 + p_0)(\|x_0 - x^*\| + \|x_0 - x^{**}\|) + q_0 a(a + b) \le 2(l_0 + p_0)r_0 + q_0 a(a + b) \le$$
$$\le 2(l_0 + p_0)\frac{1 - q_0 a(a + b)}{2(l_0 + p_0)} + q_0 a(a + b) = 1.$$

Отже, P^{-1} існує.

□

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми 2. Тоді для всіх* $n \geq 1$ *справедлива оцінка*

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{(l_0 + p_0)(t_{n-1} - t_n) + q_0(t_{n-3} - t_{n-1})(t_{n-2} - t_{n-1})}{1 - q_0 a(a+b) - (l_0 + p_0)(2t_0 - t_n)}(t_{n-1} - t_n). \tag{19}$$

Доведення. Врахувавши умови (10)–(12), отримаємо

$$\Big\| I - A_0^{-1}\Big(\int_0^1 F'(x^* + t(x_n - x^*))dt + G(x_n; x^*)\Big)\Big\| \leq$$

$$\leq \Big\|A_0^{-1}\int_0^1 \Big(F'(x_0) - F'(x^* + t(x_n - x^*))\Big)dt\Big\| + \|A_0^{-1}[G(x_0; x_{-1}) -$$
$$- G(x_0; x_0) + G(x_{-2}; x_0) - G(x_{-2}; x_{-1}) + G(x_0; x_0) - G(x_n; x^*)]\| \leq$$
$$\leq (l_0 + p_0)(\|x_0 - x_n\| + \|x_0 - x^*\|) + q_0 a(a+b) \leq$$
$$\leq (l_0 + p_0)(2t_0 - t_n) + q_0 a(a+b) < 1.$$

За теоремою Банаха $\int_0^1 F'(x^* + t(x_n - x^*))dt + G(x_n; x^*)$ є оборотний і

$$\Big\|\Big(\int_0^1 F'(x^* + t(x_n - x^*))dt + G(x_n; x^*)\Big)^{-1} A_0\Big\| \leq$$
$$\leq (1 - q_0 a(a+b) - (l_0 + p_0)(\|x_0 - x_n\| + \|x_0 - x^*\|))^{-1}.$$

Використовуючи співвідношення

$$\|x_n - x^*\| = \Big\|\Big(\int_0^1 F'(x^* + t(x_n - x^*))dt + G(x_n; x^*)\Big)^{-1}(H(x_n) - H(x^*))\Big\| \leq$$

$$\leq \Big\|\Big(\int_0^1 F'(x^* + t(x_n - x^*))dt + G(x_n; x^*)\Big)^{-1} A_0\Big\| \|A_0^{-1} H(x_n)\|,$$

отримаємо оцінку (19). □

3. Чисельні експерименти

Для демонстрації роботи запропонованого ітераційного процесу (2) проведено чисельні експерименти на тестових задачах з недиференційовним оператором. Розрахунки проводилися для різних початкових наближень та точності $\varepsilon = 10^{-10}$. Зупинка обчислювального процесу відбувалася при виконанні умов:

$$\|x_{n+1} - x_n\|_\infty \leq \varepsilon \text{ і } \|H(x_{n+1})\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Додаткові початкові наближення обчислювалися за формулою:

$$x_{-1} = x_0 - 10^{-4},\ x_{-2} = x_0 - 2 \cdot 10^{-4}.$$

Для порівняння швидкості збіжності комбінованого методу Ньютона-Потра з базовими методами у таблицях наведено кількість ітерацій, за які отримано розв'язок розглянутих систем нелінійних рівнянь. Метод типу Ньютона для розв'язування рівняння (1) має вигляд [7]:

$$x_{n+1} = x_n - [F'(x_n)]^{-1} H(x_n),\ n \geq 0, \tag{20}$$

а метод Потра:

$$x_{n+1} = x_n - [H(x_n; x_{n-1}) + H(x_{n-2}; x_n) - H(x_{n-2}; x_{n-1})]^{-1} H(x_n),\ n \geq 0. \tag{21}$$

Розглянемо систему з двома рівняннями.

$$\begin{cases} 3x^2y + y^2 - 1 + |x-1| = 0, \\ x^4 + xy^3 - 1 + |y| = 0, \end{cases}$$

Наближений розв'язок цієї системи:

$$(x^*, y^*)^T \approx (0.8946553733346867, 0.3278265217462975)^T.$$

Результати розрахунків наведено у таблиці 1.

Таблиця 1. Кількість ітерацій, за які отримано розв'язок системи, для початкового наближення $x_0 = p \cdot (1, 0)^T$

p	метод типу Ньютона (20)	метод Потра (21)	метод Ньютона-Потра (2)
1	22	9	8
10	30	18	14
15	31	34	15

Розглянемо систему з трьома рівняннями.

$$\begin{cases} z^2(1-y) - xy + |y - z^2| = 0 \\ z^2(x^3 - x) - y^2 + |3y^2 - z^2 + 1| = 0 \\ 6xy^3 + y^2z^2 - xy^2z + |x + z - y| = 0 \end{cases}$$

Відомо, що один із розв'язків системи є $(x^*, y^*, z^*)^T = (-1, 2, 3)^T$. Візьмемо за початкове наближення вектор $x_0 = p \cdot (-1.5,\ 2.5,\ 3.5)^T$. Результати для методів (2), (20) і (21) наведено в таблиці 2.

Таблиця 2. Кількість ітерацій, за які отримано розв'язок системи

p	метод типу Ньютона (20)	метод Потра (21)	метод Ньютона-Потра (2)
1	196	8	7
10	198	19	18
25	202	27	21

З отриманих результатів бачимо перевагу комбінованого методу (2) перед базовими методами, зокрема, перед методом Потра (21), хоча теоретичний порядок збіжності обох методів однаковий.

Література

1. Argyros I. K. A unifying local-semilocal convergence analysis and applications for two-point Newton-like methods in Banach space // J. Math. Anal. Appl. — 2004. — Vol. 298. — P. 374–397.
2. Hernandez M. A., Rubio M. J. The Secant method for nondifferentiable operators // Appl. Math. Lett. — 2002. — Vol. 15. — P. 395–399.
3. Potra F. A. On an iterative algorithm of order 1.839... for solving nonlinear operator equations // Numer. Funct. Anal. Optim. — 1984–1985. — Vol.7, Number 1. — P. 75–106.
4. Ren H., Argyros I. K. A new semilocal convergence theorem for a fast iterative method with nondifferentiable operators // J. Appl. Math. Comp. — 2010. — Vol. 34, Number 1-2. — P. 39–46.
5. Shakhno S. M., Melnyk I. V., Yarmola H. P. Analysis of convergence of a combined method for the solution of nonlinear equations // Journal of Mathematical Sciences. — 2014. — Vol. 201, Number 1. — P. 32–43.
6. Wang X. Convergence of Newton's method and uniqueness of the solution of equations in Banach space // IMA Journal of Numerical Analysis. — 2000. — Vol. 20. — P. 123–134.
7. Zabrejko P. P., Nguen D. F. The majorant method in the theory of Newton-Kantorovich approximations and the Pta'k error estimates // Numerical Functional Analysis and Optimization. — 1987. — Vol. 9, Number 5-6. — P. 671–684.
8. Дэннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений: Пер. с англ. — М.: Мир, 1988. — 440 с.
9. Шахно С. М., Ярмола Г. П. Двоточковий метод для розв'язування нелінійних рівнянь з недиференційовним оператором // Математичні студії. — 2011. — Т. 36, № 2. — С. 213–220.
10. Шахно С. М. Ітераційний алгоритм з порядком збіжності 1,839... за узагальнених умов Ліпшиця для поділених різниць // Вісник Львівської політехніки. Фізико-математичні науки. — 2012. — Вип. 740. — С. 62–65.
11. Шахно С. М., Макух О. М. Про ітераційні методи в умовах неперервності за Гельдером поділених різниць другого порядку // Математ. методи і фіз.-мех. поля. — 2006. — Т. 49, № 2. — С. 90–98.

Надійшла 02.11.2015