Журнал обчислювальної та прикладної математики
2015, №3(120)
Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.9
MSC 35K35, 49J20

THE SOLVABILITY OF OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITH MINIMAL ENERGY FOR ONE PARABOLIC BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH NONLOCAL BOUNDARY CONDITIONS

Olena Kapustian[1], Oleh Mazur[2]

[1]Faculty of Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, E-mail: olena.kap@gmail.com.
[2]National University of Food Technologies, Kyiv, Ukraine, E-mail: okmazur@ukr.net.

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ З МІНІМАЛЬНОЮ ЕНЕРГІЄЮ ДЛЯ ОДНІЄЇ ПАРАБОЛІЧНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ З НЕЛОКАЛЬНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

О. А. Капустян[1], О. К. Мазур[2]

[1]Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна, E-mail: olena.kap@gmail.com.
[2]Національний університет харчових технологій, Київ, Україна, E-mail: okmazur@ukr.net.

Abstract. We consider the optimal control problem with minimal energy for parabolic equation with distributed control and nonlocal boundary conditions. Using Fourier method and properties of Fourier-Bessel series, we prove the solvability of this problem.
Keywords: the optimal control problem, minimal energy, parabolic equation, nonlocal boundary conditions.

Резюме. В роботі розглядається задача оптимального керування з мінімальною енергією на розв'язках параболічного рівняння з розподіленим керуванням та нелокальними крайовими умовами. Використовуючи біортонормовані базисні системи функцій і ряди Фур'є-Бесселя та їх властивості, доводиться класична розв'язність вказаної задачі.
Ключові слова: задача оптимального керування, мінімальна енергія, параболічне рівняння, нелокальні крайові умови.

Вступ

Теорія лінійно-квадратичних задач оптимального керування як для еліптичних, так і для параболічних рівнянь є добре розвиненою [1–3], зокрема, у роботі О. Г. Наконечного „Оптимальне керування та оцінювання в рівняннях із частинними похідними“ [4] запропоновані умови існування та єдиності узагальнених розв'язків крайових задач, наведено необхідні умови екстремуму функціоналів у банахових просторах, розлянуто задачі оптимального керування для лінійних рівнянь еліптичного та параболічного типів.

Для самоспряжених задач у багатьох випадках використовується метод Фур'є для точного знаходження або якісного аналізу оптимальних керувань. Розглянена в даній роботі задача не є самоспряженою. В одновимірній області з нелокальними крайовими умовами ряд задач оптимального керування було досліджено в [5]. Класичний розв'язок розгляненої в роботі крайової задачі для рівняння Лапласа було отримано в [6], а відповідну задачу оптимального керування розв'язано в [7]. У [8] встановлена класична розв'язність задачі оптимального керування параболічним рівнянням з квадратичним критерієм якості за допомогою біортонормованих систем базисних функцій. В даній роботі техніка робіт [7, 8], а також ряди Бесселя-Фур'є та їх властивості [9, 10] застосовані для знаходження оптимального керування для задачі з мінімальною енергією та розподіленим керуванням у правій частині рівняння параболічного типу.

1. Постановка задачі

Нехай є область $Q = (0,T) \times \Omega$, де $\Omega = \{(r,\theta) | r \in (0,1),\ \theta \in (0,\pi)\}$.

Розглянемо таку задачу оптимального керування: потрібно знайти таку функцію стану $y = y(t,r,\theta)$ та керування $u = u(r,\theta)$, що

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = \Delta y + q(t)u(r,\theta),\ (t,r,\theta) \in Q, \\ y(t,1,\theta) = 0,\ t \in (0,T),\ \theta \in (0,\pi), \\ y(t,r,0) = 0,\ t \in (0,T),\ r \in (0,1), \\ \frac{\partial y}{\partial \theta}(t,r,0) = \frac{\partial y}{\partial \theta}(t,r,\pi),\ t \in (0,T),\ r \in (0,1), \end{cases} \tag{1}$$

$$y(0,r,\theta) = h(r,\theta), \tag{2}$$

$$y(T,r,\theta) = z(r,\theta), \tag{3}$$

$$J(u) = \int_0^1 r\|u^2(r)\|^2 dr \to \inf, \tag{4}$$

де $\Delta y := \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial y}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2}$ є оператором Лапласа у полярних координатах, $q \in C([0,T])$, $h, z \in C(\overline{\Omega})$ - задані функції, $\|\cdot\|$ - норма у просторі $L^2(0,\pi)$.

Для розв'язання задачі (1)–(4), аналогічно [6], розглянемо дві біортонормовані й повні у просторі $L^2(0,\pi)$ системи функцій Самарського-Іонкіна

$$\Psi = \{\psi_0 = \frac{2}{\pi^2},\ \psi_{2n} = \frac{4}{\pi^2}(\pi - \theta)\sin 2n\theta,\ \psi_{2n-1} = \frac{4}{\pi^2}\cos 2n\theta\},$$
$$\Phi = \{\varphi_0 = \theta,\ \varphi_{2n} = \sin 2n\theta,\ \varphi_{2n-1} = \theta\cos 2n\theta\}.$$

Норма у просторі $L^2(0,\pi)$ задається рівністю [6]

$$\forall v \in L^2(0,\pi) \quad \|v\| = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(\int_0^{\pi} v(\theta)\psi_n(\theta)d\theta)^2\right)^{1/2}.$$

Найбільшою складністю при розв'язанні задачі оптимального керування (1)–(4) є наявність нелокальності крайових умов. Саме це не дозволяє отримати послідовність незалежних одновимірних задач при застосуванні методу Фур'є до вихідної задачі. У даній статті для досить широкого класу вихідних даних буде отримано розв'язок згаданої вище нескінченновимірної проблеми моментів і, отже, буде обгрунтовано класичну розв'язність задачі (1)–(4).

Зафіксуємо керування

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r)\varphi_n(\theta) \tag{5}$$

і для нього шукатимемо розв'язок вихідної задачі у вигляді

$$y(t,r,\theta) = y_0(t,r)\varphi_0(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(y_{2n-1}(t,r)\varphi_{2n-1}(\theta) + y_{2n}(t,r)\varphi_{2n}(\theta)\right), \tag{6}$$

де функції $\{y_n(t,r)\}_{n=0}^{\infty}$ визначаються з таких початково-крайових задач у області $\Pi = (0,T) \times (0,1)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial y_0}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial y_0}{\partial r}) + q(t)u_0(r), \ (t,r) \in \Pi, \\ y_0(t,1) = 0, \ t \in (0,T), \\ y_0(0,r) = h_0(r), \ r \in (0,1), \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial y_{2n-1}}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial y_{2n-1}}{\partial r}) - (\frac{2n}{r})^2 y_{2n-1} + q(t)u_{2n-1}(r), \ (t,r) \in \Pi, \\ y_{2n-1}(t,1) = 0, \ t \in (0,T), \\ y_{2n-1}(0,r) = h_{2n-1}(r), \ r \in (0,1), \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial y_{2n}}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial y_{2n}}{\partial r}) - (\frac{2n}{r})^2 y_{2n} - \frac{4n}{r^2}y_{2n-1} + q(t)u_{2n}(r), \ (t,r) \in \Pi, \\ y_{2n}(t,1) = 0, \ t \in (0,T), \\ y_{2n}(0,r) = h_{2n}(r), \ r \in (0,1), \end{cases} \tag{9}$$

де $\forall n \geq 0 \ \ h_n = \int_0^\pi h(r,\theta) \cdot \psi_n(\theta)d\theta$.

Отже, вихідна задача оптимального керування (1)–(4) з мінімальною енергією зводиться до такої: серед допустимих пар $\{u_n(r), y_n(t,r)\}_{n=0}^{\infty}$ задачі (7)–(9) потрібно знайти такі пари, на яких досягає мінімуму функціонал якості

$$J = \int_0^1 r u_0^2(r)dr + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 r(u_{2n-1}^2(r) + u_{2n}^2(r))dr \tag{10}$$

і виконуються умови

$$y_0(T,r) = z_0(r) = \frac{2}{\pi^2}\int_0^\pi z(r,\theta)d\theta, \tag{11}$$

$$\forall n \geq 1 \; y_{2n-1}(T,r) = z_{2n-1}(r) = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi} z(r,\theta)\cos 2n\theta d\theta, \tag{12}$$

$$\forall n \geq 1 \; y_{2n}(T,r) = z_{2n}(r) = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi} z(r,\theta)(\pi-\theta)\sin 2n\theta d\theta. \tag{13}$$

При цьому оптимальний процес $\{\tilde{u}_n, \tilde{y}_n\}_{n=0}^{\infty}$ повинен бути таким, що формула (5) визначає функцію $\tilde{u} \in C(\overline{\Omega})$ і формула (6) визначає функцію $\tilde{y} \in C(\bar{Q})$, для яких

$$\frac{\partial \tilde{y}}{\partial \theta} \in C(\bar{Q}), \;\; \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial r \partial \theta}, \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial \theta^2} \in C(Q). \tag{14}$$

Для розв'язання цієї задачі зробити додаткові припущення на початкові дані: нехай для деякого $N \geq 0$

$$\forall r \in [0,1] \; h(r,\cdot), z(r,\cdot) \in L_N := \operatorname{span}\{\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_{2N}\}, \tag{15}$$

тобто

$$h(r,\theta) = \sum_{n=0}^{2N} h_n(r)\varphi_n(\theta), \;\; z(r,\theta) = \sum_{n=0}^{2N} z_n(r)\varphi_n(\theta).$$

З умови (15) випливає, що $n > N \;\; h_{2n-1} = h_{2n} = 0, \;\; z_{2n-1} = z_{2n} = 0.$ Отже, мінімум функціоналу якості

$$J_n := \int_0^1 r(u_{2n-1}^2(r) + u_{2n}^2(r))dr$$

дорівнює нулю і досягається на допустимих у задачах (8), (9) з умовами (12) і (13) парах $\{u_{2n-1} = 0, \; y_{2n-1} = 0\}, \;\; \{u_{2n} = 0, \; y_{2n} = 0\}$.

Таким чином, за умови (15), на оптимальному процесі ряди (5), (6) містять лише скінченну кількість ненульових членів. Це забезпечує виконання умови (14) як тільки буде знайдено розв'язок задачі (7)–(13) для $n = \overline{1,N}$.

2. Основний результат

Теорема 1. *Нехай для задачі (1)–(4) виконуються умови (15), а також*

$$q \in C([0,1]), \;\; \exists q_0 > 0 \;\; \forall t \in [0,T] \;\; q(t) \geq q_0, \tag{16}$$

$$h_0 \in C^2([0,1]), \;\; h_0(0) = h_0(1) = 0, \; k = \overline{0,2}, \tag{17}$$

$$z_0 \in C^4([0,1]), \;\; z_0^{(k)}(0) = z_0^{(k)}(1) = 0, \; k = \overline{0,2}, \tag{18}$$

$$\forall n = \overline{1,N} \;\; h_{2n} \in C^2([0,1]), \;\; h_{2n}(0) = h_{2n}(1) = 0, \; k = \overline{0,2}, \tag{19}$$

$$\forall n = \overline{1,N} \;\; z_{2n} \in C^4([0,1]), \; z_{2n}^{(k)}(0) = z_{2n}^{(k)}(1) = 0, \; k = \overline{0,2}, \tag{20}$$

$$h_{2n-1} \in C^6([0,1]), \;\; h_{2n-1}^{(k)}(0) = h_{2n-1}^{(k)}(1) = 0, \; k = \overline{0,4}, \tag{21}$$

$$z_{2n-1} \in C^6([0,1]), \;\; z_{2n-1}^{(k)}(0) = z_{2n-1}^{(k)}(1) = 0, \; k = \overline{0,4}. \tag{22}$$

Тоді задача оптимального керування (1)–(4) має єдиний розв'язок

$$\overline{u}(r,\theta)=\sum_{n=0}^{2N}\overline{u}_n(r)\varphi_n(\theta),\ \ \overline{y}(t,r,\theta)=\sum_{n=0}^{2N}\overline{y}_n(t,r)\varphi_n(\theta),$$

де $\{\overline{u}_n,\overline{y}_n\}_{n=0}^{2N}$ *є розв'язком задач (7)–(9), (11)–(13).*

Висновки

Нами була розглянена задача оптимального керування з мінімальною енергією для параболічної крайової задачі з нелокальними крайовими умовами. При використанні біортонормованих базисних систем функцій та рядів Фур'є-Бесселя сформульована теорема про існування та єдиність розв'язку вказаної задачі.

Література

1. Красовский Н. Н. Теория управления движением — М.: Наука, 1968. — 476 с.
2. Егоров А. И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами — М.: Наука, 1978. — 463 с.
3. Иваненко В. И., Мельник В. С. Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами — К.: Наукова Думка, 1988. — 288 с.
4. Наконечний О. Г. Оптимальне керування та оцінювання в рівняннях із частинними похідними — К.: Видавництво Київського університету, 2004. — 103 с.
5. Капустян В. О., Пишнограєв І. О. Наближене оптимальне керування для параболіко-гіперболічного рівняння з нелокальними крайовими умовами і напіввизначеним критерієм якості // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2013. — №4. — С. 24–36.
6. Моисеев Е. И., Амбарцумян В. Э. О разрешимости нелокальной краевой задачи с равенством потоков на части границы и сопряженной к ней системе // Дифференциальные уравнения. — 2010. — Т. 46, №5. — С. 718–725.
7. Kapustyan V. O., Kapustyan O. A., Mazur O.K. Problem of optimal control for the Poisson equation with nonlocal boundary conditions // Journal of Mathematical Sciences. — 2014. — Vol. 201, №3. — P. 325–334.
8. Kapustyan V. O., Kapustyan O. V., Kapustyan O. A., Mazur O. K. The Optimal Control Problem for Parabolic Equation with Nonlocal Boundary Conditions in Circular Sector // Continuous and Distributed Systems II. Theory and Applications. — Vol. 30. — 2015. — P. 297–314.
9. Ватсон Г. Н. Теория Бесселевых функций — М.: ИИЛ, 1949. — 798 с.
10. Scherberg M. G. The degree of convergence of a series of Bessel functions // Trans. Amer. Math. Soc. — 1933. — Vol. 35. — P. 172–183.

Надійшла 01.11.2015