Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2015, №3(120) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.977

MSC 49J20

JUSTIFICATION OF MINMAX ESTIMATES FOR LINEAR FUNCTIONALS ON SOLUTIONS OF PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATION WITH NONLOCAL BOUNDARY CONDITIONS AND DISTRIBUTED OBSERVATIONS

Volodymyr Kapustyan, Ivan Pyshnograiev

Department of of Mathematical Modeling for Economic Systems, NTUU „KPI“, Kyiv, Ukraine. E-mail: v.kapustyan@mses.kpi.ua, pyshnograiev@gmail.com.

ОБОСНОВАНИЕ МИНИМАКСНЫХ ОЦЕНОК ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ И РАСПРЕДЕЛЕННЫМ НАБЛЮДЕНИЕМ

В. Е. Капустян, И. А. Пышнограев

Кафедра математического моделирования экономических систем, НТУУ „КПИ“, Киев, Украина. E-mail: v.kapustyan@mses.kpi.ua, pyshnograiev@gmail.com.

Abstract. For distributed observation the problem of minmax estimation of linear functionals, vague on solutions of parabolic-hyperbolic equations with nonlocal boundary conditions, reduced to an optimal control problem, which is divided into a sequence of finite-dimensional problems. We derive conditions for the existence of these problems and the solutions of the original problem minmax estimation. The validity of some representations of linear functionals is shown. Minimax apriori estimates provided by the special solutions of boundary value problems are given.

Keywords: minmax estimation, linear functional, optimal control, parabolic-hyperbolic equations, nonlocal boundary conditions.

Резюме. Для распределенного наблюдения задача минимаксного оценивания линейных функционалов, определенных на решениях параболо-гиперболических уравнений с нелокальными краевыми условиями, сведена к задаче оптимального управления, которая в свою очередь разбита на последовательность конечномерных задач. Выведены условия существования решений данных задач и исходной задачи минимаксного оценивания. Показана справделивость некоторых представлений линейных функционалов. Приведены минимаксные априорные оценки, представленные через решения специальных краевых задач.

Ключевые слова: минимаксное оценивание, линейный функционал, оптимальное управление, параболо-гиперболические уравнения, нелокальные краевые условия.

Вступление

В статье приведены результаты по минимаксному оцениванию для линейных функционалов от решений одного класса гибридных уравнений с нелокальными краевыми условиями. Особенность таких краевых задач состоит в том, что, во-первых, их решения локально зависят от правых частей в некоторой точке по времени, а, во-вторых, при построении классического решения используются биортогональные базисы, учитывающие специфику краевых условий. Это приводит как к новым постановкам задач минимаксного оценивания, так и к новым алгоритмам минимаксного оценивания.

1. Постановка задачи

Пусть состояние некоторой системы описывается функцией $y(x,t) \in C^1(\bar{D}) \cap \; C^2(D_-) \cap C^{2,1}(D_+)$, которая удовлетворяет в области D уравнению

$$Ly(x,t) = \hat{f}(x,t) \tag{1}$$

начальным

$$y(x,-\alpha) = \varphi(x) \tag{2}$$

и граничными условиями

$$y(0,t) = 0, y'(0,t) = y'(1,t), \; -\alpha \leq t \leq T, \tag{3}$$

где $D = \{(x,t) : \; 0 < x < 1, \; -\alpha < t \leq \; T, \; \alpha > 0, \; T > 0\}$, $D_- = \{(x,t) : 0 < x < 1, \, -\alpha < t \leq 0\}$, $D_+ = \{(x,t) : 0 < x < 1, \; 0 < t \leq T\}$, функции $\hat{f}, \varphi$ считаем неизвестными, а их свойства будут уточнены ниже,

$$Ly = \begin{cases} y_t - y_{xx}, & \mathrm{t} > 0, \\ y_{tt} - y_{xx}, & \mathrm{t} < 0. \end{cases}$$

В краевой задаче (1)–(3) положим

$$\hat{f}(x,t) = \begin{cases} f(x,0) + \int\limits_0^t \xi(x,\tau)d\tau, & \mathrm{t} \geq 0, \\ f_-(x,t), & \mathrm{t} < 0. \end{cases} \tag{4}$$

Известно [1, 2], что для задачи (1)–(3) система собственных и присоединенных функций имеет вид $W_0 = \{X_j(x), j = 0, 1, ...\}$, где

$$X_{2k-1}(x) = x\cos(2\pi kx), X_{2k}(x) = \sin(2\pi kx),$$
$$k = 1, 2, ..., X_0(x) = x. \tag{5}$$

Для системы функций W_0 существует биортогональная к ней система функций $R_0 = \{Y_i(x), \; i = 0, 1, ...\}$, элементы которой имеют вид

$$Y_{2k-1}(x) = 4\cos(2\pi kx), Y_{2k}(x) = 4(1-x) \times$$
$$\times \sin(2\pi kx), k = 1, 2, ..., \; Y_0(x) = 2. \tag{6}$$

Системы W_0, R_0 образуют базисы Рисса в пространстве $L_2(0,1)$ и для любой функции $\phi(x) \in L_2(0,1)$ справедлива оценка

$$r||\phi||^2_{L_2} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k^2 \leq R\ ||\phi||^2_{L_2}, \tag{7}$$

где $r = 3/4, R = 16, \phi_k = (\phi, Y_k)_{L_2}$.
Более того, в пространстве $L_2(0,1)$ можно ввести эквивалентную норму по правилу

$$||\phi||^2_D = (D\phi, \phi) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k^2, \tag{8}$$

где $D : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ - некоторый положительно определенный оператор.

Тогда при фиксированных возмущениях $\hat{f}, \varphi$ решение задачи (1)–(3) можем представить в виде

$$y(x,t) = X_0(x)y_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty}(X_{2k-1}(x)y_{2k-1}(t) + X_{2k}(x)y_{2k}(t)), \tag{9}$$

где функции $y_i(t)$ определяются как решения краевых задач

$$\begin{gathered}\frac{dy_0(t)}{dt} = f_0(0) + \int\limits_0^t \xi_0(\tau)d\tau, t\ > 0,\\ \frac{d^2y_0(t)}{dt^2} = f_{0,-}(t), t < 0,\\ y_0(-\alpha) = \varphi_0;\end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered}\frac{dy_{2k-1}(t)}{dt} + \lambda_k^2 y_{2k-1}(t) = f_{2k-1}(0) + \int\limits_0^t \xi_{2k-1}(\tau)d\tau, t > 0,\\ \frac{d^2y_{2k-1}(t)}{dt^2} + \lambda_k^2\ y_{2k-1}(t) = f_{2k-1,-}(t), t < 0,\\ y_{2k-1}(-\alpha) = \varphi_{2k-1}, \lambda_k = 2k\pi,\end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered}\frac{dy_{2k}(t)}{dt} + \lambda_k^2 y_{2k}(t) = -2\lambda_k y_{2k-1}(t) + f_{2k}(0) + \int\limits_0^t \xi_{2k}(\tau)d\tau, t > 0,\\ \frac{d^2y_{2k}(t)}{dt^2} + \lambda_k^2 y_{2k}(t) = -2\lambda_k y_{2k-1}(t) + f_{2k,-}(t), t <\ 0,\\ f_i(t) = f_i(0) + \int\limits_0^t \xi_i(\tau)\ d\tau, i \geq 0,\\ y_{2k}(-\alpha) = \varphi_{2k}, k = 1,2,..., y_i(t) \in C^1(-\alpha, T), i \geq 0,\end{gathered} \tag{12}$$

причем,

$$y_i(t) = (y(.,t), Y_i(.))_{L_2(0,1)},\ \ \varphi_i = (\varphi(.), Y_i(.))_{L_2(0,1)},$$

$$f_{i,-}(t) = (f_-(.,t), Y_i(.))_{L_2(0,1)}, f_i(t) = (f(.,t), Y_i(.))_{L_2(0,1)}, i \geq 0.$$

Наблюдения имеют вид

$$\theta_i(t) = y_i(t) + F_i(t), t \in [-\alpha, T], i \geq 0, \tag{13}$$

где $F_i(t) = (F(.,t), Y_i(.))_{L_2(0,1)}, F \in L_2(D)$.

Помехи, действующие на систему (1)–(3), (13) стеснены ограничениями

$$\sum_{i=0}^{\infty}[\hat{\alpha}\ \varphi_i^2 + \hat{\beta} f_i^2(0) + \hat{\gamma}\int_{-\alpha}^{0} f_{i,-}^2(t)dt + \hat{\mu}\int_{0}^{T}\xi_i^2(t)dt\ + \hat{\nu}\int_{-\alpha}^{T}F_i^2(t)dt]\ \leq 1, \tag{14}$$

где $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\mu},\ \hat{\nu} > 0$.

На решениях задачи (1)–(3) определим линейный функционал

$$l(y) = \sum_{i=0}^{\infty}\int_{-\alpha}^{T} q_i(t) y_i(t) dt, \tag{15}$$

где $q_i(t) = (q(.,t), X_i(.))_{L_2(0,1)}, q \in L_2(D)$.

Оценку функционала (15) будем искать в классе линейных оценок вида

$$\hat{\hat{l}}(y) = -\sum_{i=0}^{\infty}\int_{-\alpha}^{T}\hat{u}_i(t)\theta_i(t)dt, \tag{16}$$

где

$$\hat{u}_i(t) = (\hat{u}(.,t), X_i(.))_{L_2(0,1)}, \hat{u}_i\ \in L_2(D);$$

$$\hat{u}_i(t) = u_i(t), t \geq 0; \hat{u}_i(t) = v_i(t), t < 0.$$

Оценку $\hat{l}(y)$ из класса (16) будем называть априорной минимаксной оценкой [3], если для нее выполняется равенство

$$\sigma^2 = |l(y) - \hat{l}(y)|^2 = \inf_{\hat{u}}\sup_{\varphi,f,F}|l(y) -\ \hat{\hat{l}}(y)|^2. \tag{17}$$

2. Минимаксные оценки

Задачу минимаксного оценивания (1)–(17) стандартно [3] сводим к задаче оптимального управления, которая имеет вид: найти минимум функционала

$$J(u) = \sum_{i=0}^{\infty}[\hat{\nu}^{-1}\int_{-\alpha}^{T}\hat{u}_i^2(t)dt +\ \hat{\gamma}^{-1}\int_{-\alpha}^{0}\psi_i^2(t)\ dt + \hat{\beta}^{-1}(\psi_i(0-) - \int_{0}^{T}\psi_i(t)dt)^2 +$$

$$+\hat{\mu}^{-1}\int_{0}^{T}(\int_{t}^{T}\psi_i(\tau)d\tau)^2 dt +\ \hat{\alpha}^{-1}(\frac{d\psi_i(-\alpha)}{dt})^2], \tag{18}$$

который определен на решениях краевой задачи

$$\frac{d\psi_0(t)}{dt} = q_0(t) + u_0(t), t\ > 0,$$

$$\frac{d^2\psi_0(t)}{dt^2} = -q_0(t) -\ v_0(t), t < 0,$$

$$\psi_0(-\alpha) = 0, \frac{d\psi_0(0-)}{dt} + \psi_0(0+) = 0, \psi_0(T) = 0; \tag{19}$$

$$\frac{d\psi_{2i-1}(t)}{dt} - \lambda_i^2\ \psi_{2i-1}(t) - 2\lambda_i\psi_{2i}(t) =\ q_{2i-1}(t) + u_{2i-1}(t), t\ > 0,$$

$$\frac{d^2\psi_{2i-1}(t)}{dt^2} + \lambda_i^2\ \psi_{2i-1}(t) + 2\lambda_i\psi_{2i}(t) = -\ q_{2i-1}(t) - v_{2i-1}(t), t < 0,$$

$$\psi_{2i-1}(-\alpha) = 0, \psi_{2i-1}(T) = 0,$$

$$\frac{d\psi_{2i-1}(0-)}{dt} + \psi_{2i-1}(0+) + \lambda_i^2\psi_{2i-1}(0-) + 2\lambda_i\ \psi_{2i}(0-) = 0; \tag{20}$$

$$\frac{d\psi_{2i}(t)}{dt} - \lambda_i^2\ \psi_{2i}(t) = q_{2i}(t) + u_{2i}(t), t\ > 0,$$

$$\frac{d^2\psi_{2i}(t)}{dt^2} + \lambda_i^2\ \psi_{2i}(t) = -q_{2i}(t) - v_{2i}(t), t < 0,$$

$$\psi_{2i}(-\alpha) = 0, \psi_{2i}(T) = 0,$$

$$\frac{d\psi_{2i}(0-)}{dt} + \psi_{2i}(0+) + \lambda_i^2\psi_{2i}(0-) = 0. \tag{21}$$

Сформулированная выше бесконечномерная задача оптимального управления эквивалентна последовательности таких конечномерных задач:
1) найти минимум функционала

$$J_0(\hat{u}_0) = \hat{\nu}^{-1}\int\limits_{-\alpha}^{T}\hat{u}_0^2(t)dt + \hat{\gamma}^{-1}\ \int\limits_{-\alpha}^{0}\psi_0^2(t)dt +\ \hat{\beta}^{-1}(\psi_0(0-) - \int\limits_{0}^{T}\ \psi_0(t)dt)^2 +$$

$$+\hat{\mu}^{-1}\int\limits_0^T\int\limits_0^T K(t,\tau)\psi_0(\tau)\psi_0(t)d\tau dt + \hat{\alpha}^{-1}(\frac{d\psi_0(-\alpha)}{dt})^2, \tag{22}$$

на решениях задачи (19);
2) найти минимум функционала

$$J_k(\hat{u}_{2k-1}, \hat{u}_{2k}) = \sum_{i=2k-1}^{2k}[\hat{\nu}^{-1}\int\limits_{-\alpha}^{T}\hat{u}_i^2(t)dt + \hat{\gamma}^{-1}\int\limits_{-\alpha}^{0}\ \psi_i^2(t)dt + \hat{\beta}^{-1}(\psi_i(0-) -$$

$$-\int\limits_0^T\psi_i(t)dt)^2 + \hat{\mu}^{-1}\int\limits_0^T\int\limits_0^T\ K(t,\tau)\psi_i(\tau)\psi_i(t)d\tau dt +\ \hat{\alpha}^{-1}(\frac{d\psi_i(-\alpha)}{dt})^2], \tag{23}$$

на решениях задачи (20)–(21), где

$$K(t,\tau) = \begin{cases} \tau, & \mathrm{t} \geq \tau, \\ t, & \mathrm{t} < \tau. \end{cases}$$

Из необходимых и достаточных условий оптимальности для задачи (22), (19) находим

$$\begin{aligned} v_0(t) &= -\hat{\nu} p_0(t), t < 0, \\ u_0(t) &= -\hat{\nu} p_0(t), t > \ 0, \end{aligned} \tag{24}$$

где функция $p_0(t), t \in [-\alpha, T]$ является решением краевой задачи

$$\frac{d\psi_0(t)}{dt} = q_0(t) - \hat{\nu}\ p_0(t), t\ > 0,$$

$$\frac{d^2\psi_0(t)}{dt^2} = -q_0(t) + \ \hat{\nu} p_0(t), t < 0,$$

$$\psi_0(-\alpha) = 0, \frac{d\psi_0(0-)}{dt} + \psi_0(0+) = 0, \psi_0(T) = 0; \tag{25}$$

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = \hat{\beta}^{-1}(\psi_0(0-) - \int\limits_0^T \psi_0(t)dt) - \hat{\mu}^{-1} \int\limits_0^T K(t,\tau)\psi_0(\tau)d\tau,\ t\ > 0,$$

$$\frac{d^2 p_0(t)}{dt^2} = -\hat{\gamma}^{-1}\ \psi_0(t), t < 0,$$

$$p_0(0+) = p_0(0-), \frac{dp_0(0-)}{dt} = \ \hat{\beta}^{-1}(\psi_0(0-) - \int\limits_0^T \ \psi_0(t)dt) = \frac{dp_0(0+)}{dt},$$

$$p_0(-\alpha) = \hat{\alpha}^{-1}\frac{d\psi_0(-\alpha)}{dt}. \tag{26}$$

Из необходимых и достаточных условий оптимальности для задачи (23), (20)–(21) находим

$$\begin{aligned} v_i(t) &= -\hat{\nu} p_i(t), t < 0, \\ u_i(t) &= -\hat{\nu} p_i(t), t > 0, \end{aligned} \tag{27}$$

где функции $p_i(t), t \in [-\alpha, T], i = \ \overline{2k-1, 2k}$ являются решением краевой задачи

$$\frac{d\psi_{2k-1}(t)}{dt} - \lambda_k^2\ \psi_{2k-1}(t) - 2\lambda_k\psi_{2k}(t) = \ q_{2k-1}(t) - \hat{\nu} p_{2k-1}(t), t > 0,$$

$$\frac{d^2\psi_{2k-1}(t)}{dt^2} + \lambda_k^2\ \psi_{2k-1}(t) + 2\lambda_k\psi_{2k}(t) = -\ q_{2k-1}(t) + \hat{\nu} p_{2k-1}(t), t < 0,$$

$$\psi_{2k-1}(-\alpha) = 0, \psi_{2k-1}(T) = 0,$$

$$\frac{d\psi_{2k-1}(0-)}{dt} + \psi_{2k-1}(0+) + \lambda_k^2\psi_{2k-1}(0-) + 2\lambda_k\ \psi_{2k}(0-) = 0; \tag{28}$$

$$\frac{d\psi_{2k}(t)}{dt} - \lambda_k^2\ \psi_{2k}(t) = q_{2k}(t) - \hat{\nu} p_{2k}(t), t\ > 0,$$

$$\frac{d^2\psi_{2k}(t)}{dt^2} + \lambda_k^2\ \psi_{2k}(t) = -q_{2k}(t) + \hat{\nu} p_{2k}(t), t < 0,$$

$$\psi_{2k}(-\alpha)=0,\psi_{2k}(T)=0,$$
$$\frac{d\psi_{2k}(0-)}{dt}+\psi_{2k}(0+)+\lambda_k^2\psi_{2k}(0-)=0; \tag{29}$$

$$\frac{dp_{2k-1}(t)}{dt}+\lambda_k^2 p_{2k-1}(t)=\ \hat\beta^{-1}(\psi_{2k-1}(0-)-\int\limits_0^T\ \psi_{2k-1}(t)dt)-$$
$$-\hat\mu^{-1}\int\limits_0^T K(t,\tau)\ \psi_{2k-1}(\tau)d\tau, t>0,$$
$$\frac{d^2p_{2k-1}(t)}{dt^2}+\lambda_k^2\ p_{2k-1}(t)=-\hat\gamma^{-1}\psi_{2k-1}(t), t<\ 0,$$
$$p_{2k-1}(0+)=p_{2k-1}(0-),\frac{dp_{2k-1}(0-)}{dt}=\hat\beta^{-1}(\psi_{2k-1}(0-)-$$
$$-\int\limits_0^T\psi_{2k-1}(t)dt)-\ \lambda_k^2 p_{2k-1}(0-)=\frac{dp_{2k-1}(0+)}{dt},$$
$$p_{2k-1}(-\alpha)=\hat\alpha^{-1}\frac{d\psi_{2k-1}(-\alpha)}{dt}; \tag{30}$$

$$\frac{dp_{2k}(t)}{dt}+\lambda_k^2 p_{2k}(t)+2\lambda_k p_{2k-1}(t)=\hat\beta^{-1}(\psi_{2k}(0-)-\int\limits_0^T\psi_{2k}(t)dt)-$$
$$-\hat\mu^{-1}\int\limits_0^T K(t,\tau)\ \psi_{2k}(\tau)d\tau, t>0,$$
$$\frac{d^2p_{2k}(t)}{dt^2}+\lambda_k^2 p_{2k}(t)\ +2\lambda_k p_{2k-1}(t)=-\hat\gamma^{-1}\ \psi_{2k}(t), t<0,$$
$$p_{2k}(0+)=p_{2k}(0-),\frac{dp_{2k}(0-)}{dt}=\ \hat\beta^{-1}(\psi_{2k}(0-)-$$
$$-\int\limits_0^T\psi_{2k}(t)dt)-\lambda_k^2 p_{2k}(0-)-2\lambda_k p_{2k-1}(0-)=\frac{dp_{2k}(0+)}{dt},$$
$$p_{2k}(-\alpha)=\hat\alpha^{-1}\frac{d\psi_{2k}(-\alpha)}{dt}. \tag{31}$$

Функционалы (15)–(17) формально можно представить в виде

$$l(y)=l_0(y_0)+\sum_{k=1}^{\infty}\ l_k(y_{2k-1},y_{2k}),$$
$$\hat{\hat{l}}(y)=\hat{\hat{l}}_0(y_0)+\sum_{k=1}^{\infty}\hat{\hat{l}}_k(y_{2k-1},y_{2k}),$$
$$\sigma^2=J_0(\hat u_0)+\sum_{k=1}^{\infty}J_k(\hat u_{2k-1},\hat u_{2k}), \tag{32}$$

где

$$l_0(y_0) = \int\limits_{-\alpha}^{T} q_0(t)y_0(t)dt, \hat{\hat{l}}_0(y_0) = -\int\limits_{-\alpha}^{T} \hat{u}_0(t)\theta_0(t)dt,$$

$$l_k(y_{2k-1}, y_{2k}) = \int\limits_{-\alpha}^{T} (q_{2k-1}(t)y_{2k-1}(t) + q_{2k}(t)y_{2k}(t))dt,$$

$$\hat{\hat{l}}_k(y_{2k-1}, y_{2k}) = -\int\limits_{-\alpha}^{T} (\hat{u}_{2k-1}(t)\theta_{2k-1}(t) + \hat{u}_{2k}(t)\theta_{2k}(t))d.$$

Имеют место представления

$$J_0(\hat{u}_0) = l_0(p_0), \ J_k(\hat{u}_{2k-1}, \hat{u}_{2k}) = l_k(y_{2k-1}, y_{2k}), k > 0, \tag{33}$$

$$\hat{l}_0(y_0) = l_0(\hat{\vartheta}_0), \tag{34}$$

если функция $\hat{\vartheta}_0(t), t \in [-\alpha, T]$ является решением краевой задачи

$$\frac{d\hat{p}_0(t)}{dt} = \hat{\nu}(\theta_0(t) - \hat{\vartheta}_0(t)), t > 0,$$

$$\frac{d^2\hat{p}_0(t)}{dt^2} = -\hat{\nu}\ (\theta_0(t) - \hat{\vartheta}_0(t)), t < 0,$$

$$\hat{p}_0(-\alpha) = 0, \frac{d\hat{p}_0(0-)}{dt} + \hat{p}_0(0+) = 0, \ \hat{p}_0(T) = 0; \tag{35}$$

$$\frac{d\hat{\vartheta}_0(t)}{dt} = \hat{\beta}^{-1}(\hat{p}_0(0-) - \int\limits_0^T \hat{p}_0(t)dt) - \hat{\mu}^{-1}\int\limits_0^T K(t,\tau)\hat{p}_0(\tau)d\tau, t > 0,$$

$$\frac{d^2\hat{\vartheta}_0(t)}{dt^2} = -\ \hat{\gamma}^{-1}\hat{p}_0(t), t < 0,$$

$$\hat{\vartheta}_0(0+) = \hat{\vartheta}_0(0-), \frac{d\hat{\vartheta}_0(0-)}{dt} = \hat{\beta}^{-1}\ (\hat{p}_0(0-) - \int\limits_0^T \hat{p}_0(t)dt),$$

$$\hat{\vartheta}_0(-\alpha) = \hat{\alpha}^{-1}\frac{d\hat{p}_0(-\alpha)}{dt}. \tag{36}$$

Кроме того, справедливы представления

$$J_k(\hat{u}_{2k-1}, \hat{u}_{2k}) = \ l_k(p_{2k-1}, p_{2k}), \hat{l}_k(y_{2k-1}, y_{2k}) = \ l_k(\hat{\vartheta}_{2k-1}, \hat{\vartheta}_{2k}), k > 0, \tag{37}$$

где функции $\hat{\vartheta}_{2k-1}(t), \hat{\vartheta}_{2k}(t), t \in [-\alpha, T]$ являются решением краевой задачи

$$\frac{d\hat{p}_{2k-1}(t)}{dt} - \lambda_k^2\ \hat{p}_{2k-1}(t) - 2\lambda_k\hat{p}_{2k}(t) = \ \hat{\nu}(\theta_{2k-1}(t) - \hat{\vartheta}_{2k-1}(t)), t\ > 0,$$

$$\frac{d^2\hat{p}_{2k-1}(t)}{dt^2} + \lambda_k^2\ \hat{p}_{2k-1}(t) + 2\lambda_k\hat{p}_{2k}(t) = -\ \hat{\nu}(\theta_{2k-1}(t) - \hat{\vartheta}_{2k-1}(t)), t < 0,$$

$$\hat{p}_{2k-1}(-\alpha) = 0,$$

$$\frac{d\hat{p}_{2k-1}(0-)}{dt} + (1 + \ \lambda_k^2)\hat{p}_{2k-1}(0+) + 2\lambda_k\ \hat{p}_{2k}(0+) = 0, \hat{p}_{2k-1}(T) = \ 0; \tag{38}$$

$$\frac{d\hat{p}_{2k}(t)}{dt} - \lambda_k^2\ \hat{p}_{2k}(t) = \hat{\nu}(\theta_{2k}(t) -\ \hat{\vartheta}_{2k}(t)), t > 0,$$
$$\frac{d^2\hat{p}_{2k}(t)}{dt^2} + \lambda_k^2\ \hat{p}_{2k}(t) = -\hat{\nu}(\theta_{2k}(t) -\ \hat{\vartheta}_{2k}(t)), t < 0,$$
$$\hat{p}_{2k}(-\alpha) = 0,$$
$$\frac{d\hat{p}_{2k}(0-)}{dt} + (1+\ \lambda_k^2)\hat{p}_{2k}(0+) = 0, \hat{p}_{2k}(T) =\ 0; \tag{39}$$

$$\frac{d\hat{\vartheta}_{2k-1}(t)}{dt} + \lambda_k^2\ \hat{\vartheta}_{2k-1}(t) = \hat{\beta}^{-1}\ (\hat{p}_{2k-1}(0-) - \int\limits_0^T \hat{p}_{2k-1}(t)\ dt) -$$
$$-\hat{\mu}^{-1}\int\limits_0^T K(t,\tau)\ \hat{p}_{2k-1}(\tau)d\tau, t > 0,$$
$$\frac{d^2\hat{\vartheta}_{2k-1}(t)}{dt^2} +\ \lambda_k^2\hat{\vartheta}_{2k-1}(t) = -\ \hat{\gamma}^{-1}\hat{p}_{2k-1}(t), t < 0,$$
$$\hat{\vartheta}_{2k-1}(0+) = (1+\lambda_k^2)\ \hat{\vartheta}_{2k-1}(0-), \frac{d\hat{\vartheta}_{2k-1}(0-)}{dt} = \hat{\beta}^{-1}(\hat{p}_{2k-1}(0-) -$$
$$-\int\limits_0^T \hat{p}_{2k-1}(t)dt),\ \hat{\vartheta}_{2k-1}(-\alpha) = \hat{\alpha}^{-1}\frac{d\hat{p}_{2k-1}(-\alpha)}{dt}; \tag{40}$$

$$\frac{d\hat{\vartheta}_{2k}(t)}{dt} + \lambda_k^2\hat{\vartheta}_{2k}(t) + 2\lambda_k\hat{p}_{2k-1}(t) = \hat{\beta}^{-1}\ (\hat{p}_{2k}(0-) - \int\limits_0^T \hat{p}_{2k}(t)dt) -$$
$$-\hat{\mu}^{-1}\int\limits_0^T K(t,\tau)\ \hat{p}_{2k}(\tau)d\tau, t > 0,$$
$$\frac{d^2\hat{\vartheta}_{2k}(t)}{dt^2} + \lambda_k^2\hat{\vartheta}_{2k}(t) + 2\lambda_k\ \hat{\vartheta}_{2k-1}(t) = -\hat{\gamma}^{-1}\ \hat{p}_{2k}(t), t < 0,$$
$$\hat{\vartheta}_{2k}(0+) = (1+\lambda_k^2)\ \hat{\vartheta}_{2k}(0-) + 2\lambda_k\ \hat{\vartheta}_{2k-1}(0-), \frac{d\hat{\vartheta}_{2k}(0-)}{dt} = \hat{\beta}^{-1}(\hat{p}_{2k}(0-) -$$
$$-\int\limits_0^T \hat{p}_{2k}(t)dt),\ \hat{\vartheta}_{2k}(-\alpha) = \hat{\alpha}^{-1}\frac{d\hat{p}_{2k}(-\alpha)}{dt}. \tag{41}$$

Результаты этого пункта частично получены в работе [4].

3. Обоснование минимаксных оценок

Для обоснования полученных результатов необходимо указать условия на исходные данные задачи минимаксного оценивания с распределенным наблюдением, при которых будут справедливыми приведенные выше построения.

Из работы [2] следует, что начальное условие $\varphi(x)$ и внешнее возмущение $\hat{f}(x,t)$ для задачи (1) - (3) должны удовлетворять условиям

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \ (|\varphi_{2k-1}| + |\varphi_{2k}|), \tag{42}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k \ (||f_{2k-1}||_{C(-\alpha,0)} + ||f_{2k}||_{C(-\alpha,0)})+$$
$$+\lambda_k||f_{2k-1}||_{C(0,T)} + ||f_{2k}||_{C(0,T)}). \tag{43}$$

Тогда функция $y(x,t)$, предствленная рядом (9), будет принадлежать классу $C^1(\bar{D}) \cap C^2(D_-) \cap \ C^{2,1}(D_+)$ и удовлетворять условиям задачи (1)–(3). Поэтому функционалы (14)–(16) будут ограниченными.

Основным моментом в обосновании минимаксных оценок является разрешимость задачи оптимального управления (18)–(21). С этой целью воспользуемся альтернативными условиями оптимальности (метод прямого варьирования) для задач (22), (19) и (23), (20)–(21) в форме систем интегральных уравнений вида

$$\hat{\nu}^{-1}v_0(t) + \int_{-\alpha}^{0} K_{0,1}^{(0,1)}(t,\tau)v_0(\tau)d\tau + \int_{0}^{T} K_{0,2}^{(0,1)}(t,\tau)u_0(\tau)d\tau =$$
$$= M_0^{(0,1)}(t)q_0(t), t \in [-\alpha, 0),$$
$$\hat{\nu}^{-1}u_0(t) + \int_{-\alpha}^{0} \ K_{0,1}^{(0,2)}(t,\tau)v_0(\tau)d\tau + \int_{0}^{T} K_{0,2}^{(0,2)}(t,\tau)u_0(\tau)d\tau =$$
$$= \hat{M}_0^{(0,2)}(t)q_0(t), t \in \ (0,T]; \tag{44}$$

$$\hat{\nu}^{-1}v_i(t) + \sum_{j=2k-1}^{2k}(\int_{-\alpha}^{0} K_{j,1}^{(1,i)}(t,\tau) \ v_j(\tau)d\tau + \int_{0}^{T} K_{j,2}^{(1,i)}(t,\tau)u_j(\tau)d\tau) =$$
$$= \sum_{j=2k-1}^{2k} M_j^{(1,i)}(t)q_j(t), t \in [-\alpha, 0),$$
$$\hat{\nu}^{-1}u_i(t) + \sum_{j=2k-1}^{2k}(\int_{-\alpha}^{0} K_{j,1}^{(2,i)}(\tau)v_j(\tau)d\tau + \int_{0}^{T} K_{j,2}^{(2,i)}(\tau)\xi_j(\tau)d\tau) =$$
$$= \sum_{j=2k-1}^{2k} M_j^{(2,i)}(t)q_j(t), t \in [0,T], i = \overline{2k-1, 2k}, \tag{45}$$

где функции $K_{j,k}^{(l,i)}(t,\tau), M_j^{(l,i)}(t)$ определяются из интегральных представлений решений краевых задач (19)–(21).

Однозначная разрешимость систем (44)–(45) в гильбертовых пространствах $L_2(-\alpha,0)\times L_2(0,T)$ и $(L_2(-\alpha,0))^2\times(L_2(0,T))^2$ соответственно устанавливается с учетом положительной определенности операторов, составляющих левые части этих систем, аналогично тому как это сделано в работе [5]. Дифференцируя системы (44)–(45) по времени как тождества и используя априорные оценки, устанавливаем их однозначную разрешимость в пространствах $C(-\alpha,0)\times C(0,T)$ и $(C(-\alpha,0))^2\times(C(0,T))^2$ соответственно.

Функция $\psi(x,t)$, заданная рядом

$$\psi(x,t) = Y_0(x)\psi_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty}(Y_{2k-1}(x)\psi_{2k-1}(t) + \ Y_{2k}(x)\psi_{2k}(t)), \qquad (46)$$

коэффициенты которого определяются как решения краевых задач (19)–(21), формально является решением такой краевой задачи:

$$\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2} - \ \frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} = -q(x,t) - v(x,t),$$

$$t\in(-\alpha,0), x\in(0,1); \qquad (47)$$

$$\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 \ \psi(x,t)}{\partial x^2} = q(x,t) + u(x,t),$$

$$t\in(0,T), x\in(0,1); \qquad (48)$$

$$\psi(0,t) = \psi(1,t), \frac{\partial\psi(1,t)}{\partial x} = 0, t\in[-\alpha,T]; \qquad (49)$$

$$\psi(x,-\alpha) = \psi(x,T) = 0,$$

$$\psi(x,0+) + \frac{\partial\psi(x,0-)}{\partial t} \ = \frac{\partial^2\psi(x,0-)}{\partial x^2}, x\in \ (0,1). \qquad (50)$$

Под решением выписанной выше задачи будем понимать функцию $\psi(x,t)\in C^2(D_-)\cap\ C^{2,1}(D_+)$, которая поточечно удовлетворяет соотношениям (47)–(50) при условии, что функции $q(x,t),\ \hat{u}(x,t)$ заданы и имеют такие свойства:

$$q(x,t)\in C^{1,0}(\bar{D}), q(0,t) = q(1,t),\ \frac{\partial q(1,t)}{\partial x} = 0;$$

$$v(x,t)\in C^{1,0}(D_-), v(0,t) = v(1,t),\ \frac{\partial v(1,t)}{\partial x} = 0;$$

$$u(x,t)\in C^{1,0}(D_+), u(0,t) = u(1,t),\ \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = 0; \qquad (51)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\ [\lambda_k^3\ (||q_{2k}||_{C(-\alpha,0)}\ +\ ||v_{2k}||_{C(-\alpha,0)})\ +\ \lambda_k^2\ (||q_{2k-1}||_{C(-\alpha,T)}\ +$$

$$+\ ||v_{2k-1}||_{C(-\alpha,T)} + ||u_{2k-1}||_{C(0,T)} + ||q_{2k}||_{C(0,T)} + ||u_{2k}||_{C(0,T)})]\ <\ \infty. \qquad (52)$$

Таким образом, мы обозначили условия на исходные функции, которые гарантируют существование решения задачи.

Заключение

В работе проведено обоснование минимаксных оценок линейных функционалов от решений параболо-гиперболических уравнений с нелокальными краевыми условиями и распределенным наблюдением. Найдены условия на исходные функции задачи, которые гарантируют существование решения задачи минимаксного оценивания. В дальнейшем исследовании будет рассмотрена задача с разделенным наблюдением.

Литература

1. Сабитов К. Б. Краевая задача для уравнений параболо-гиперболического типа с нелокальными краевыми условиями // Дифференциальные уравнения. — 2010. — Т. 46, №10. — С. 1468–1478.
2. Капустян В. О., Пишнограєв І. О. Умови існування і єдиності розв'язку параболо-гіперболічного рівняння з нелокальними крайоими умовами // Наукові вісті НТУУ „КПІ“. Теоретичні та прикладні проблеми математики. — 2012. — №4. — С. 72–76.
3. Наконечний О. Г. Оптимальне керування та оцінювання в рівняннях із частинними похідними. — К.: КНУ, 2004. — 102 с.
4. Kapustyan V. O., Pyshnograiev I. O. Minimax Estimates for Solutions of Parabolic-Hyperbolyc equations with Nonlocal Boundary Conditions // Continuous and Distibuted Systems II / A. Sadovnichiy, M. Zgurovsky. — Springer International Publishing, 2015. — P. 277–296.
5. Kapustyan V. O., Pyshnograiev I. O. Distributed Control With The General Quadratic Criterion In A Special Norm For Systems Described By Parabolic-Hyperbolic Equations With Nonlocal Boundary Conditions // Cybernetics and Systems Analysis. — 2015. — Vol. 51, №3 — P. 438–447.

Надійшла 15.11.2015