Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2015, №3(120) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.977: 519.8
MSC 49Jxx, 49Nxx

CONFRONTATION PROBLEMS WITH THE DYNAMICS GOMPERTZIAN SYSTEMS

Oleksandr Nakonechniy, Petro Zinko
Faculty of Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, E-mail: a.nakonechniy@gmail.com, petro.zinko@gmail.com.

ЗАДАЧІ ПРОТИБОРСТВА В СИСТЕМАХ З ДИНАМІКОЮ ГОМПЕРЦА

О. Г. Наконечний, П. М. Зінько
Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна, E-mail: a.nakonechniy@gmail.com, petro.zinko@gmail.com.

Abstract. The article investigates the problem of guaranteed control dynamics in conflict systems described by differential equations Gompertzian. For special criteria as proven allegations of view of optimal control in class software and positional strategies.
Keywords: differential equations, optimal strategies, Pareto set, dynamics Gompertzian.

Резюме. В статті досліджуються задачі гарантованого керування динамікою систем в умовах конфлікту, що описуються диференціальними рівняннями Гомперца. Для спеціальних критеріїв якості доведені твердження про вигляд оптимальних керувань в класі програмних та позиційних стратегій.
Ключові слова: диференціальні рівняння, оптимальні стратегії, множина Паретто, динаміка Гомперца.

Вступ

Задачі інформаційного протиборства при повільному розвитку процесів розглядалися в багатьох роботах (напр. [1]–[4]). Проте відомо [5]–[7], що для моделювання процесів, які швидко зростають за часом може бути застосована динаміка Гомперца. В ситуації швидкого росту процесів доцільно вводити керуючі впливи, що уповільнюють такий ріст. В той же час на динаміку росту можуть впливати особи, що зацікавлені в протилежному результаті. В такому випадку виникають задачі протиборства (зокрема інформаційного протиборства). Нами будуть розглядатися дві коаліції гравців, динаміка процесів яких описується диференціальними рівняннями Гомперца. Коаліції вибирають як програмні так і позиційні стратегії. Для знаходження оптимальних стратегій використовується принцип гарантованого результату. Для знаходження лінійних позиційних стратегій коаліції використовується матричний принцип максимуму Гамільтона-Понтрягіна. Розглядається також регуляризоване керування з певним функціоналом регуляризації.

1. Постановка задачі

Нехай є дві коаліції гравців K_1 та K_2 із стратегіями
$U = \{u(t) = (u_1(t), ..., u_{m_1}(t)), t \in [0, t_1]\}$,
$V = \{v(t) = (v_1(t), ..., v_{m_2}(t)), t \in [0, t_1]\}$, відповідно.

При вибраних стратегіях $u(t)$, $v(t)$ динаміка процесу описується системою диференціальних рівнянь Гомперца вигляду:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) \ln x_j(t) + \sum_{j=1}^{m_1} b_{ij}(t) u_j(t) + \sum_{j=1}^{m_2} c_{ij}(t) v_j(t) \right) x_i(t), \quad i = \overline{1, n} \tag{1}$$

з початковою умовою

$$x_i(0) = x_i^0, \ i = \overline{1, n}, \tag{2}$$

відповідно, для коаліції K_1 при $i = \overline{1, s}$ та для коаліції K_2 при $i = \overline{s+1, n}$, де $s < n$, $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$, $c_{ij}(t)$ — неперервні на $[0, t_1]$ функції; $u_j(t)$, $v_j(t)$ — кусково-неперервні на $[0, t_1]$ функції. Під розв'язком системи рівнянь (1),(2) будемо розуміти функції $x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, що задовольняють рівнянню (1) майже всюди. Якщо стратегії $u(t)$, $v(t)$ належать деяким множинам певних функціональних просторів, то будемо досліджувати такі задачі:

$$I_k(u, v) \to \max_{u \in U}, \ k = \overline{1, s},$$
$$I_k(u, v) \to \min_{v \in V}, \ k = \overline{s+1, r}, \ r \le n,$$

де $I_k(u, v) = g_k(x_k(t_1))$, $k = \overline{1, r}$ — функції цілі для гравців коаліцій K_1, K_2. Зауважимо спочатку, що має місце

Твердження 1. Нехай вектор-функція $\phi(t)$ є розв'язком рівняння

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = A(t)\phi(t) + B(t)u(t) + C(t)v(t), \ \phi(0) = \phi^0, \tag{3}$$

де $A(t), B(t), C(t)$ — матриці з елементами $a_{ij}(t), b_{ij}(t), c_{ij}(t)$, відповідно, $u(t) = (u_1(t), ..., u_{m_1}(t))$, $v(t) = (v_1(t), ..., v_{m_2}(t))$. Тоді, якщо $x_i^0 > 0$, то мають місце такі рівності $x_i(t) = e^{\left(\phi(t), e^i\right)}$, $i = \overline{1, n}$, де e^i — i-й орт.

Доведення. Оскільки $\frac{d \ln x_i(t)}{dt} = \frac{dx_i(t)}{dt} x_i^{-1}(t)$, то поклавши $\ln x_i(t) = \phi_i(t)$, одержимо рівняння (3). $\square$

2. Принцип гарантованого результату

Кожен гравець із коаліцій K_1, K_2 знає множини стратегій U, V а також свої функції цілі. Потрібно знайти «оптимальні стратегії» для кожної коаліції. Для знаходження «оптимальних стратегій» використаємо принцип гарантованого результату. Надалі будемо виходити із інтересів коаліції K_1 (аналогічні результати можна отримати для коаліції K_2). Нехай стратегії коаліції K_2 відомі. Тоді ми будемо мати s критеріїв для коаліції K_1. За оптимальне значення $u\,(t)$ візьмемо векторний максимум за Парето.

Твердження 2. Нехай $g_k\,(x)\,,\ k = \overline{1,s}$ — додатні та монотонно зростаючі функції на $[0, \infty)$. Тоді має місце співвідношення $\overrightarrow{\max\limits_{u\in U}}(g_1\,(x_1\,(t_1))\,, ...,$ $g_s\,(x_s\,(t_1))) = \overrightarrow{\max\limits_{u\in U}}\,(\phi_1\,(t_1)\,, ..., \phi_s\,(t_1))$, де $x_i\,(t)$ та$\phi_i\,(t) = \left(\phi\,(t)\,, e^i\right)$ знаходяться як розв'язки рівнянь (1)–(3), відповідно, а через $\overrightarrow{\max}\,(\cdot)$ позначено векторний максимум за Парето.

Доведення. Позначимо через P бінарне відношення Парето в просторі R^s та нехай $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_s)$ та $\overrightarrow{y} = (y_1, ..., y_s)$ два вектори із R^s. Тоді $\overrightarrow{x}P\overrightarrow{y}$ тоді і тільки тоді, коли $x_i \geq y_i$, $i = \overline{1,s}$, причому принаймі одна нерівність строга. Нехай далі u_1 та u_2 дві стратегії гравців із коаліції K_1. Тоді $u_1 P u_2$ тоді і тільки тоді, коли $g_i\left(x_i^{(1)}\,(t_1)\right) \geq g_i\left(x_i^{(2)}\,(t_1)\right)$, $i = \overline{1,s}$, де $x_i^{(q)}\,(t_1) = x_i\,(t_1)\,|_{u=u_q}$, $q = \overline{1,2}$. Враховуючи монотонність g_i ці нерівності виконуються тоді і тільки тоді, коли $x_i^{(1)}\,(t_1) \geq x_i^{(2)}\,(t_1)$, а оскільки $x_i\,(t_1) = e^{\left(\phi(t_1), e^i\right)}$, то $\left(\phi^{(1)}\,(t_1)\,, e^i\right) \geq \left(\phi^{(2)}\,(t_1)\,, e^i\right)$, що і потрібно було показати. □

Далі розглядаються два випадки:
- ◦ коли коаліція K_1 вибирає програмні стратегії;
- ◦ коли коаліція K_1 вибирає позиційні стратегії.

3. Множина Парето

Твердження 3. Нехай U – опукла замкнена обмежена множина в просторі $L_2\,(0, t_1)$. Тоді множина Парето має вигляд

$$\Pi = \left\{u^0\,(\lambda)\mid \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_s)\,,\ \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1\right\},$$

де $u^0\,(\lambda) \in Arg\max\limits_{u\in U} \int_0^{t_1} (z\,(t)\,, B\,(t)\,u\,(t))\,dt$, а функція $z\,(t)$ є розв'язком рівняння

$$-\frac{dz\,(t)}{dt} = A^T\,(t)\,z\,(t)\,,\ z\,(t_1) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i e^i.$$

Доведення. Оскільки множина U опукла, то множина точок $(\phi_1\,(t_1)\,, ..., \phi_s\,(t_1))$ також опукла в просторі R^s. Тому множина Парето співпадає з множиною $Arg\max\limits_{u\in U} \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \phi_i\,(t_1)$. Зауважимо, що справедливі рівності

$\sum_{i=1}^{s} \lambda_i \phi_i(t_1) = \left(\phi(t_1), \sum_{i=1}^{s} \lambda_i e^i\right) = \left(z(0), \phi^0\right) + \int_0^{t_1} (z(t), B(t)\, u(t))\, dt + + \int_0^{t_1} (z(t), C(t)\, v(t))\, dt$, а тому виконується рівність

$$Arg\max_{u\in U} \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \phi_i(t_1) = Arg\max_{u\in U} \int_0^{t_1} (z(t), B(t)\, u(t))\, dt,$$

що і потрібно було показати. □

Наслідок. Стратегії гравців із коаліції K_1, що належать множині Парето П, не залежать від стратегій гравців із коаліції K_2.

Твердження 4. Нехай $u^0(\lambda) \in \Pi$ а множина V стратегій гравців коаліції K_2 — обмежена та слабо замкнена. Тоді має місце співвідношення

$$g_i(x_i(t_1, \lambda)) \in \left[g_i^{(1)}(\lambda), g_i^{(2)}(\lambda)\right],$$

де $x_i(t_1, \lambda) = x_i(t_1)\,|_{\,u=u^0(\lambda)}$, а $g_i^{(q)}(\lambda) = g_i\left(x_i^{(q)}(t_1)\right)$, $q = \overline{1,2}$, та $x_i^{(q)}(t_1)$ визначаються із рівнянь

$$\frac{dx_i^{(q)}(t)}{dt} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(t) \ln x_j^{(q)}(t) + \sum_{j=1}^{m_1} b_{ij}(t)\, u_j^0(\lambda) + \sum_{j=1}^{m_2} c_{ij}(t)\, \bar{v}_{ij}^{(q)}(t)\right) x_i^{(q)}(t),$$

$$x_i^{(q)}(0) = x_i^0,$$

$$\bar{v}_i^{(1)}(t) \in Arg\min_{v\in V} \int_0^{t_1} (\bar{z}_i(t), C(t)\, v(t))\, dt,$$

$$\bar{v}_i^{(2)}(t) \in Arg\max_{v\in V} \int_0^{t_1} (\bar{z}_i(t), C(t)\, v(t))\, dt,$$

$$-\frac{d\bar{z}_i(t)}{dt} = A^T(t)\, \bar{z}_i(t), \;\; \bar{z}_i(t_1) = e^i.$$

Доведення. Оскільки для $i = \overline{1,s}$ виконується:

$\min_{v\in V} g_i(x_i(t, \lambda)) = g_i\left(\exp\left(\min_{v\in V}\left(\phi(t), e^i\right)\right)\right)$, то враховуючи, що $\left(\phi(t_1), e^i\right) = (\bar{z}_i(t_1), \phi_0) + \int_0^{t_1} \left(\bar{z}_i(t), B(t)\, u^0(\lambda)\right) dt + \int_0^{t_1} (\bar{z}_i(t), C(t)\, v(t))\, dt$, одержимо такі співвідношення

$$\min_{v\in V}\left(\phi(t_1), e^i\right) = (\bar{z}_i(t), \phi_0) + \int_0^{t_1} \left(\bar{z}_i(t), B(t)\, u^0(\lambda)\right) dt +$$
$$+ \min_{v\in V} \int_0^{t_1} (\bar{z}_i(t), C(t)\, v(t))\, dt = \left(\phi^{(1)}(t_1), e^i\right),$$

де $\phi^{(1)}(t)$ знаходиться із рівняння

$$\frac{d\phi^{(1)}(t)}{dt} = A(t)\, \phi^{(1)}(t) + B(t)\, u^0(\lambda) + C(t)\, \bar{v}_i^{(1)}(t), \phi^{(1)}(0) = x^0.$$

Аналогічно отримаємо $\max_{v\in V}\left(\phi(t_1), e^i\right) = \left(\phi^{(2)}(t_1), e^i\right)$.

На основі отриманих співвідношень можемо записати послідовно такі нерівності $\left(\phi^{(1)}(t_1), e^i\right) \leq \left(\phi(t_1), e^i\right) \leq \left(\phi^{(2)}(t_1), e^i\right)$,

$$x_i^{(1)}(t_1,\lambda) \le x_i(t_1,\lambda) \le x_i^{(2)}(t_1,\lambda),$$

$$g_i\left(x_i^{(1)}(t_1,\lambda)\right) \le g_i(x_i(t_1,\lambda)) \le g_i\left(x_i^{(2)}(t_1,\lambda)\right).$$

Таким чином твердження 4 доведено. □

4. Позиційні стратегії

Тепер припустимо, що в коаліції K_1 використовуються позиційні стратегії у вигляді $u(t) = L(t)\phi(t)$, тобто

$$u_i(t) = \left(L(t)\phi(t), e^i\right) = \left(\phi(t), L^T(t)e^i\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \phi_k(t) l_{ki}(t) = \sum_{k=1}^{n} l_{ki}(t) \ln x_k(t),$$

де $l_{ki}(t) = \left(L^T(t)e^i, e^k\right)$.

Введемо зважений критерій

$$J(u,v) = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \left(\phi(t_1), e^k\right),$$

де $\lambda_k \ge 0, \sum_{k=1}^{s} \lambda_k = 1$.

Твердження 5. Нехай $u^0(t)$ — деяка стратегія коаліції K_1, а невідомі значення ϕ^0 та $v(t)$ належать обмеженій множині G в просторі $R^n \times L_2(0,t_1)$. Тоді мають місце такі нерівності

$$J_1\left(u^0\right) \le J(u,v) \le J_2\left(u^0\right),$$

де $J_1\left(u^0\right) = -(\left(Q_0^{(1)}z^{(1)}(0), z^{(1)}(0)\right) + \int_0^{t_1}\left(Q_1^{(1)}z^{(1)}(t), z^{(1)}(t)\right)dt)^{1/2}$,

$J_2\left(u^0\right) = (\left(Q_0^{(2)}z^{(1)}(0), z^{(1)}(0)\right) + \int_0^{t_1}\left(Q_1^{(2)}z^{(1)}(t), z^{(1)}(t)\right)dt)^{1/2}$,

$Q_0^{(q)}, Q_1^{(q)}$ — деякі невід'ємно визначені матриці, $z^{(1)}(t)$ — розв'язок рівняння

$-\frac{dz^{(1)}(t)}{dt} = (A(t) + B(t)L(t))^T z^{(1)}(t), z^{(1)}(t_1) = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k e^k$.

Доведення. Зауважимо, що справедливі рівності $\left(\sum_{k=1}^{s} \lambda_k e^k, \phi(t_1)\right) = \left(z^{(1)}(t_1), \phi(t_1)\right) = \left(z^{(1)}(0), \phi^0\right) + \int_0^{t_1}\left(z^{(1)}(t), C(t)v(t)\right)dt$. Оскільки множини G, яким належать $\left(\phi^0, f\right)$ обмежені, то знайдуться додатно визначені матриці $\bar{Q}_0^{(q)}, \bar{Q}_1^{(q)}, q = \overline{1,2}$, такі, що $G_1 \subseteq G \subseteq G_2$, де

$$G_q = \left\{\left(\phi^0, f\right) \mid \left(\bar{Q}_0^{(q)}\phi^0, \phi^0\right) + \int_0^{t_1}\left(\bar{Q}_1^{(q)}f(t), f(t)\right)dt \le 1\right\}.$$

Отже, можемо записати такі співвідношення

$$\sup_{G}\left(z^{(1)}(t_1),\phi(t_1)\right)\le\sup_{G_2}\left(z^{(1)}(t_1),\phi(t_1)\right)=$$

$$=\left(\left(\left(\bar{Q}_o^{(2)}\right)^{-1}z^{(1)}(0),z^{(1)}(0)\right)+\int_0^{t_1}\left(C\left(\bar{Q}_1^{(2)}\right)^{-1}C^Tz^{(1)}(t),z^{(1)}(t)\right)dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\inf_{G}\left(z^{(1)}(t_1),\phi(t_1)\right)\ge\inf_{G_1}\left(z^{(1)}(t_1),\phi(t_1)\right)=$$

$$=\left(\left(\left(\bar{Q}_o^{(1)}\right)^{-1}z^{(1)}(0),z^{(1)}(0)\right)+\int_0^{t_1}\left(C\left(\bar{Q}_1^{(1)}\right)^{-1}C^Tz^{(1)}(t),z^{(1)}(t)\right)dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Твердження 5 доведено. □

Твердження 6. Нехай $L(t)$ при кожному t належить множині D простору матриць та існує матриця $\hat{L}\in D$ така, що виконується рівність

$$\max_{L}\min_{v\in G_1}\left(z^{(1)}(t_1),\phi(t_1)\right)=\min_{v\in G_1}\left(z^{(1)}(t_1),\hat{\phi}(t_1)\right),$$

де $\hat{\phi}(t_1)$ знаходиться із розв'язку рівняння (3) при $u(t)=\hat{u}(t)=\hat{L}(t)\phi(t)$. Тоді матриця $\hat{L}(t)$ може бути знайдена із умови

$$\hat{L}(t)\in Arg\max_{L}f(L), \tag{4}$$

де

$$f(L)=-\left(\psi(t),(B(t)L(t))^Tz^{(1)}(t)\right)=-\left(B(t)L(t)\psi(t),z^{(1)}(t)\right)=$$

$$=-SpL(t)\psi(t)\left(B^T(t)z^{(1)}(t)\right)^T=-\left(L(t),B^T(t)z^{(1)}(t)\psi^T(t)\right),$$

а функція $\psi(t)$ із рівнянь

$$\frac{d\psi(t)}{dt}=(A(t)+B(t)L(t))\psi(t)+C(t)\left(\bar{Q}_1^{(1)}\right)^{-1}C^T(t),$$

$$\psi(0)=\left(\bar{Q}_0^{(1)}\right)^{-1}z^{(1)}(0).$$

Доведення. Із співвідношень

$$\min_{v\in G_1}\left(z^{(1)}(t_1),\phi(t_1)\right)=$$

$$=-\left(\left(Q_0^{(1)}z^{(1)}(0),z^{(1)}(0)\right)+\int_0^{t_1}\left(Q_1^{(1)}z^{(1)}(t),z^{(1)}(t)\right)dt\right)^{1/2}=-\Phi(L),$$

отримуємо

$$\max_{L\in D}\min_{v\in G_1}\left(z^{(1)}(t_1),\phi(t_1)\right)=-\min_{L\in D}\Phi(L)=-\left(\min_{L\in D}\Phi_1(L)\right)^{1/2},$$

де $\Phi_1(L)=\Phi^2(L)$.

Для знаходження матриці $L(t)$ застосуємо принцип максимуму. Введемо функцію Гамільтона-Понтрягіна

$$H\left(\psi(t), z^{(1)}(t), L(t)\right) = -\left(\psi(t), (A(t) + B(t)L(t))^T z^{(1)}(t)\right) + \\ + \left(Q_1^{(1)} z^{(1)}(t), z^{(1)}(t)\right) = -\left((A(t) + B(t)L(t))\psi(t), z^{(1)}(t)\right) + \\ + \left(Q_1^{(1)} z^{(1)}(t), z^{(1)}(t)\right),$$

де функція $\psi(t)$ є розв'язком спряженого рівняння

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = (A(t) + B(t)L(t))\psi(t) + \left(Q_1^{(1)} z^{(1)}(t), z^{(1)}(t)\right), \psi(0) = Q_0^{(1)} z^{(1)}(0).$$

Тоді, якщо $\min\limits_{L\in D} \Phi_1(L) = \Phi_1\left(\hat{L}\right)$, то

$$\hat{L} \in Arg \max_{L\in D} f(L(t)),\ f(L(t)) = -\left(B(t)L(t)\psi(t), z^{(1)}(t)\right),$$

що й потрібно було довести. □

Наслідок. Нехай

$$D = \left\{L(t) \mid SpL(t)L^T(t) \le \gamma_1^2(t),\ \gamma_1(t) > 0\right\}.$$

Тоді $\hat{L} = -\gamma_1 \frac{B^T(t)z^{(1)}(t)\psi^T(t)}{\left(SpB^T(t)z^{(1)}(t)\psi^T(t)\psi(t)z^{(1)T}(t)B(t)\right)^{1/2}}$.

Доведення. Оскільки $f_1(L(t)) = -\left\langle L(t), B^T(t)z^{(1)}(t)\psi^T(t)\right\rangle$, то враховуючи нерівність Коші-Буняковського будемо мати співвідношення

$$\max_{L\in D} f_1(L(t)) = \left\|B^T(t)z^{(1)}(t)\psi(t)\right\|\gamma_1,$$

де $\|L(t)\| = \left(SpL(t)L^T(t)\right)^{1/2}$, при цьому

$$\hat{L}(t) = -\gamma_1 \frac{B^T(t)z^{(1)}(t)\psi^T(t)}{\left\|B^T(t)z^{(1)}(t)\psi^T(t)\right\|} = \\ = -\gamma_1 \frac{B^T(t)z^{(1)}(t)\psi^T(t)}{\left(SpB^T(t)z^{(1)}(t)\psi^T(t)\psi(t)z^{(1)T}(t)B(t)\right)^{1/2}}.$$

□

Твердження 7. Нехай матриця L не залежить від t. Тоді якщо D — компактна в просторі матриць, то існує $\hat{L}$ таке, що $\min\limits_{L\in D} \Phi_1(L) = \Phi_1\left(\hat{L}\right)$, при цьому

$$\hat{L} = -\gamma_1 \int_0^{t_1} B^T(t)z^{(1)}(t)\psi^T(t)\,dt \times \\ \times \left(\int_0^{t_1} SpB^T(t)z^{(1)}(t)\psi^T(t)\psi(t)z^{(1)T}(t)B(t)\,dt\right)^{-1/2}.$$

Доведення. Оскільки функція $\Phi_1(L)$ неперервно залежить від матриці L, а D — компакт, то існує матриця $\hat{L} \in D$ така, що

$$\Phi_1\left(\hat{L}\right) = \min_{L \in D} \Phi_1(L).$$

Зауважимо, що у випадку незалежності L від t функція Гамільтона-Понтрягіна буде мати вигляд

$$H\left(\psi(t), z^{(1)}(t), L\right) = -\left(\int_0^{t_1} B^T(t)\, z^{(1)}(t)\, \psi^T(t)\, dt, L\right) + \beta\left(\psi(t), z^{(1)}(t)\right),$$

де $\beta\left(\psi(t), z^{(1)}(t)\right)$ не залежить від L. Отже справджується рівність

$$\max_{L \in D} H\left(\psi(t), z^{(1)}(t), L\right) =$$
$$= \left|\int_0^{t_1} B^T(t)\, z^{(1)}(t)\, \psi^T(t)\, dt\right| \gamma_1(t) + \beta\left(\psi(t), z^{(1)}(t)\right)$$

і максимум досягається при $L = \hat{L}$, що й потрібно було довести. □

5. Регуляризація критерію

Нижче розглядається регуляризація критерію $\Phi(L(t))$. Назвемо функцію $\hat{u}_\alpha(t) = \hat{L}_\alpha(t)\, \phi(t)$, де матриця $\hat{L}_\alpha(t)$ знаходиться із умови

$$\hat{L}_\alpha(t) \in Arg \min_{L \in D} \Phi_\alpha(L(t)),$$

а функціонал $\Phi_\alpha(L(t))$ визначається за формулою $\Phi_\alpha(L(t)) = \Phi_1(L(t)) + \alpha F(L(t))$, $\alpha > 0$, $F(L(t)) > 0$, регуляризованим керуванням із функціоналом регуляризації $F(L(t))$.

Твердження 8. Нехай $F(L(t)) = \int_0^{t_1} SpL(t)\, L^T(t)\, dt$. Тоді регуляризоване керування має вигляд

$$\hat{L}(t) = -B^T(t)\, z^{(1)}(t)\, \psi^T(t)/\alpha. \tag{5}$$

Доведення. Будуємо функцію Гамільтона-Понтрягіна

$$H\left(\psi(t), z^{(1)}(t), L(t)\right) = -\left\langle B^T(t)\, z^{(1)}(t)\, \psi^T(t), L(t)\right\rangle +$$
$$+ (L(t), L(t))(\alpha/2) + \beta_1\left(\psi(t), z^{(1)}(t)\right).$$

Отримуємо

$$H\left(\psi(t), z^{(1)}(t), \hat{L}(t)\right) = \max_{L \in D} H\left(\psi(t), z^{(1)}(t), L(t)\right),$$

де $\hat{L}(t) = -B^T(t)\, z^{(1)}(t)\, \psi^T(t)/\alpha$, що й потрібно було показати. □

Зауваження. Із загальної теорії регуляризації [9] випливає, що

$$\lim_{\alpha \to 0} \Phi_\alpha\left(\hat{L}_\alpha(t)\right) = \inf_{L \in D} \Phi_1(L(t)).$$

Зрозуміло, що в загальному випадку для знаходження $\hat{L}_{\alpha}(t)$ потрібно розв'язувати крайову задачу для знаходження $z^{(1)}(t)$ та $\psi(t)$ із відповідних систем нелінійних диференціальних рівнянь при $L(t)=\hat{L}(t)$. Наведемо нижче функціонал регуляризації $F(L(t))$ спеціального типу, для якого задача знаходження $\hat{L}_{\alpha}(t)$ значно спрощується. Покладемо

$$F(L(t))=\int_0^{t_1} SpL(t)\,P(t)\,L^T(t)\,dt,$$

де симетрична матриця $P(t)$ є розв'язком лінійного рівняння

$$\frac{dP(t)}{dt}=(A(t)+B(t)\,L(t))\,P(t)+P(t)\,(A(t)+B(t)\,L(t))^T+Q_1^{(1)},\qquad P(0)=Q_0^{(1)}. \tag{6}$$

Твердження 9. Має місце рівність

$$\min_{L\in D}\Phi_{\alpha}(L(t))=\Phi_{\alpha}\left(\hat{L}_{\alpha}(t)\right),$$

де $\hat{L}_{\alpha}(t)=-B^T(t)\,S_{\alpha}(t)$, а функція $S_{\alpha}(t)$ є розв'язком рівняння Ріккаті

$$-\frac{dS_{\alpha}(t)}{dt}=A^T(t)\,S_{\alpha}(t)+S_{\alpha}(t)\,A(t)-S_{\alpha}(t)\,B(t)\,B^T(t)\,S_{\alpha}(t),\qquad S_{\alpha}(t_1)=R_0,\ R_0=\sum_{k,j=1}^{s}\lambda_k\lambda_j e^k e^{jT}. \tag{7}$$

При цьому

$$\Phi_1\left(\hat{L}_{\alpha}(t)\right)=Sp\hat{P}(t_1)\,R_0\le SpS_{\alpha}(0)\,Q_0^{(1)}+\int_0^{t_1} SpS_{\alpha}(t)\,Q_1^{(1)}dt,$$

де $\hat{P}(t)$ — розв'язок рівняння (6) при $L(t)=\hat{L}_{\alpha}(t)$.

Доведення. Доведення цього твердження проводиться аналогічно тому, як це зроблено в [8]. □

Наслідок. Нехай $\Phi(t,\tau)$ матриця, що є розв'язком рівняння

$$\frac{d\Phi(t,\tau)}{dt}=A(t)\,\Phi(t,\tau),\ \Phi(\tau,\tau)=E.$$

Тоді має місце рівність

$$S_1(\beta,t)=\Phi(t,t_1)\,\tilde{R}_0\Phi^T(t,t_1)+\int_t^{t_1}\Phi(t,\tau)\,B(\tau)\,B^T(\tau)\,\Phi^T(t,\tau)\,d\tau,$$

де $S_1(\beta,t)=S^{-1}(\beta,t)$ і $S(\beta,t)$ є розв'язком рівняння (7) при $R_0=\tilde{R}_0$, $\tilde{R}_0=R_0+\beta E$, $\beta>0$.

Доведення. Оскільки $R_0 + \beta E$ — додатно визначена матриця, то матриця $S(\beta, t)$ також буде додатно визначена. Покладемо $S_1(\beta, t) = S^{-1}(\beta, t)$. Оскільки

$$\frac{dS_1(\beta, t)}{dt} = -S_1(\beta, t)\frac{dS(\beta, t)}{dt}S_1(\beta, t),$$

то рівняння (7) запишеться у вигляді

$$\frac{dS_1(t)}{dt} = A(t)S_1(t) + S_1(t)A^T(t) - B(t)B^T(t)/\alpha, S_1(t_1) = (R_0 + \beta E)^{-1}.$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$S_1(\beta, t) = \Phi(t, t_1)(R_0 + \beta E)^{-1}\Phi^T(t, t_1) +$$
$$+\frac{1}{\alpha}\int_t^{t_1}\Phi(t, \tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t, \tau)d\tau,$$

що й потрібно було показати. □

Наслідок. Має місце рівність

$$S(\beta, t) = (\Phi(t, t_1)(R_0 + \beta E)^{-1}\Phi^T(t, t_1) +$$
$$+(1/\alpha)\int_t^{t_1}\Phi(t, \tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t, \tau)d\tau)^{-1}$$

при $\beta > 0$, причому

$$S(\beta, t) \le \Phi_1^T(t, t_1)(R_0 + \beta E)^{-1}\Phi_1(t, t_1),$$

де $\Phi_1(t, t_1) = \Phi^{-1}(t, t_1) = \Phi(t_1, t)$.

Доведення. Оскільки $\alpha > 0$, а матриця

$$\int_t^{t_1}\Phi(t, \tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t, \tau)dt \ge 0,$$

то виконуються нерівності

$$S_1(\beta, t) \ge \Phi(t, t_1)(R_0 + \beta E)^{-1}\Phi^T(t, t_1) > 0.$$

Наслідок доведено. □

Твердження 10. Нехай $\beta \in [0, \beta_1]$. Тоді має місце співвідношення

$$S(\beta, t) = S(0, t) + \beta S_2(\beta_0, t),$$

де $0 < \beta_0 \le \beta_1$, а функція $S_2(\beta_0, t)$ має вигляд

$$S_2(\beta_0, t) = \frac{dS(\beta, t)}{dt}\,|_{\,\beta=\beta_0} = S_2(t)$$

та є розв'язком лінійного рівняння

$$-\frac{dS_2(t)}{dt} = A_1^T(t)S_2(t) + S_2(t)A_1(t) \qquad (8)$$

при $S_2(t_1) = R_0 + \beta_0 E$, $A_1(t) = A(t) - (1/\alpha)B(t)B^T(t)S(\beta_0, t)$.

Доведення. Доведення цього твердження випливає із існування похідної $S_2(\beta_0, t)$, яка задовольняє рівняння (8) та розкладу функції $S(\beta, t)$ в ряд Тейлора в околі нуля. □

Література

1. Михайлов А. П., Маревцева Н. А. Модели информационной борьбы // Математическое моделирование. 2011. — Т. 23, №10. — С. 19–32.
2. Наконечний О. Г., Зінько П. М. Оптимальне керування в динамічних задачах інформаційного протиборства із невизначеностями // Проблеми прийняття рішень в умовах невизначеності: 25 міжн. конф., 11–15 травня 2015: тези доп. — Східниця. — С. 112–114.
3. Nakonechnyi O., Zinko P. Best-mean estimates in models of information confrontation // Problems of decision making under uncertainties: 24 Intern. Conf., 1–5 sept. 2014. — Cesky Rudolec. — P. 114–115.
4. Губанов Д. А., Калашников А. О., Новиков Д. А. Теоретико-игровые модели информационного противоборства в социальных сетях // Управление большими системами. — 2010. — №31. — С. 192–204.
5. Наконечный А. Г., Марценюк В. П. Задачи управления для дифференциальных уравнений динамики Гомперца // Кибернетика и системный анализ. 2004. — №2. — С. 123–133.
6. Marzeniuk V. P., Nakonechniy A. G. System analysis methods of medical and biological processes — Ternopil: Ukrmedknyha, 2003. — 241 p.
7. Марценюк В. П., Наконечний О. Г. Моделі та методи популяційної динаміки в програмному середовищі підтримки системних медичних досліджень — Тернопіль: Укрмедкнига, 2009. — 407 с.
8. Бублик Б. Н., Данилов В. Я., Наконечный А. Г. Некоторые задачи наблюдения и управления в линейных системах — К.: УМК ВО, 1988. — 191 с.
9. Васильев Ф. П., Осипов Ю. С., Потапов М. М. Основы метода динамической регуляризации — М.: МГУ, 1998. — 236 с.

Надійшла 01.10.2015