Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2016, №1(121) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.6:531:537
MSC 68.65C05:70.70E50

STUDY OF THE ORBITAL MOTION STABILITY OF THE MAGNETIZED ASYMMETRIC RIGID BODY IN THE EXTERNAL MAGNETIC FIELD

S. I. Lyashko[1], S. I. Zub[2], S. S. Zub[3], V. S. Lyashko[4] and A. Yu. Cherniavskyi[5]

[1]Faculty of Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, E-mail: silsil1@yandex.ua.
[2]National Science Center Institute of Metrology, Kharkiv, Ukraine, E-mail: sergii.zub@gmail.com.
[3]H.S. Skovoroda Kharkiv National Pedagogical University, Kharkiv, Ukraine, E-mail: stah@hnpu.edu.ua.
[4]Glushkov Institute of Cybernetics of NASU, Kyiv, Ukraine, E-mail: v.s.lyashko@gmail.com.
[5]National Aerospace University «KhAI», Kharkiv, Ukraine, E-mail: andreech@gmail.com.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ НАМАГНИЧЕННОГО АСИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

С. И. Ляшко[1], С. И. Зуб[2], С. С. Зуб[3], В. С. Ляшко[4] и А. Ю. Чернявский[5]

[1]Факультет кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина, E-mail: silsil1@yandex.ua.
[2]Национальный научный центр «Институт метрологии», Харьков, Украина, E-mail: sergii.zub@gmail.com.
[3]Харьковский национальный педагогический университет имени Г. С. Сковороды, Харьков, Украина, E-mail: stah@hnpu.edu.ua.
[4]Институт кибернетики имени В. М. Глушкова НАН Украини, Киев, Украина, E-mail: v.s.lyashko@gmail.com.
[5]Национальный аэрокосмический университет имени Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Харьков, Украина, E-mail: andreech@gmail.com.

Abstract. Numerical simulation even in the case of a relatively simple dynamic systems with magnetic interaction leads to requirements attract significant computing resources. Using of Grid technology and cloud resources because of their scalability solves this problem, and also opens up the possibilities for study of more complex dynamic systems. The combination of Monte Carlo method with Grid and cloud computing for parallel computing allowed to carry out an extensive study of stability of quasi-periodic motions of the magnetic asymmetric rigid body in an external magnetic field. The use of a quaternion as a variables in Hamiltonian dynamics of asymmetric rigid body substantially increases the efficiency of the numerical simulation.

Keywords: asymmetric rigid body, dynamic system, quaternion, Monte Carlo method, Grid, cloud computing.

Резюме. Численное моделирование даже сравнительно простых динамических систем с магнитным взаимодействием приводит к необходимости привлечения значительных вычислительных ресурсов. Использование Грид-технологии и облачных ресурсов в силу их масштабируемости не только позволяет решить эту проблему, но и открывает перспективы исследования более сложных динамических систем. Сочетание метода Монте-Карло, Грид и облачных технологий для параллельных вычислений позволило провести обширное исследование устойчивости квазипериодических движений намагниченного асимметричного твердого тела во внешнем магнитном поле. Использование кватернионных переменных для описания гамильтоновой динамики асимметричного твердого тела существенно повышает эффективность численного моделирования.
Ключевые слова: асимметричное тело, динамическая система, кватернион, метод Монте-Карло, Грид, облачные вычисления.

Введение

Исследование устойчивости динамических равновесий в системах магнитных тел сталкивается с серьезными трудностями как математического, так и экспериментального характера.

В теоретическом плане, как оказалось, наиболее эффективным инструментом являются теоретико-групповые методы гамильтоновой механики [1, 2].

Очевидно, что наилучшим способом доказательства возможности устойчивости динамических равновесий в системах магнитно взаимодействующих тел является аналитическое доказательство в рамках строгой математической модели такого взаимодействия.

Для некоторых сравнительно простых систем удалось найти прозрачное аналитическое доказательство устойчивости на основе теорем гамильтоновой динамики систем с симметриями [3, 4].

Отметим, что данные теоремы позволяют исследовать устойчивость не любых движений, а так называемых относительных равновесий [5, 6, 7].

Таким образом, для аналитического доказательства возможности устойчивых динамических равновесий в магнитных системах требовалось найти подходящее относительное равновесие и проверить его устойчивость.

Хотя аналитический подход и является математически строгим и предпочтительным, но, во-первых, он далеко не всегда применим, а, во-вторых, имеющиеся теоремы не дают ответа на некоторые физически важные вопросы.

Прежде всего, не дается оценка запаса устойчивости, т. е. максимальной величины отклонения от относительного равновесия, которая еще не ведет к потере устойчивости.

Что касается устойчивости по параметрам системы, то этот вопрос может вывести за пределы применимости данных теорем, в частности, изменение некоторых параметров может привести к потере симметрии системы. Например, нарушение условия $I_1 = I_2 = I_\perp$, где I_1, I_2, I_3 — главные моменты инерции тела, приводит к несоответствию с моделью симметричного волчка.

Имея уравнения движения намагниченного твердого тела в магнитном поле, мы имеем возможность численного решения системы ОДУ для любых начальных условий и параметров системы. При этом применение численных методов не связано непосредственно с требованиями симметрии.

С философской точки зрения никакой эксперимент — ни численный, ни реальный — не может доказать устойчивость. Он может только дать определенные доводы в пользу устойчивости.

Совершенно очевидно, что весомость этих доводов зависит от объема данных, полученных в результате эксперимента (прежде всего, мы будем говорить о численном эксперименте).

Как показал опыт моделирования магнитных систем в различных математических пакетах (Maple, MatLab) на достаточно мощном многоядерном персональном компьютере, его вычислительные ресурсы существенно ограничивают возможности исследования устойчивости даже для сравнительно простых систем.

Использование как Грид-технологии, так и облачных сервисов в силу их масштабируемости не только позволяет решить эту проблему, но и открывает перспективы исследования более сложных динамических систем.

Как уже отмечалось, вариации параметров системы могут привести к потере симметрии тела. Таким образом, в отличии от работ [8, 9, 1, 10, 11, 12, 13] необходимо иметь уравнения движения для асимметричного твердого тела.

Известно, что кватернионы широко используются для описания кинематики твердого тела. Что касается динамики, то гамильтоновы уравнения динамики твердого тела в кватернионных переменных в системе, связанной с телом, впервые даны в работах [14, 15] на основе пуассоновой структуры.

Различные теоретико-групповые аспекты гамильтоновой динамики в кватернионных переменных на основе канонической симплектической структуры группы единичных кватернионов даны в работах [16, 17, 18, 19]. Там же исследованы связи между различными представлениями, а именно: гамильтоновы уравнения в системе, связанной с телом, в инерциальной системе, а также в смешанном представлении.

В данной работе используется смешанное представление [18, 20, 2, 19], где описание поступательных степеней свободы дано в инерциальной системе отсчета, а вращательных — в системе отсчета, связанной с телом.

Использование кватернионных переменных для описания гамильтоновой динамики асимметричного твердого тела существенно повышает эффективность вычислений [21] и устойчивость решения системы ОДУ [15].

Основной целью нашей работы является численное исследование возможности устойчивого движения в системе Орбитрон [22], однако с отклонениями не только по начальным условиям, но и по параметрам системы, что влечет за собой потерю симметрии тела. Отклонение от симметрии в реальном эксперименте, очевидно, является неизбежным.

Применение Грид-технологий и облачных сервисов к этой задаче позволяет проводить это исследование для большого числа случайно выбранных начальных условий и параметров системы и большого числа соответствующих этим начальным условиям и параметрам квазиорбит.

1. Скобки Пуассона и уравнения движения

В работах [23, 24] представлены основные теоретические результаты по применению кватернионов в гамильтоновой динамике твердого тела.

Соответствующая пуассонова структура в кватернионных переменных (используем «смешанное» представление [20]) имеет вид

$$\begin{cases} \{x_i, x_k\} = 0, \quad \{x_i, q_\mu\} = 0, \quad \{x_i, \mathrm{M}_j\} = 0; \\ \{p_i, q_\mu\} = 0, \quad \{p_i, \mathrm{M}_j\} = 0; \\ \{x_i, p_k\} = \delta_{ik}, \quad i, k = 0, 1, 2; \\ \{q_\mu, q_\nu\} = 0, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3; \\ \{\mathrm{M}_i, q_0\} = q_i; \\ \{\mathrm{M}_i, q_j\} = -q_0 \delta_{ij} - \varepsilon_{ijl} q_l; \\ \{\mathrm{M}_i, \mathrm{M}_j\} = -2\varepsilon_{ijl} \mathrm{M}_l. \end{cases} \tag{1}$$

Для гамильтониана достаточно общего вида

$$H\left((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}), (q, \mathbf{M})\right) = \frac{1}{2m}\boldsymbol{p}^2 + T_{spin}\left((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}), (q, \mathbf{M})\right) + V(\boldsymbol{x}, q), \tag{2}$$

где

$$T_{spin}\left((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}), (q, \mathbf{M})\right) = \frac{1}{8}\mathbf{M}\mathbb{I}^{-1}\mathbf{M} = \frac{1}{8}\left(\frac{\mathrm{M}_1^2}{I_1} + \frac{\mathrm{M}_2^2}{I_2} + \frac{\mathrm{M}_3^2}{I_3}\right) \tag{3}$$

($\mathbb{I}$ — диагональная матрица тензора инерции в системе, связанной с телом, с диагональными элементами I_1, I_2, I_3), были получены уравнения движения твердого тела [23]

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}; \\ \dot{\boldsymbol{p}} = -\partial_{\boldsymbol{x}} V; \\ \dot{q} = \frac{1}{2} q \boldsymbol{\Omega} \longrightarrow q^{-1}\dot{q} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}; \\ \dot{\mathbf{M}} = -\Im\left(\boldsymbol{\Omega}\mathbf{M} + q^{-1}\nabla^{(q)} V\right), \end{cases} \tag{4}$$

где $\Im(\cdot)$ — мнимая часть кватерниона; x_i — координаты центра масс твердого тела, $q = (q_0, \boldsymbol{q})$ — единичный кватернион, описывающий поворот от фиксированной (инерциальной) системы отсчета к системе отсчета, связанной с телом, p_i — компоненты импульса тела, M_i — компоненты момента импульса в системе отсчета, связанной с телом. Здесь поступательные степени свободы даны в инерциальной системе отсчета, а вращательные — в система отсчета, связанной с телом, т. е. в «смешанном» представлении.

2. Математическая модель

Наша модель состоит из следующих элементов.

1. Магнитное поле Орбитрона.

На оси z в точках $\mp h$ расположим два разноименных магнитных полюса $\pm\kappa$. Таким образом, магнитное поле Орбитрона $\boldsymbol{B}$ имеет вид

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \sum_{\varepsilon=\pm 1} \boldsymbol{B}_\varepsilon(\boldsymbol{r}), \qquad \boldsymbol{B}_\varepsilon = -\frac{\mu_0}{4\pi}\varepsilon\kappa\frac{\boldsymbol{r}-\varepsilon h\boldsymbol{e}_z}{|\boldsymbol{r}-\varepsilon h\boldsymbol{e}_z|^3}. \tag{5}$$

По построению поле $\boldsymbol{B}$ является аксиально симметричным (относительно оси z).

2. Магнитный диполь будем описывать как малое намагниченное твердое тело с массой m и главными моментами инерции I_1, I_2, I_3. Магнитный момент тела $\vec{\mu}$ является вектором, постоянным в системе, связанной с телом.

Замечание. Направление магнитного момента тела, вообще говоря, не совпадает ни с одним из направлений главных осей инерции в отличие от симметричного волчка, где мы считали, что магнитный момент параллелен вектору $\vec{E}_3$.

3. Зная гамильтониан системы (2), получим из (4) гамильтоновы уравнения движения магнитного волчка-диполя во внешнем магнитном поле.

Для этого запишем потенциальную энергию системы и ее производные по пространственным и кватернионным переменным в явном виде.

Потенциальная энергия диполя в магнитном поле есть

$$V(\vec{x}, q) = -\langle\vec{\mu}, \vec{B}\rangle = -|\vec{\mu}|\langle\vec{\nu}, \vec{B}\rangle. \tag{6}$$

$\vec{E}_k = Q_{ik}\vec{e}_i$ — матрица преобразования от переменных в системе тела к переменным инерциальной системы ($\vec{e}_i$ — орты инерциальной системы, $\vec{E}_k$ — направляющие орты главных осей инерции тела), где матрица Q_{ik} имеет в кватернионных переменных вид

$$Q_{ik} = (2q_0^2 - 1)\delta_{ik} + 2q_iq_k - 2q_0q_j\varepsilon_{jik}. \tag{7}$$

Связь между компонентами N_k направляющего орта магнитного момента в системе тела и в инерциальной системе ν_i имеет вид

$$\nu_i = Q_{ik}\mathrm{N}_k. \tag{8}$$

Тогда

$$\langle\vec{\nu}, \vec{B}\rangle = \nu_iB^i = B^iQ_{ik}\mathrm{N}_k = \tag{9}$$
$$= (2q_0^2 - 1)(\mathrm{N}_iB^i) + 2(\mathrm{N}^kq_k)(q_iB^i) + 2q_0q_j\varepsilon_{jki}\mathrm{N}^kB^i.$$

Выражению (9) можно придать инвариантный вид.

Предположим, что N^k и B^i — компоненты чистых кватернионов (хотя по геометрическому смыслу — это компоненты векторов в *разных* системах отсчета).

Используя кватернионы, выражение (8) можно записать в виде

$$\boldsymbol{\nu} = q\mathbf{N}q^{-1}. \tag{10}$$

Соответственно

$$\langle \vec{\nu}, \vec{B} \rangle = \langle \boldsymbol{B}, q\mathbf{N}q^{-1} \rangle = \langle \boldsymbol{B}q, q\mathbf{N} \rangle. \tag{11}$$

Тогда полный дифференциал по q имеет вид

$$d^{(q)}\langle \vec{\nu}, \vec{B} \rangle = d^{(q)}\langle \boldsymbol{B}q, q\mathbf{N} \rangle = \langle \boldsymbol{B}dq, q\mathbf{N} \rangle + \langle \boldsymbol{B}q, dq\mathbf{N} \rangle, \tag{12}$$

т. е.

$$d^{(q)}\langle \vec{\nu}, \vec{B} \rangle = \langle \boldsymbol{B}e_\mu dq^\mu, q\mathbf{N} \rangle + \langle \boldsymbol{B}q, e_\mu dq^\mu \mathbf{N} \rangle. \tag{13}$$

Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial q^\mu}\langle \vec{\nu}, \vec{B} \rangle = \langle \boldsymbol{B}e_\mu, q\mathbf{N} \rangle + \langle \boldsymbol{B}q, e_\mu \mathbf{N} \rangle. \tag{14}$$

Замечание. Для скалярного произведения кватернионов справедливы следующие представления

$$\langle a, b \rangle = \frac{1}{2}(ab^\dagger + ba^\dagger) = \langle a^\dagger, b^\dagger \rangle = \frac{1}{2}(a^\dagger b + b^\dagger a). \tag{15}$$

Отсюда следуют важные свойства скалярного произведения

$$\langle qa, b \rangle = \langle a, q^\dagger b \rangle; \quad \langle a, bq \rangle = \langle aq^\dagger, b \rangle, \tag{16}$$

где q, a, b — произвольные кватернионы.

Тогда имеем ($\boldsymbol{B}^\dagger = -\boldsymbol{B}$ и $\mathbf{N}^\dagger = -\mathbf{N}$)

$$\begin{aligned} \nabla^{(q)}\langle \vec{\nu}, \vec{B} \rangle &= e_\mu \langle \boldsymbol{B}e_\mu, q\mathbf{N} \rangle + e_\mu \langle \boldsymbol{B}q, e_\mu \mathbf{N} \rangle = \\ &= -e_\mu \langle e_\mu, \boldsymbol{B}q\mathbf{N} \rangle - e_\mu \langle \boldsymbol{B}q\mathbf{N}, \boldsymbol{e_\mu} \rangle = \\ &= -2e_\mu \langle e_\mu, \boldsymbol{B}q\mathbf{N} \rangle = -2\boldsymbol{B}q\mathbf{N} \end{aligned} \tag{17}$$

и

$$q^{-1}\nabla^{(q)}\langle \vec{\nu}, \vec{B} \rangle = -2(q^{-1}\boldsymbol{B}q)\mathbf{N}. \tag{18}$$

Аналогично (11), дифференцируя по $\vec{x}$, получаем

$$\dot{p}_i = -\partial_{\boldsymbol{x}} V = |\vec{\mu}| \langle q^{-1}\mathbf{N}q, \partial_i \boldsymbol{B} \rangle. \tag{19}$$

Подставляя (18) и (19) в (4), получаем уравнения движения для асимметричного волчка-диполя

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}; \\ \dot{p}_i = |\vec{\mu}| \langle q^{-1}\mathbf{N}q, \partial_i \boldsymbol{B} \rangle; \\ \dot{q} = q\frac{\boldsymbol{\Omega}}{2}, \quad \Omega_i = \frac{1}{2}(I^{-1})_{ik}\mathrm{M}_k; \\ \dot{\mathbf{M}} = -\Im\left(\boldsymbol{\Omega}\mathbf{M} + 2|\vec{\mu}|(q^{-1}\boldsymbol{B}q)\mathbf{N}\right), \end{cases} \tag{20}$$

где x_i — координаты центра масс твердого тела, $q = (q_0, \boldsymbol{q})$ — единичный кватернион, т. е.

$$q_0^2 + \boldsymbol{q}^2 = 1, \tag{21}$$

описывающий поворот от фиксированной (инерциальной) системы отсчета к системе отсчета, связанной с телом, p_i — компоненты импульса тела, M_i — компоненты собственного момента импульса в системе отсчета, связанной с телом, N — направляющий орт магнитного момента $\vec{\mu}$ в системе отсчета, связанной с телом, $\Im(q_0, \boldsymbol{q}) = \boldsymbol{q}$ — мнимая часть кватерниона.

Причем величины $\mathrm{N}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{M}$ — чистые кватернионы, а q — единичный кватернион.

Полученные гамильтоновы уравнения движения (20) магнитного диполя во внешнем магнитном поле представляют собой чисто алгебраическую форму записи уравнений вида ((9.2)–(9.5), [18]).

3. Методика численного эксперимента

В работе [9] для модели Орбитрона были найдены устойчивые орбиты, соответствующие реалистическим физическим параметрам системы. В этой работе магнитный диполь представляет собой твердое тело — симметричный волчок ($I_1 = I_2 = I_\perp$) — с магнитным моментом, направленным по оси волчка. Орбита магнитного диполя представляет собой относительное равновесие, т. е., такую траекторию гамильтоновой системы, которая одновременно является орбитой однопараметрической подгруппы группы инвариантности исследуемой системы [5, 6, 7].

При численном моделировании по уравнениям (20) будем рассматривать указанную выше систему с соответствующими физическими параметрами и начальными условиями как опорную, а затем будем случайным образом варьировать как начальные условия, так и параметры системы в заданных пределах (обычно $\sim 1\%$). При этом тело, очевидно, утрачивает свойства симметричного волчка. Таким образом, для заполнения заданной окрестности параметров и начальных условий системы используется метод Монте-Карло [22].

Отметим, что для модели Орбитрона существует, как минимум, одна замкнутая траектория, собственно, относительное равновесие. При вариациях начальных условий и параметров системы говорить можно только о квазиорбитальных движениях. При этом квазиорбитой будем называть отрезок траектории между двумя последовательными пересечениями телом плоскости xz.

В связи с резким изменением магнитной силы потеря равновесия имеет ярко выраженный характер — диполь либо быстро прилипает к полюсам магнита, либо быстро уходит из системы.

Это позволяет легко сформулировать условия потери равновесия для обработчика событий.

4. Геометрический интегратор

В статье [25] отмечается важность применения геометрических интеграторов при исследовании устойчивости систем с сохраняющейся энергией на больших временных интервалах. Не менее важно, что в нашем случае сохраняется еще функция Казимира (21). Нарушение этого условия означает выход за рамки рассмотрения твердого тела.

В отличии от [26], где реализуется матричный способ описания твердого тела, мы используем кватернионы, что с одной стороны существенно упрощает контроль ортогональности подвижного базиса асимметричного твердого тела, а с другой — требует нахождения аналитического решения 3-го уравнения системы (20).

Подобно [26] решение системы ОДУ (20) на одном шаге интегрирования разделяется на последовательное интегрирование уравнений движения с гамильтонианами, совпадающими с потенциальной и кинетической энергией соответственно. Причем кинетическая часть системы уравнений интегрируется полностью аналитически, а для интегрирования части, связанной с потенциальной энергией, применяется численный метод интегрирования 2-го порядка [25].

Аналитическое решение уравнения

$$\dot{q} = q\frac{\mathbf{\Omega}}{2},$$

где $\mathbf{\Omega} = const$ — чистый кватернион, имеет вид

$$q(t) = q(t_0)\exp\left(\frac{\mathbf{\Omega}(t-t_0)}{2}\right). \tag{22}$$

Замечание. Функция exp полностью определяется следующими свойствами

$$\begin{cases} \exp(\frac{\mathbf{\Omega}}{2}t_1)\exp(\frac{\mathbf{\Omega}}{2}t_2) = \exp(\frac{\mathbf{\Omega}}{2}(t_1+t_2)); \\ \exp(0) = 1. \end{cases} \tag{23}$$

Исходя из (23) нетрудно проверить справедливость следующего соотношения

$$\exp\left(\frac{\mathbf{\Omega}(t-t_0)}{2}\right) = \cos\left(\frac{|\mathbf{\Omega}|(t-t_0)}{2}\right) + \sin\left(\frac{|\mathbf{\Omega}|(t-t_0)}{2}\right)\frac{\mathbf{\Omega}}{|\mathbf{\Omega}|}. \tag{24}$$

Соответственно, решение уравнения

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{m}\boldsymbol{p} \tag{25}$$

имеет вид

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(t_0) + \frac{\boldsymbol{p}(t_0)}{m}(t-t_0). \tag{26}$$

Таким образом, (22) и (26) дают выражения для нашего геометрического интегратора в кватернионном представлении.

5. Оценка физических параметров

Как уже было выше сказано, в качестве отправной точки, т. е. набора физических параметров и начальных условий, возьмем относительное равновесие в системе Орбитрон [9]. Для этой системы были подобраны реалистические физические параметры, основанные на свойствах современных магнитных материалов. Приведем эти параметры.

Для магнитов, изготовленных из $NdFeB$, плотность — $\rho = 7,4\cdot 10^3$(кг/м^3) и остаточная индукция — $B_r = 0,25$(Тл). Тогда нетрудно получить магнитный «заряд» полюса $\kappa = 17,6$(А · м). Расстояние между полюсами — $L = 2h = 0,1$(м).

Подвижный магнит выберем в форме цилиндра (диска) с диаметром $d = 0,014$(м) и высотой $l = 0,006$(м). Тогда магнитный момент диска $\mu = 0,18(\text{А} \cdot \text{м}^2)$.

В результате для орбиты радиусом $r_0 = 1,5h = 0,075$(м) получим угловую скорость орбитального движения $\omega = 1,54$(рад/с), при этом минимальная угловая скорость собственного вращения диска в этом случае составит $\Omega = 72,8$(рад/с). Такие значения угловых скоростей представляются вполне разумными.

Замечание. Начальные условия для относительного равновесия Орбитрона ($I_1 = I_2 = I_\perp$, $\mathrm{N} = (0,0,1)$ — в теле) следующие:

1. Поступательные переменные — те же самые значения, что и в Орбитроне;

2. Вращательные переменные $q = e_0 = (1,0,0,0)$, $M = 2\pi$ (π — собственный момент тела в инерциальной системе);

3. Вариации начальных условий проводятся аналогично задаче об Орбитроне. Вариации параметров тела — это вариации моментов инерции и вариации вектора q, N.

Замечание. Кватернионы q, N должны быть нормированы после проведения вариации.

6. Методы и инструменты программирования

При решении уравнений движения нашей динамической системы использовалась 2-я версия odeint, входящая в состав известной C++ библиотеки boost, многие разработчики которой одновременно являются членами комитета по стандартизации C++. Элементы этой библиотеки постепенно интегрируются в промышленный стандарт программирования, каковым является C++.

Библиотека основана на методах «метапрограммирования»[1] частично реализованных в новом стандарте C++0x.

Итак, подключаем odeint включением в нашу программу

```
#include <boost/numeric/odeint.hpp>.
```

В целом библиотека живет в пространстве имен

```
using namespace boost::numeric::odeint;.
```

Определение уравнений движения для Орбитрона возможно либо как function, либо functor. При этом, как уже отмечалось, для хранения фазовой траектории мы используем стандартный тип vector. Мы интегрируем систему, используя функцию integrate_const.

Собственно, это все, что надо для вычисления наших уравнений движения. Для интегрирования ОДУ библиотека располагает большим набором

[1] вид программирования, основанный на создании программ, которые могут порождать другие программы (в том числе и на стадии компиляции), а также могут менять себя в процессе выполнения.

решающих программ (solver). Среди них есть как одношаговые, так и многошаговые методы. Имеются также специальные симплектические решатели для сепарабельных гамильтоновых систем, однако наша система не удовлетворяет всем требованиям сепарабельности.

На данный момент в odeint не реализован стандартный обработчик событий (наподобие MatLab), хотя это и планируется. Поэтому, мы реализовали собственную обработку событий, которая вызывается функцией интегрирования, встроив ее в метод operator стандартной структуры observer из библиотеки odeint.

Программа обрабатывает следующие события:

1. «Падение» тела на один из полюсов.
2. «Выход» тела за пределы системы.
3. Завершение квазиорбиты.

Первые два события приводят к остановке метода интегрирования с последующей диагностикой и предоставлением траектории для дальнейшего анализа. Третье событие отмечается в файле вывода как завершение очередной квазиорбиты.

Любое из первых двух событий завершается сообщением о неустойчивости системы в заданном диапазоне вариаций начальных условий и параметров системы.

7. Грид и облачные технологии. Параллельные Монте-Карло вычисления

Как правило, вычислительные ресурсы создаются для решения важных научно-технических задач. Во времени и в пространстве использование этих ресурсов может быть крайне неравномерным, т. е. могут возникать незадействованные мощности. Одним из важнейших мотивом создания Грид была оптимизация использования вычислительных ресурсов университетов и исследовательских институтов (участников международных коллабораций).

Таким образом, реализация Грид создала предпосылки для привлечения этих ресурсов к решению широкого круга научно-технических задач. Само слово Грид подчеркивает аналогию с электрической сетью, к которой потребитель может подключиться исключительно простым способом, практически в любом месте и в любое время.

Не вдаваясь в исторические аспекты создания Грид в Украине, этапы развития которого отражены в работе [27], можно сказать, что он родился благодаря участию ряда отечественных академических институтов в деятельности международных физических коллабораций, базирующихся в ЦЕРН (г. Женева, Швейцария).

Авторы статьи принимали непосредственное участие в создании вычислительных ресурсов коллаборации Compact Muon Solenoid (CMS) (см. в [27]).

Как было отмечено выше, доступ к ресурсам Грид предоставляют виртуальные организации (ВО). Т.е., чтобы запускать свои задачи в Грид, необходимо быть членом одной из зарегистрированных ВО. На тот момент существовало всего несколько десятков ВО, а основные ресурсы мирового Грид входили в Worldwide LHC Computing Grid (WLCG).

Основной задачей кластера ННЦ ХФТИ на то время было участие в подготовке к эксперименту на Large Hadron Collider (LHC). Однако свободные ресурсы предоставлялись исследователям других научных проектов в рамках программы создания Украинского академического Грид.

Впервые задача о магнитном взаимодействии «гантелей» была запущена на CMS кластере ХФТИ (WLCG Kharkov-KIPT-LCG2 с 2005 г.) в начале 2008 г. Проведенное Монте-Карло моделирование выявило «устойчивость движения» к малым возмущениям в задаче о взаимодействии «магнитных гантелей» [8]. Результаты этого исследования были доложены на теоретической секции семинара XII Advanced Computing and Analysis Techniques in Physics Research в ноябре 2008 г. (г. Эриче, Италия), проведенного под патронатом CMS.

Впервые Украинский Грид кластер прошел официальную регистрацию в CMS SiteDB в 2008 году и получил имя T2_UA_KIPT. В 2009 г. он подтвердил свой статус T2 центра, пройдя процедуру тестирования «commissioning of T2_UA_KIPT in CMS Grid infrastructure».

На первых этапах работы над проблемой динамической устойчивости магнитных систем численный эксперимент был единственным инструментом исследования и требовал значительных вычислительных ресурсов.

В 2010 году производительность CMS кластера ННЦ ХФТИ (T2_UA_KIPT) составляла $\sim$ 1.4 kHEPspec06: 68 CPU(x86_64) и 90 TB HDD, что на порядки превосходило потребности в ресурсах для моделирования задач о динамической устойчивости двух симметричных магнитных тел.

Исследования магнитных систем на CMS кластере ХФТИ продолжались до 2010 г. включительно и результаты были представлены на VIII конференции по физике высоких энергий, ядерной физике и ускорителям (г. Харьков, Украина).

В 2012–2015 годах для этих расчетов использовались вычислительные ресурсы Грид-кластеров Института теоретической физики им. М.М. Боголюбова (UA-BITP) и Института сцинтилляционных материалов (UA-ISMA).

Эти работы продемонстрировали эффективность использования Грид-технологий и облачных ресурсов в задачах численного моделирования динамики магнитных систем.

Начиная с мая 2014г. традиционная Грид инфраструктура EGI была расширена облачными технологиями и мобильными услугами за счет использования открытых стандартов, что позволило также включать коммерческих провайдеров облачных услуг в инфраструктуру, которая ранее поддерживалась только научными учреждениями [29, 30].

С 2015 года массовое Монте-Карло моделирование динамики асимметричного твердого тела было перенесено в облако Microsoft Azure, где с использованием утилиты GNU Parallel [28] успешно эксплуатировалась программа и скрипты, разработанные для моделирования на Грид-кластерах.

8. Выводы

Грид-технологии и облачные ресурсы позволили выполнить моделирование более чем 10^6 траекторий, отличающихся случайными вариациями параметров системы и начальных условий в диапазоне относительных отклонений от отправной точки $\sim 1\%$. Ни на одной из квазиорбит потери устойчивости зафиксировано не было.

Несмотря на то, что впервые устойчивые орбитальные движения были найдены для систем с симметриями, результаты данной работы показывают, что по отношению к проблеме динамической устойчивости требования симметрии не являются критическими.

Таким образом, мы наблюдаем что по отношению к небольшим отклонениям от симметрии тела устойчивость системы сохраняется.

Література

1. Grigoryeva L. V., Ortega J-P., Zub S. S. Stability of Hamiltonian relative equilibria in symmetric magnetically confined rigid bodie // Journal of Geometric Mechanics. — 2014. — Vol. 6, №3. — P. 373–415.
2. Zub S. S., Zub S. I. Hamiltonian dynamics of a symmetric top in external fields having axial symmetry. Levitating Orbitron // Cornell University Library, 2015. — http://arxiv.orgabs1502.04674v1.
3. Ortega J-P., Ratiu T. S. Non-linear stability of singular relative periodic orbits in Hamiltonian systems with symmetry // J. Geom. Phys. — 1999. — Vol. 32, Issue 2. — P. 160–188.
4. Marsden J. E., Ratiu T. Introduction to mechanics and symmetry — New York: Springer, 1999. — 553 p.
5. Арнольд В. И. Математические методы классической механики — Москва: Наука, 1989. — 472 с.
6. Marsden J. E. Lectures on Mechanics — London: Cambridge University Press, 1992. — 254 p.
7. Patrick G. W. Relative equilibria in Hamiltonian systems: The dynamic interpretation of nonlinear stability on a reduced phase space // J. Geom. Phys. — 1992. — №9. — P. 111–119.
8. Zub S. S. Mathematical model of magnetically interacting rigid bodies // Proceedings of Science, 2008. — http://pos.sissa.it/archive/conferences/070/116/ACAT08_116.pdf.
9. Zub S. S. Stable orbital motion of magnetic dipole in the field of permanent magnet // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2014. — Vol. 275C. — P. 67–73.
10. Dullin H. R., Easton R. W. Stability of Levitrons // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1999. — Vol. 126. — P. 1–17.
11. Zub S. S. Magnetic levitation in orbitron system // Problems of atomic science and technology. — 2014. — №5. — P. 168–176.
12. Zub S. S. Stable relative equilibria in the system of superconductive and permanent magnetic dipoles // Problems of atomic science and technology. — 2015. — №3. — P. 143–147.
13. Зуб С. С. Возможность устойчивых траекторий в магнитно-дипольных конфигурациях // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2014. — №1(115) — С. 113–118.

14. Борисов А. В., Мамаев И. С. Нелинейные скобки Пуассона и изоморфизмы в динамике // Регулярная и хаотическая динамика. — 1997. — №3. — С. 72–89.
15. Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела — Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. — 384 с.
16. Зуб С. С., Зуб С. І. Канонічна пуассонова структура на T*SE(3) в кватерніонних змінних // Вісник Київського університету. Серія фіз.-мат. науки. — 2013. — №2. — С. 17–24.
17. Зуб С. С., Зуб С. І. Група одиничних кватерніонів S^3 та пов'язані з нею симплектична і пуассонова структури // Вісник Київського університету. Серія фіз.-мат. науки. — 2013. — №4. — С. 108–113.
18. Зуб С. С., Зуб С. І. Рівняння гамільтонової динаміки твердого тіла в кватерніонних змінних. Магнітний диполь в зовнішньому полі // Вісник Київського університету. Серія фіз.-мат. науки. — 2014. — №3. — С. 111–117.
19. Zub S. S., Zub S. I. Quaternions in Hamiltonian dynamics of a rigid body — Part III. Asymmetric Top in the Orbitron // Cornell University Library, 2015. — http://arxiv.org/abs/1512.01703.
20. Зуб С. С. Каноническая пуассонова структура на T*SE(3) и гамильтонова механика твердого тела. Динамика магнитного диполя во внешнем поле // Доповіді Національної академії наук України. — 2014. — №4. — С. 37–42.
21. Salamin E. Applications of quaternion to computation with rotations [Електронний ресурс] // Stanford University: Stanford, 1979. — http://theworld.com/sweetser/quaternions/ps/stanfordaiwp79-salamin.pdf.
22. Зуб С. С., Ляшко В. С., Ляшко С. І. Исследование устойчивости орбитального движения магнитно взаимодействующих тел методом численного эксперимента // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2012. — №1. — С. 122–134.
23. Zub S. S., Zub S. I. Quaternions in Hamiltonian dynamics of a rigid body — Part I // Cornell University Library, 2015. — http://arxiv.org/abs/1508.02916.
24. Zub S. S., Zub S. I. Quaternions in Hamiltonian dynamics of a rigid body — Part II. Relation of canonical Poisson and Lie-Poisson structures // Cornell University Library, 2015. — http://arxiv.org/abs/1508.04005.
25. Hairer E., Lubich C., Wanner G. Geometric numerical integration — Berlin: Springer, 2006. — 644 p.
26. Dullin H. R. Poisson integrator for symmetric rigid bodies // Regular and chaotic dynamics. — 2004. — №3. — P. 255–264.
27. Ляшко С. І., Ляшко В. С., Неєжмаков П. І., Зуб С. С., Зуб С. І. Грід-технологія для завдань метрології // Доповіді Національної академії наук України. — 2013. — №9. — С. 38–43.
28. Tange O. GNU Parallel — The Command-Line Power Tool // The USENIX Magazine, 2011. — http://www.gnu.org/s/parallel.
29. Fernandez-del-Castillo E. The EGI Federated Cloud e-Infrastructure / E. Fernandez-del-Castillo, D. Scardaci, A. Lopez Garcia // Procedia Computer Science. — 2015. — №68. — P. 196–205.
30. Згуровский М. З., Петренко А. И. Цифровая наука в программе «Горизонт 2020» // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2015. — №1. — С. 7–20.

Надійшла 26.02.2016