Журнал обчислювальної та прикладної математики

2016, №1(121)

Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.9

MSC 46N10, 46T99

ABOUT ONE CALCULATION SCHEME OF THE ALBER GENERALIZED PROJECTION

V. V. Semenov

Faculty of Cybernetics, Taras Shevchenko Kiev National University, Kiev, Ukraine, E-mail: volodya.semenov@gmail.com.

ОБ ОДНОЙ СХЕМЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ПРОЕКЦИИ АЛЬБЕРА

В. В. Семенов

Факультет кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина, E-mail: volodya.semenov@gmail.com.

Abstract. The abstract scheme for calculating the Alber generalized projection on a closed convex subset of a uniformly convex and uniformly smooth Banach space is investigated. The strong convergence theorem for hybrid method of outer approximations with generalized projection for a countable family of relatively quasi–nonexpansive operators is proved. In the analysis were not used concepts related with the weak topology (demiclosedness, Kadets–Klee property).
Keywords: Alber generalized projection, relatively quasi–nonexpansive operator, common fixed point, outer approximations method, strong convergence.

Резюме. В статье изучена абстрактная схема вычисления обобщенной проекции Альбера на замкнутое выпуклое подмножество равномерно выпуклого и равномерно гладкого банахова пространства. Доказана теорема сильной сходимости гибридного метода внешних аппроксимаций с обобщенной проекцией для счетного семейства относительно квазинерастягивающих операторов.
Ключевые слова: обобщенная проекция Альбера, относительно квазинерастягивающий оператор, общая неподвижная точка, метод внешних аппроксимаций, сильная сходимость.

1. Введение

Построение и исследование итерационных методов метрической теории неподвижных точек — интересная, имеющая много приложений и активно развивающаяся область прикладного нелинейного анализа [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]. Многие задачи исследования операций, математической экономики и математической физики могут быть записаны в форме вопроса о поиске неподвижной точки некоторых отображений и эта форма позволяет создавать и исследовать алгоритмы численного решения задач [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18].

В статье мы рассмотрим абстрактную схему вычисления обобщенной проекции Альбера [19] на замкнутое выпуклое подмножество равномерно выпуклого и равномерно гладкого банахова пространства. Используя эту схему, мы получим теорему сильной сходимости гибридного метода с обобщенной проекцией для счетного семейства относительно квазинерастягивающих операторов. Предварительное сообщение было опубликовано в [9]. Отметим, что наш анализ совсем не использует понятий, связанных со слабой топологией (демизамкнутость, свойство Кадеца-Кли). Все необходимые сведения по геометрии банаховых пространств и нелинейному анализу изложены в книгах [2, 20, 21] и статье [19].

2. Основные понятия и вспомогательные факты

В данной работе E обозначает действительное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, E^* — сопряженное к E пространство, $\langle x^*, x\rangle$ — значение функционала $x^* \in E^*$ на элементе $x \in E$. Норму в E^* также будем обозначать $\|\cdot\|$. Сильную сходимость в E будем обозначать символом $\to$. Многозначный оператор $J : E \to 2^{E^*}$, действующий следующим образом

$$Jx = \left\{x^* \in E^* : \ \langle x^*, x\rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\right\},$$

называют дуальным оператором [20]. Известно, что:

i) если пространство E гладкое, то оператор J — однозначный;
ii) если пространство E рефлексивное, то оператор J — сюръективый;
iii) если пространство E строго выпуклое, то оператор J — инъективный и строго монотонный;
iv) если пространство E равномерно гладкое, то оператор J — равномерно непрерывный на ограниченных подмножествах E.

Далее будем предполагать, что банахово пространство E — равномерно выпуклое и равномерно гладкое. Рассмотрим функционал

$$\phi(x, y) = \|x\|^2 - 2\,\langle Jy, x\rangle + \|y\|^2$$

для x, $y \in E$ (если пространство E гильбертово, то $\phi(x, y) = \|x - y\|^2$). Из определения ϕ следует

$$(\|x\| - \|y\|)^2 \le \phi(x, y) \le (\|x\| + \|y\|)^2$$

для x, $y \in E$. Кроме того, для x, y, $z \in E$ имеет место тождество

$$\phi(x, y) = \phi(x, z) - \phi(z, y) + 2\langle Jz - Jy, x - z\rangle.$$

Полезным инструментом является

Лемма 1 ([19]). *Пусть E — равномерно выпуклое и равномерно гладкое банахово пространство, (x_n), (y_n) — ограниченные последовательности* *элементов E. Тогда*

$$x_n - y_n \to 0 \;\Leftrightarrow\; Jx_n - Jy_n \to 0 \;\Leftrightarrow\; \phi(x_n, y_n) \to 0.$$

Пусть $C \subseteq E$ — замкнутое выпуклое множество, $x \in E$. Известно [19], что существует единственная точка $z \in C$, такая, что

$$\phi(z, x) = \min_{y \in C} \phi(y, x).$$

Эту точку z обозначают $\Pi_C x$, а соответствующий оператор Π_C называют обобщенной проекцией E на C (обобщенной проекцией Альбера) [19]. Заметим, что если E — гильбертово пространство, то Π_C совпадает с метрической проекцией на C.

Лемма 2 ([19]). *Пусть C — замкнутое выпуклое подмножество равномерно выпуклого и равномерно гладкого банахова пространства E, $x \in E$, $z \in C$. Тогда*

$$z = \Pi_C x \;\Leftrightarrow\; \langle Jz - Jx, y - z \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C. \tag{1}$$

Замечание 1. Неравество из (1) равносильно следующему

$$\phi(y, \Pi_C x) + \phi(\Pi_C x, x) \leq \phi(y, x) \quad \forall x \in E \; \forall y \in C.$$

3. Вычисление обобщенной проекции Альбера

Предположим, что C — замкнутое выпуклое подмножество равномерно выпуклого и равномерно гладкого банахова пространства E, $x_0 \in E$. Рассмотрим задачу вычисления обобщенной проекции Альбера $\Pi_C x_0$, т. е., единственного решения задачи минимизации

$$\phi(y, x_0) \to \min, \quad y \in C. \tag{2}$$

Замечание 2. В качестве C мы будем рассматривать множества неподвижных точек операторов $T : E \to E$ определенного вида.

Для произвольной пары элементов $x, y \in E$ определим множество

$$H(x, y) = \{z \in E : \; \phi(z, y) \leq \phi(z, x)\} = \\ = \left\{z \in E : \; 2\langle Jx - Jy, z \rangle \leq \|x\|^2 - \|y\|^2 \right\}. \tag{3}$$

Множество $H(x, y)$ является замкнутым полупространством (совпадающим с E в случае $x = y$). Рассмотрим следующий абстрактный итерационный алгоритм.

Алгоритм 1. Для точки $x_0 \in E$ строим последовательность (x_n) по схеме: берем $x_1 \in E$, полагаем $C_1 = E$, для $x_n \in E$ указываем $y_n \in E$ и выполняем операции

$$\begin{cases} C_{n+1} = C_n \cap H(x_n, y_n), \\ x_{n+1} = \Pi_{C_{n+1}} x_0. \end{cases}$$

Замечание 3. Алгоритм 1 — абстрактная форма так называемых «гибридных методов» аппроксимации неподвижных точек [4, 5, 6, 7, 22, 23, 24, 25].

Прежде всего заметим, что в случае возможности построения последовательности (x_n) имеем цепочку вложений

$$E = C_1 \supseteq C_2 \supseteq ... \supseteq C_n \supseteq C_{n+1} \supseteq ... .$$

Откуда следует неравенство

$$\phi(x_n, x_0) = \min_{y \in C_n} \phi(y, x_0) \le \min_{y \in C_{n+1}} \phi(y, x_0) = \phi(x_{n+1}, x_0).$$

Следовательно, существует $\lim_{n\to\infty} \phi(x_n, x_0) = L \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$. Если последовательность (x_n) имеет ограниченную подпоследовательность, то $L < +\infty$.

Если $m < n$, то $x_n \in C_n \subseteq C_{m+1} = C_m \cap H(x_m, y_m)$. Откуда следует, что

$$\phi(x_n, y_m) \le \phi(x_n, x_m). \tag{4}$$

Применив для $x_m = \Pi_{C_m} x_0$ и $x_n \in C_m$ лемму 2, получим полезное неравенство

$$\langle Jx_m - Jx_0, x_n - x_m \rangle \ge 0. \tag{5}$$

Имеет место

Лемма 3. *Пусть (x_n) — порожденная алгоритмом 1 последовательность. Предположим, что для произвольной подпоследовательности (x_{n_k}) имеем*

$$\left.\begin{array}{r} x_{n_k} \to x, \\ x_{n_k} - y_{n_k} \to 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x \in C. \tag{6}$$

Тогда произвольная ограниченная подпоследовательность последовательности (x_n) сходится к точке из C.

Доказательство. Пусть (x_{n_k}) — ограниченная подпоследовательность последовательности (x_n). Для $k > l$ имеем

$$\phi(x_{n_k}, x_{n_l}) = \phi(x_{n_k}, x_0) - \phi(x_{n_l}, x_0) + 2\langle Jx_0 - Jx_{n_l}, x_{n_k} - x_{n_l} \rangle.$$

Учитывая (5), получаем

$$\phi(x_{n_k}, x_{n_l}) \le \phi(x_{n_k}, x_0) - \phi(x_{n_l}, x_0) \to 0 \quad \text{при} \quad k > l \to \infty.$$

Из леммы 1 следует $\|x_{n_k} - x_{n_l}\| \to 0$, т. е., подпоследовательность (x_{n_k}) фундаментальна. Таким образом, существует элемент $x \in E$ такой, что $x_{n_k} \to x$. Имеем

$$x_{n_k} - y_{n_k} = \underbrace{(x_{n_k} - x_{n_{k+1}})}_{\to 0} + (x_{n_{k+1}} - y_{n_k}) \to 0,$$

поскольку из (4) и леммы 1 следует

$$\phi(x_{n_{k+1}}, y_{n_k}) \le \phi(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) \to 0 \quad \Rightarrow \quad x_{n_{k+1}} - y_{n_k} \to 0.$$

Включение $x \in C$ следует из (6). □

Теорема 1. *Пусть E — равномерно выпуклое и равномерно гладкое банахово пространство, $C \subseteq E$ — замкнутое выпуклое множество. Пусть (x_n) — порожденная алгоритмом 1 последовательность. Предположим, что $C \subseteq C_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и для произвольной подпоследовательности (x_{n_k}) выполняется (6). Тогда справедливы утверждения:*

(i) *если* $C \neq \emptyset$, *то* $x_n \to \Pi_C x_0$;
(ii) *если* $C = \emptyset$, *то* $\|x_n\| \to +\infty$.

Доказательство. Докажем (i). Для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\phi(x_n, x_0) = \min_{y \in C_n} \phi(y, x_0) \leq \min_{y \in C} \phi(y, x_0) < +\infty. \tag{7}$$

Следовательно, $\sup_n \|x_n\| < +\infty$. По лемме 3 имеем $x_n \to x \in C$. Переходя к пределу в (7), получаем $\phi(x, x_0) \leq \min_{y \in C} \phi(y, x_0)$, т.е. $x = \Pi_C x_0$.

Докажем (ii). Предположим, что $\liminf_{n \to \infty} \|x_n\| < +\infty$. Тогда (x_n) содержит ограниченную подпоследовательность, которая, согласно лемме 3, должна сходиться к точке из C. Последнее невозможно вследствие того, что $C = \emptyset$. Таким образом, $\|x_n\| \to +\infty$. □

4. Аппроксимация общей неподвижной точки

Множество неподвижных точек оператора $T : E \to E$ обозначим $F(T) = \{x \in E : \ x = Tx\}$.

Определение 1 ([6])**.** Оператор $T : E \to E$ называют относительно квазинерастягивающим, если

(1) $F(T) \neq \emptyset$;
(2) $\phi(x, Ty) \leq \phi(x, y) \quad \forall x \in F(T) \quad \forall y \in E$.

Замечание 4. Если пространство E гильбертово, то определение 1 задает понятие фейеровского (квазинерастягивающего) оператора. Приведем пример одного из самых популярных в оптимизации квазинерастягивающих операторов. Пусть $g : H \to \mathbb{R}$ — выпуклая дифференцируемая по Гато функция. Если множество $D = \{x \in H : \ \ g\,(x) \leq 0\}$ не пусто, то оператор

$$Tx = \begin{cases} x - \frac{g(x)}{\|\nabla g(x)\|^2} \nabla g\,(x)\,, & \text{если} \quad x \notin D, \\ \hfill x, & \text{если} \quad x \in D, \end{cases}$$

где $\nabla g\,(x) \in H$ — производная g в точке $x \in H$, является квазинерастягивающим с $F(T) = D$ [1].

Определение 2 ([6])**.** Семейство операторов $\{T_n : E \to E\}$ удовлетворяет $(*)$-условию, если

(1) $\mathcal{F} = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) \neq \emptyset$;
(2) для любой последовательности (x_n) имеем

$$\left. \begin{array}{c} x_n \to x, \\ x_n - T_n x_n \to 0 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad x \in \mathcal{F}.$$

Замечание 5. Если $T_n \equiv T$ и оператор T замкнут, то семейство $\{T_n\}$ удовлетворяет $(*)$-условию.

Замечание 6. Для семейства относительно квазинерастягивающих операторов, удовлетворяющего $(*)$-условию, множество $\mathcal{F}$ выпукло и замкнуто.

Детализуем абстрактный алгоритм 1 для решения задачи:

$$\text{найти}\ \ \Pi_{\mathcal{F}}x_0,\ \ x_0 \in E,$$

где $\mathcal{F} = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$, $\{T_n : E \to E\}$ — счетное семейство относительно квазинерастягивающих операторов.

Алгоритм 2. Для точки $x_0 \in E$ строим последовательность (x_n) по схеме

$$\begin{cases} x_1 \in E,\ \ C_1 = E, \\ C_{n+1} = C_n \cap H(x_n, T_n x_n), \\ x_{n+1} = \Pi_{C_{n+1}} x_0. \end{cases}$$

Замечание 7. Для нерастягивающих операторов, действующих в гильбертовом пространстве, алгоритм 2 предложен и изучен в [4].

Простым следствием теоремы 1 является

Теорема 2. *Пусть E — равномерно выпуклое и равномерно гладкое банахово пространство, $\{T_n : E \to E\}$ — счетное семейство относительно квазинерастягивающих операторов, удовлетворяющие $(*)$-условию. Тогда порожденная алгоритмом 2 последовательность (x_n) сильно сходится к точке $\Pi_{\mathcal{F}}x_0$.*

Доказательство. Предположим, что $C_n \neq \emptyset$ и $\mathcal{F} \subseteq C_n$. Имеем

$$\phi(z, T_n x_n) \leq \phi(z, x_n) \quad \forall z \in \mathcal{F} \subseteq F(T_n).$$

Следовательно, $\mathcal{F} \subseteq H(x_n, T_n x_n)$. Таким образом, $\mathcal{F} \subseteq C_{n+1}$. Получили цепочку вложений

$$E = C_1 \supseteq ... \supseteq C_n \supseteq C_{n+1} \supseteq ... \supseteq \mathcal{F} \neq \emptyset$$

и корректность определения последовательности (x_n). Из теоремы 1 следует сильная сходимость (x_n) к точке $\Pi_{\mathcal{F}}x_0$. □

Замечание 8. Теорема 3 справедлива и для варианта алгоритма 1 с

$$y_n = J^{-1}\left(\lambda_n J x_n + (1 - \lambda_n) J T_n x_n\right),\ \ 0 \leq \lambda_n \leq \lambda < 1.$$

Рассмотрим еще один вариант метода внешних аппроксимаций для аппроксимации ближайшей по Альберу к $x_0 \in E$ общей неподвижной точки не более чем счетного семейства операторов $\{T_n\}_{n \in \mathcal{I}}$, $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{N}$:

$$\text{найти}\ \ \Pi_{\cap_{n\in\mathcal{I}} F(T_n)} x_0,\ \ x_0 \in E.$$

Алгоритм 3. Строим последовательность (x_n) по схеме

$$\begin{cases} x_1 \in E,\ \ C_1 = E, \\ C_{n+1} = C_n \cap H(x_n, T_{p(n)} x_n), \\ x_{n+1} = \Pi_{C_{n+1}} x_0, \end{cases}$$

где $p : \mathbb{N} \to \mathcal{I}$.

Будем предполагать, что отображение $p : \mathbb{N} \to \mathcal{I}$ сюръективно и «достаточно часто» принимает каждое свое значение. А именно, для произвольного индекса $i \in \mathcal{I}$ множество $p^{-1}(i) = \{k \in \mathbb{N} :\ p(k) = i\}$ бесконечно.

Замечание 9. Если $\mathcal{I} = \{1, 2, ..., N\}$, то можно положить $p(n) = (n-1) \bmod N + 1$ (циклическая стратегия).

Теорема 3. *Пусть E — равномерно выпуклое и равномерно гладкое банахово пространство, $\{T_n : E \to E\}_{n \in \mathcal{I}}$ — не более чем счетное семейство замкнутых относительно квазинерастягивающих операторов, причем $\bigcap_{n \in \mathcal{I}} F(T_n) \neq \emptyset$. Тогда порожденная алгоритмом 3 последовательность (x_n) сильно сходится к точке $\Pi_{\cap_{n \in \mathcal{I}} F(T_n)} x_0$.*

Доказательство. Необходимо лишь доказать утверждение:

$$\left.\begin{array}{c} x_n \to x, \\ x_n - T_{p(n)} x_n \to 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x \in \bigcap_{i \in \mathcal{I}} F(T_i).$$

Возьмем произвольный индекс $i \in \mathcal{I}$. Существует возрастающая последовательность (n_k) такая, что $p(n_k) = i$. Имеем

$$x_{n_k} \to x, \quad x_{n_k} - T_{p(n_k)} x_{n_k} = x_{n_k} - T_i x_{n_k} \to 0.$$

Замкнутость оператора T_i влечет $x \in F(T_i)$. В силу произвольности $i \in \mathcal{I}$ получаем, что $x \in \bigcap_{i \in \mathcal{I}} F(T_i)$. □

5. Заключительные замечания

В [26] Wu и Huang ввели новое понятие «обобщенного f-проекционного оператора» в банаховом пространстве. Их конструкция является обобщением проекции Альбера и проксимального оператора Моро.

Для замкнутого выпуклого множества $C \subseteq E$ и выпуклого полунепрерывного снизу функционала $f : E \to \mathbb{R}$ рассмотрим функционал

$$G(x, y) = f(x) + \phi(x, y) = f(x) + \|x\|^2 - 2 \langle Jy, x \rangle + \|y\|^2$$

и задачу минимизации:

$$\text{найти } \ z \in C : \ \ G(z, x) = \min_{y \in C} G(y, x), \ \ x \in E.$$

Оператор $\Pi_C^f x = \operatorname{argmin}_{y \in C} G(y, x)$ называют обобщенным f-проекционным оператором [26]. Он корректно определен в равномерно выпуклом и равномерно гладком банаховом пространстве.

Рассмотрим

Алгоритм 4. Для точки $x_0 \in E$ строим последовательность (x_n) по схеме

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 \in E, \ \ C_1 = E, \\ C_{n+1} = C_n \cap H(x_n, T_n x_n), \\ x_{n+1} = \Pi_{C_{n+1}}^f x_0. \end{array}\right.$$

Имеет место

Теорема 4. *Пусть E — равномерно выпуклое и равномерно гладкое банахово пространство, $\{T_n : E \to E\}$ — счетное семейство относительно квазинерастягивающих операторов, удовлетворяющие $(*)$-условию, f :*

$E \to \mathbb{R}$ — выпуклый полунепрерывный снизу функционал. Тогда порожденная алгоритмом 4 последовательность (x_n) сильно сходится к точке $\Pi^f_{\mathcal{F}} x_0$.

Принципиальным моментом рассмотренных методов является вычисление проекции фиксированной точки на все более сложный многогранник. Для преодоления этой проблемы необходимы методы, способные по известной проекции точки на многогранник быстро получить проекцию точки на новый многогранник с одним добавленным ограничением.

Литература

1. Васин В. В., Еремин И. И. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. (Теория и приложения). — Москва–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005. — 200 с.
2. Bauschke H. H., Combettes P. L. Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces. — Springer, 2011. — 408 + xvi p.
3. Nadezhkina N., Takahashi W. Strong convergence theorem by a hybrid method for nonexpansive mappings and Lipschitz-continuous monotone mappings // SIAM J. Optim. — 2006. — Vol. 16. — P. 1230–1241.
4. Takahashi W., Takeuchi Y., Kubota R. Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces // J. Math. Anal. Appl. — 2008. — 341. — P. 276—286.
5. Takahashi W., Zembayashi K. Strong convergence theorem by a new hybrid method for equilibrium problems and relatively nonexpansive mappings // Fixed Point Theory Appl. — 2008. — 11. — Article ID 528476.
6. Boonchari D., Saejung S. Approximation of common fixed points of a countable family of relatively nonexpansive mappings // Fixed Point Theory Appl. — 2010. — 26. — Article ID 407651.
7. Семенов В. В. Сильно збіжний алгоритм пошуку нерухомої точки багатозначного фейєрівського оператора // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2010. — № 4 (103). — С. 89–93.
8. Семенов В. В. Два методи апроксимації нерухомої точки фейєрівського оператора // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2013. — №1(111). — С. 46–56.
9. Семенов В. В. Об одной принципиальной схеме вычисления обобщенной проекции // Доповіді НАН України. — 2013. — №6. — С. 41–46.
10. Нурминский Е. А. Использование дополнительных малых воздействий в фейеровских моделях итеративных алгоритмов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2008. — Т.48, №12. — С. 2121–2128.
11. Семенов В. В. О сходимости методов решения двухуровневых вариационных неравенств с монотонными операторами // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2010. — №2(101). — С. 121–129.
12. Маліцький Ю. В., Семенов В. В. Нові теореми сильної збіжності проксимального методу для задачі рівноважного програмування // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2010. — №3(102). — С. 79–88.
13. Censor Y., Gibali A., Reich S. Strong convergence of subgradient extragradient methods for the variational inequality problem in Hilbert space // Optimization Methods and Software. — 2011. — Vol. 26. — P. 827–845.

14. Денисов С. В., Семенов В. В. Проксимальний алгоритм для дворівневих варіаційних нерівностей: сильна збіжність // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2011. — №3(106). — С. 27–32.
15. Семенов В. В. Параллельная декомпозиция вариационных неравенств с монотонными операторами // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2012. — №2(108). — С. 53–58.
16. Семенов В. В. Явный алгоритм расщепления для вариационных неравенств с монотонными операторами // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2013. — №2(112). — С. 42–52.
17. Semenov V. V. Strongly Convergent Algorithms for Variational Inequality Problem Over the Set of Solutions the Equilibrium Problems // Zgurovsky M. Z., Sadovnichiy V. A. (eds.) Continuous and Distributed Systems. — Heidelberg: Springer, 2014. — P. 131—146.
18. Semenov V. V. A Strongly Convergent Splitting Method for Systems of Operator Inclusions with Monotone Operators // Journal of Automation and Information Sciences. — 2014. — V. 46, №5. — P. 45–56.
19. Alber Y. I. Metric and generalized projection operators in Banach space: properties and applications, in: Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type, A. G. Katrosatos (ed.), Marcel Dekker, New York, 1996, pp. 15–50.
20. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. — Москва: Наука, 1972. — 416 с.
21. Дистель Дж. Геометрия банаховых пространств. — Киев: Вища школа, 1980. — 215 с.
22. Войтова Т. А., Денисов С. В., Семенов В. В. Сильно збіжний модифікований варіант методу Корпелевич для задач рівноважного програмування // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2011. — №1(104). — С. 10–23.
23. Малицкий Ю. В., Семенов В. В. Схема внешних аппроксимаций для вариационных неравенств на множестве неподвижных точек фейеровских операторов // Доповіді НАН України. — 2013. — №7. — С. 47–52.
24. Semenov V. V. Hybrid Splitting Methods for the System of Operator Inclusions with Monotone Operators // Cybernetics and Systems Analysis. — 2014. — V.50. — P. 741–749.
25. Malitsky Yu. V., Semenov V. V. A hybrid method without extrapolation step for solving variational inequality problems // Journal of Global Optimization. — 2015ю — Vol. 61, Issue 1. — P. 193–202.
26. Wu K. Q., Huang N. J. The generalized f-projection operator with an application // Bull. Aust. Math. Soc. — 2006. — 73. — P. 307–317.

Поступила 28.02.2016