Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2016, №1(121) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.9
MSC 39A06

OPTIMISATION SOLUTIONS OF LINEAR DIFFERENCE EQUATION WITH RANDOM COEFFICIENTS

Iurii Shusharin

Marketing Faculty, Kyiv National Economic University named after Vadym Hetman, Kyiv, Ukraine, E-mail: shusharin@meta.ua.

ОПТИМІЗАЦІЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ З ВИПАДКОВИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Ю. В. Шушарін

Факультет маркетингу, Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана, Київ, Україна, E-mail: shusharin@meta.ua.

Abstract. The optimal control for difference equations with random coefficients cosidered. Necessary optimality conditions for systems of linear difference equations with random coefficients were found. Vector of controls from minimum condition of quadratic functional were got. Optimal control for Markov process, which depends on the parameters that determine the probability of transition from one state to another was found. Lagrange function with matrix Lagrange multipliers was created. The system of equations by a successive approximations method was found.
Keywords: probability, optimal control, difference equations, Markov processes.

Резюме. У даній роботі розглянуто оптимальне керування для різницевих рівнянь з випадковими коефіцієнтами. Знайдено необхідні умови оптимальності для систем лінійних різницевих рівнянь із випадковими коефіцієнтами. Знайдено вектор керувань з умови мінімуму квадратичного функціоналу. Знайдено оптимальне керування для марковського процесу, яке залежить від параметрів, що визначають ймовірність переходу з одного стану в інший. Створено функцію Лагранжа з матричними множниками Лагранжа. Знайдено систему рівнянь методом послідовних наближень.
Ключові слова: ймовірність, оптимальне керування, різницеві рівняння, марковські процеси.

Розглядається система лінійних різницевих рівнянь із випадковими коефіцієнтами

$$X_{n+1} = A\left(\xi_{n+1}, \xi\right) X_n + B\left(\xi_{n+1}, \xi\right) U_n \quad \left(n = 0, 1, 2, ...\right), \tag{1}$$

де ξ_n — марковський процес, який визначається системою різницевих рівнянь

$$\begin{gathered} p_k\left(n+1\right) = \sum_{s=1}^{q} \pi_{ks} p_s\left(n\right),\ p_k\left(n\right) \equiv P\left\{\xi_n = \theta_k\right\}, \\ \left(k = 1, ..., q\right)\ \left(n = 0, 1, 2, ...\right). \end{gathered} \tag{2}$$

Вектор керувань U_n знаходимо з умови мінімуму квадратичного функціонала

$$v = \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} X_n^* Q\left(\xi_n\right) X_n + U_n^* L\left(\xi_n\right) U_n \right\rangle. \tag{3}$$

Знайдемо оптимальне керування у вигляді

$$U_n = S\left(\xi_n\right) X_n \quad \left(n = 0, 1, 2, ...\right). \tag{4}$$

Щоб звести розглянуту систему (1) до систем різницевих рівнянь, введемо позначення

$$\begin{gathered} A\left(\xi_{n+1}, \xi_n\right) + B\left(\xi_{n+1}, \xi_n\right) S\left(\xi_n\right) \equiv G\left(\xi_{n+1}, \xi_n\right) \\ Q\left(\xi_n\right) + S^*\left(\xi_n\right) L\left(\xi_n\right) S\left(\xi_n\right) \equiv H\left(\xi_n\right). \end{gathered} \tag{5}$$

При цьому приходимо до системи лінійних різницевих рівнянь із випадковими коефіцієнтами

$$X_{n+1} = G\left(\xi_{n+1}, \xi_n\right) X_n, \tag{6}$$

для якої знаходиться значення квадратичного функціонала

$$v = \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} X_n^* H\left(\xi_n\right) X_n \right\rangle. \tag{7}$$

Використовуючи скалярний добуток матриць, запишемо формулу (7) у вигляді

$$v = \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} H\left(\xi_n\right) \circ X_n X_n^* \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{q} H_k \circ D_k\left(n\right), \tag{8}$$

де позначено

$$H_k = H\left(\theta_k\right) \quad \left(k = 1, ..., q\right).$$

Якщо введемо основні стохастичні функції

$$v_k\left(x\right) = \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} X_n^* H\left(\xi_n\right) X_n | X_0 = X, \xi_0 = \theta_k \right\rangle, \tag{9}$$

то значення функціонала v (8) можна знайти за формулою

$$v = \sum_{k=1}^{q} \int_{E_m} v_k\left(x\right) f_k\left(0, X\right) dX. \tag{10}$$

Якщо покладемо

$$v_k(x) = X^* C_k X \quad (k = 1, ..., q), \tag{11}$$

то отримаємо для v вираз

$$v = \sum_{k=1}^{q} \int_{E_m} C_k \circ XX^* f_k(0, X)\, dX = \sum_{k=1}^{q} C_k \circ D_k(0). \tag{12}$$

У даному випадку матриці C_k $(k = 1, ..., q)$ задовольняють системі матричних рівнянь

$$C_k = H_k + \sum_{s=1}^{q} \pi_{sk} G_{sk}^* C_s G_{sk} \quad (k = 1, ..., q), \tag{13}$$

де позначено

$$G_{sk} = G(\theta_s, \theta_k) = A_{sk} + B_{sk} S_k \quad (s, k = 1, ..., q).$$

Синтез оптимального керування, тобто, пошук матриць $S_k = S(\theta_k)$ $(k = 1, ..., q)$ у формулі (4) зводиться до пошуку мінімуму функціоналу

$$v = \sum_{k=1}^{q} C_k \circ D_k(0) \tag{14}$$

при виконанні умов

$$C_k = Q_k + S_k^* L_k S_k + \sum_{s=1}^{q} \pi_{sk} (A_{sk} + B_{sk} S_k)^* C_s (A_{sk} + B_{sk} S_k) \\ (k = 1, ..., q), \tag{15}$$

які накладено на матриці C_k, S_k $(k = 1, ..., q)$.

Маємо задачу на умовний екстремум. Утворимо функцію Лагранжа з матричними множниками Лагранжа Λ_k $(k = 1, ..., q)$. Оскільки всі доданки у формулах (15) є симетричними матрицями, то матриці Λ_k $(k = 1, ..., q)$ також є симетричними матрицями. Утворимо функцію Лагранжа

$$v = \sum_{k=1}^{q} D_k(0) \circ C_k + \sum_{k=1}^{q} \Lambda_k \circ \Bigg(Q_k + S_k^* L_k S_k + \\ + \sum_{s=1}^{q} \pi_{sk} (A_{sk} + B_{sk} S_k)^* C_s (A_{sk} + B_{sk} S_k) - C_k \Bigg) = \\ = \sum_{k=1}^{q} D_k(0) \circ C_k + \sum_{k=1}^{q} ((\Lambda_k \circ Q_k + L_k \circ S_k \Lambda_k S_k^* + \\ + \sum_{s=1}^{q} \pi_{sH} C_s \circ (A_{sk} + B_{sH} S_H) \Lambda_k (A_{sH} + B_{sk} S_H)^* - \Lambda_k \circ (k)). \tag{16}$$

Обчислимо варіацію функціонала v при зміні матриць S_k, C_k $(k = 1, ..., q)$. При цьому знаходимо необхідні умови умовного екстремуму

$$\Lambda_k \circ \left(S_k^* L_k + \sum_{s=1}^{q} \pi_{sk} \left(A_{sk} + B_{sH} S_k \right)^* C_s B_{sk} \right) = 0 \quad (k = 1, ..., q) , \tag{17}$$

$$D_k (0) - \Lambda_k + \sum_{s=1}^{q} \pi_{ks} \left(A_{ks} + B_{ks} S_s \right) \Lambda_s \left(A_{ks} + B_{ks} S_s \right)^* = 0 \\ (k = 1, ..., q) . \tag{18}$$

Із системи рівнянь (17) знаходимо рівняння

$$S_k^* \left(L_k + \sum_{s=1}^{q} \pi_{sk} B_{sk}^* C_s B_{sk} \right) = - \sum_{s=1}^{q} \pi_{sk} A_{sk}^* C_s B_{sk} \quad (k = 1, ..., q) , \tag{19}$$

з яких знаходимо вираз для матриць S_k

$$S_k = - \left(L_k + \sum_{s=1}^{q} \pi_{sk} B_{sk}^* C_s B_{sk} \right)^{-1} \sum_{s=1}^{q} \pi_{sk} B_{sk}^* C_s A_{sk} \quad (k = 1, ..., q) . \tag{20}$$

Відзначимо, що L_k, C_s $(k = 1, ..., q)$ — симетричні матриці

$$L_k^* = L_k, C_s^* = C_s \quad (k, s = 1, ..., q) .$$

Використовуючи систему рівнянь (18), вираз для значення функціоналу v можна перетворити до вигляду

$$v = \sum_{k=1}^{q} \Lambda_k \circ \left(Q_k + S_k^* L_k S_k \right) = \sum_{k=1}^{q} H_k \circ \Lambda_k . \tag{21}$$

Зіставляючи формули (21), (8), приходимо до рівностей

$$\Lambda_k = D_k, \quad D_k \equiv \sum_{n=0}^{\infty} D_k (n) \quad (k = 1, ..., q) . \tag{22}$$

Значення функціоналу v можна обчислювати за формулою

$$v = \sum_{k=1}^{q} H_k \circ D_k . \tag{23}$$

Вирази для матриць S_k (20) містять невідомі матриці C_k $(k = 1, ..., q)$, які необхідно визначати із системи рівнянь (15). Цю систему за допомогою системи рівнянь (17) можна перетворити до вигляду

$$C_k = Q_k + \sum_{s=1}^{q} \pi_{ks} \left(A_{sk} + B_{sk} S_k \right)^* C_s A_{sk} \quad (k = 1, \ldots, q) , \tag{24}$$

$$C_k = Q_k + \sum_{s=1}^{q} \pi_{sk} A_{sk}^* C_s A_{sk} - \sum_{s=1}^{q} \pi_{sk} A_{sk}^* C_s B_{sk} (L_k + \\ + \sum_{s=1}^{q} \pi_{sk} B_{sk}^* C_s B_{sk})^{-1} \sum_{s=1}^{q} \pi_{sk} B_{sk}^* C_s A_{sk} \quad (k = 1, ..., q) . \tag{25}$$

Система рівнянь (20), (25) визначає необхідні умови оптимальності розв'язків системи різницевих рівнянь (1). В окремому випадку, коли система рівнянь (1) має вигляд

$$X_{n+1} = A\left(\xi_n\right) X_n + B\left(\xi_n\right) U_n \quad (n = 0, 1, 2, ...) \tag{26}$$

необхідні умови оптимальності (25), (20) набувають вигляду

$$\begin{gathered} C_k = Q_k + A_k^* \Psi_k A_k - A_k^* \Psi_k B_k \left(L_k + B_k^* \Psi_k B_k\right)^{-1} B_k^* \Psi_k A_k \\ \Psi_k \equiv \sum_{s=1}^{q} \pi_{sk} C_s \quad (k = 1, ..., q) \end{gathered} \tag{27}$$

$$S_k = -\left(L_k + B_k^* \Psi_k B_k\right)^{-1} B_k^* \Psi_k A_k \quad (k = 1, ..., q)\,. \tag{28}$$

Ці результати вперше отримано в роботі [3].

Систему рівнянь (25) можа отримати за допомогою методу послідовних наближень

$$\begin{gathered} C_k^{(j+1)} = Q_k + \sum_{s=1}^{q} \pi_{sk} A_{sk}^* C_s^{(j)} A_{sk} - \sum_{s=1}^{q} \pi_{sk} A_{sk}^* C_s^{(j)} B_{sk} \times \\ \times \left(L_k + \sum_{s=1}^{q} \pi_{sk} B_{sk}^* C_s^{(j)} B_{sk}\right)^{-1} \sum_{s=1}^{q} \pi_{sk} B_{sk}^* C_s^{(j)} A_{sk} \ \ (j = 0, 1, ...)\,; \\ C_k^{(0)} = 0; \quad C_k = \lim_{j \to +\infty} C_k^{(j)} \quad (k = 1, ..., q)\,, \end{gathered} \tag{29}$$

якщо система рівнянь (26) має додатньо визначений розв'язок $C_k > 0$ $(k = 1, ..., q)$.

Отже, приходимо до наступного результату, що дозволяє здійснити синтез оптимального керування.

Теорема 1. *Якщо для системи різницевих керувань* (1) *існує оптимальне керування вигляду* (4), *то матриці* $C_k > 0$ $(k = 1, ..., q)$ *можуть бути отримані методом послідовних наближень* (29), *а матриці* $S_k = S\left(\theta_k\right)$ $(k = 1, ..., q)$ *визначаються при цьому із системи рівнянь* (20).

Приклад. Синтезуємо оптимальне керування для різницевого рівняння

$$x_{n+1} = a\left(\xi_{n+1}, \xi_n\right) x_n + u_n, \tag{30}$$

де ξ_n — марковський процес, що приймає два стани $\theta_1,\ \theta_2$ з ймовірностями $p_k\left(n\right) = P\left\{\xi_n = \theta_k\right\}$ $(k = 1, 2)\,.$ Нехай

$$p_1\left(n+1\right) = \left(1-\nu\right) p_1\left(n\right) + \nu p_2\left(n\right), \quad p_2\left(n+1\right) = \nu p_1\left(n\right) + \left(1-\nu\right) p_2\left(n\right)$$

і коефіцієнт $a\left(\theta_k, \theta_s\right)$ приймає значення

$$\begin{gathered} a_{11} = a\left(\theta_1, \theta_1\right) = 1, \quad a_{22} = a\left(\theta_2, \theta_2\right) = 1, \\ a_{12} = a\left(\theta_1, \theta_2\right) = \alpha, \quad a_{21} = a\left(\theta_2, \theta_1\right) = \beta \end{gathered}$$

Шукаємо оптимальне керування вигляду

$$U_n = S(\xi_n)\, x_n, \quad S_1 = S(\theta_1), \quad S_2 = S(\theta_2),$$

яке мінімізує квадратичний функціонал

$$v = \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 + u_n^2 \right\rangle.$$

Система рівнянь (20), (25) набуває вигляду

$$\begin{aligned}
C_1 &= 1 + \left(C_1(1-\nu) + C_2\beta^2\nu\right) + \left(C_1(1-\nu) + C_2\nu\beta\right) S_1;\\
C_2 &= 1 + \left(C_2(1-\nu) + C_1\alpha^2\nu\right) + \left(C_2(1-\nu) + C_1\nu\alpha\right) S_2;\\
S_1 &= -\left(C_1(1-\nu) + C_2\nu\beta\right) \cdot \left(1 + C_1(1-\nu) + C_2\nu\right)^{-1};\\
S_2 &= -\left(C_2(1-\nu) + C_1\nu\alpha\right) \cdot \left(1 + C_2(1-\nu) + C_1\nu\right)^{-1} \qquad (31)
\end{aligned}$$

і легко розв'язується методом послідовних наближень. Деякі результати обчислень наведено в таблиці 1.

Значення коефіцієнтів керування при $\alpha = 1.5$, $\beta = 0.7$.

Таблиця 1. Результати розрахунків

ν	S_1	S_2	C_1	C_2
0.0	-0. 618034	-0. 618034	1. 618034	1. 618034
0.1	-0. 596141	-0. 666834	1. 590758	1. 727580
0.2	-0. 575617	-0. 695292	1. 562028	1. 820989
0.3	-0. 556934	-0. 724109	1. 532438	1. 902461
0.4	-0. 540405	-0. 748913	1. 502589	1. 974628
0.5	-0. 526192	-0. 770789	1. 473024	2. 039326
0.6	-0. 514309	-0. 790536	1. 444188	2. 097916
0.7	-0. 504662	-0. 808770	1. 416407	2. 151442
0.8	-0. 497072	-0. 826006	1. 389892	2. 200718
0.9	-0. 491319	-0. 842692	1. 364756	2. 246370
1.0	-0. 487162	-0. 859252	1. 341013	2. 288878

На рис. 1 представлено графічну залежність коефіцієнтів оптимального керування залежно від параметра v, який визначає умовні ймовірності переходу з одного стану в інший.

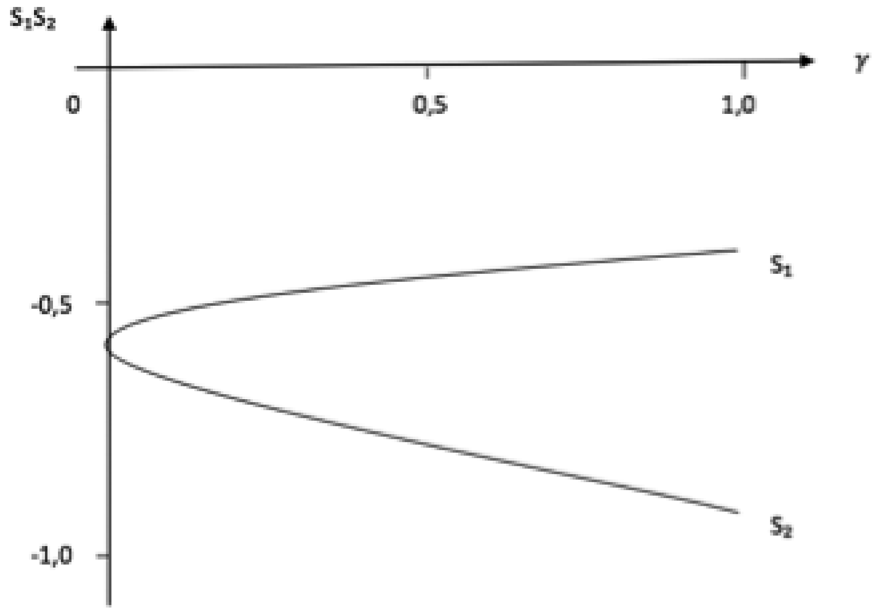

Рис 1. Залежність коефіцієнтів оптимального керування.

Література

1. Валеев К. Г., Карелова О. Л., Горелов В. И. Оптимизация линейных систем со случайными коэффициентами. — М.: Издательство РУДН, 1996. — 258 с.
2. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. — М.: Сов. Радио, 1997. — 488 с.
3. Валеев К. Г., Саннуфи М. А. Синтез оптимального управления для системы разностных уравнений со случайными коэффициентами. — К., 1988. — 7 с.
4. Шушарін Ю. В. Рекурентні рівняння для характеристичних функцій розв'язків лінійних різницевих рівнянь з випадковими коефіцієнтами // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, серія «Фізико-математичні науки» . — 2014. — №3. — С. 206–209.
5. Шушарін Ю. В. Алгебраїчні критерії асимптотичної стійкості розв'язків лінійних різницевих рівнянь з випадковими коефіцієнтами //Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2014. — №1. — С. 167–172.
6. Наконечний О. Г., Демиденко С. В., Шушарін Ю. В. Гарантовані оцінки середнього значення випадкових послідовностей // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, серія «Фізико-математичні науки». — 2014. — №4. — С. 204–208.
7. Пашко О. Г., Шушарін Ю. В. Розв'язування лінійних стохастичних рівнянь із випадковими коефіцієнтами методами Монте-Карло // Науковий вісник Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, серія «Комп'ютерні системи та компоненти». — 2014. — Т. 5, №2. — С. 21–27.

Надійшла 01.12.2015