Журнал обчислювальної та прикладної математики | **2016, №1(121)** | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.956

MSC 2010.MSC:35R12

ILL-POSEDNESS OF THE MIXED PROBLEM FOR ONE CLASS OF MULTI-DIMENSIONAL ELLIPTIC-PARABOLIC EQUATIONS

S. A. Aldashev

Institute of Mathematics, Physics and Computer science, Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan. E-mail: aldash51@mail.ru

НЕКОРРЕКТНОСТЬ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МНОГОМЕРНЫХ ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

С. А. Алдашев

Институт математики, физики и информатики КазНПУ им. Абая, Алматы, Казахстан. E-mail: Aldash51@mail.ru

Abstract. Correctness of boundary problems in the plane for elliptic equations is well analyzed by analitic function theory of complex variable.

There appear principal difficulties in similar problems when the number of independent variables is more than two. An attractive and suitable method of singular integral equations is less strong because of lock of any complete theory of multidimensional singular integral equations.

For the General elliptic-parabolic equations of the second order formulation of the first boundary value problem (or Dirichlet problem) was first carried out by G. Fichera .

Further study of this problem is given in the monographs by V. N. Vragov and O. A. Oleinik, E. V. Radkevich.

In this article use method the author studies a mixed problem for a class of multi-dimensional elliptical-parabolic equations in a cylindrical domain.

It has been shown that a homogeneous problem has an infinite set of non-trivial solutions, but a heterogeneous problem has the unique solution.

Keywords: ill-posedness, mixed problem, equation, solutions.

Резюме. Корректность краевых задач на плоскости для эллиптических уравнений методом теории аналитических функций комплексного переменого хорошо изучены.

При исследовании аналогичных вопросов, когда число независимых переменных больше двух, возникают трудности принципиального характера. Весьма привлекательный и удобный метод сингулярных интегральных уравнений теряют свою силу из-за отсутствия сколько-нибудь полной теории многомерных синулярных интегральных уравнений.

Для общих эллиптико-параболических уравнений второго порядка постановку первой краевой задачи (или задачи Дирихле) впервые осуществил Г. Фикера. Дальнейшее изучение этой задачи приведены в монографиях В. Н. Врагова и О. А. Олейник, Е. В. Радкевича.

В данной статье используя метод предложенных в работах автора изучается смешанная задача для одного класса многомерных эллиптико-параболических уравнений в цилиндрической области.

Показано, что однородная задача имеет бесчисленное множество нетривиальных решений, а неоднородная задача — разрешима неоднозначно.

Ключевые слова: некорректность, смешанная задача, уравнение, решения.

1. Введение.

Для общих эллиптико-параболических уравнений второго порядка постановку первой краевой задачи (или задачи Дирихле) впервые осуществил Г. Фикера [1]. Дальнейшее изучение этой задачи рассмотрено в [2, 3].

В данной статье изучается смешанная задача для одного класса многомерных эллиптико-параболических уравнений в цилиндрической области. В работе используется метод предложенный в [4–6].

2. Постановка задачи и результат.

Пусть $\Omega_{\alpha\beta}$ — цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, ..., x_m, t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = \beta < 0$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, ..., x_m)$.

Обозначим через Ω_α и Ω_β части области $\Omega_{\alpha\beta}$, а через Γ_α, Γ_β — части поверхности Γ, лежащие в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$; σ_α — верхнее, σ_β — нижнее основание области $\Omega_{\alpha\beta}$.

Пусть далее S — общая часть границ областей Ω_α , Ω_β, представляющая множество $\{t = 0,\ 0 < |x| < 1\}$ в E_m.

В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим эллиптико-параболические уравнения

$$0 = \begin{cases} \Delta_x u + u_{tt} + \sum\limits_{i=1}^{m} a_i(x,t) u_{x_i} + b(x,t) u_t + c(x,t) u,\ t > 0, \\ \Delta_x u - u_t + \sum\limits_{i=1}^{m} d_i(x,t) u_{x_i} + e(x,t) u,\ t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, ..., x_m$, $m \geq 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, ..., x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, ..., \theta_{m-1}, t$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta_1 < 2\pi$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i = 2, 3, ..., m-1$, $\theta = (\theta_1, ..., \theta_{m-1})$.

В качестве многомерной смешанной задачи рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$ при $t \neq 0$ из класса $C(\overline{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_{\sigma_\alpha} = \varphi(r,\theta), \quad u\Big|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t,\theta),\ u\Big|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t,\theta). \tag{2}$$

Пусть $\left\{Y^k_{n,m}(\theta)\right\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $W^l_2(S)$, $l = 0, 1, ...$ — пространства Соболева.

Имеет место [7]

Лемма 1. Пусть $f(r,\theta) \in W^l_2(S)$. Если $l \geq m-1$, то ряд

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} f^k_n(r) Y^k_{n,m}(\theta), \tag{3}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leq l - m + 1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. Для того, чтобы $f(r,\theta) \in W^l_2(S)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (4) удовлетворяли неравенствам

$$|f^1_0(r)| \leq c_1,\ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{2l}|f^k_n(r)|^2 \leq c_2,\ \ c_1,\, c_2 = const.$$

Через $\tilde{a}^k_{in}(r,t)$, $a^k_{in}(r,t)$, $\tilde{b}^k_n(r,t)$, $\tilde{c}^k_n(r,t)$, $\tilde{d}^k_{in}(r,t)$,$d^k_{in}(r,t)$, $\tilde{e}^k_n(r,t)$, ρ^k_n, $\bar{\varphi}^k_n(r)$, $\psi^k_{1n}(t)$, $\psi^k_{2n}(t)$ обозначим коэффициенты ряда (3) соответственно функций $a_i(r,\theta,t)\rho(\theta)$, $a_i\frac{x_i}{r}\rho$, $b(r,\theta,t)\rho$, $c(r,\theta,t)\rho$, $d(r,\theta,t)\rho$, $d_i\frac{x_i}{r}\rho$, $e(r,\theta,t)\rho$, $\rho(\theta)$, $i = 1,...,m$, $\varphi(r,\theta)$, $\psi_1(t,\theta)$, $\psi_2(t,\theta)$, причем $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$, H — единичная сфера в E_m.

Пусть $a_i(r,\theta,t)$, $b(r,\theta,t)$, $c(r,\theta,t) \in W^l_2(\Omega_\alpha)$, $d_i(r,\theta,t)$, $e(r,\theta,t) \in W^l_2(\Omega_\beta) \subset C(\bar{\Omega}_\beta)$, $l \geq m+1$, $i = 1,...,m$.

Тогда справедлива

Теорема 1. Однородная задача, соответствующая задаче 1 имеет бесчисленное множество нетривиальных решений.

Теорема 2. Если $\varphi(r,\theta) \in W^p_2(S)$, $\psi_1(t,\theta) \in W^p_2(\Gamma_\alpha)$, $\psi_2(t,\theta) \in W^p_2(\Gamma_\beta)$, $p > \frac{3m}{2}$, то задача 1 разрешима неоднозначно.

Отметим, что эти теоремы для многомерного модельного эллиптико-параболического уравнения получены в [8].

3. Доказательства теорем.

В сферических координатах уравнение (1) в области Ω_α имеет вид

$$L_1 u \equiv u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u + u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(r,\theta,t)u_{x_i} + \\ + b(r,\theta,t)u_t + c(r,\theta,t)u = 0, \tag{4}$$

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j}\right),\ g_1 = 1,$$

$$g_j = (\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{j-1})^2,\ j > 1.$$

Известно [7], что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0, 1, \ldots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y^k_{n,m}(\theta)$.

Искомое решение задачи 1 в области Ω_α будем искать в виде

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}^k_n(r,t) Y^k_{n,m}(\theta), \tag{5}$$

где $\bar{u}^k_n(r,t)$ — функции, подлежащие определению.

Подставив (5) в (4), умножив затем полученное выражение на $\rho(\theta) \neq 0$, и проинтегрировав по единичной сфере H для $\bar{u}^k_n$ получим [9]

$$\begin{gathered}\rho^1_0 \bar{u}^1_{0rr} + \rho^1_0 \bar{u}^1_{0tt} + \left(\frac{m-1}{r}\rho^1_0 + \sum_{i=1}^{m} a^1_{i0}\right)\bar{u}^1_{0r} + \widetilde{b}^1_0 \bar{u}^1_{0t} + \widetilde{c}^1_0 \bar{u}^1_0 + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\rho^k_n \bar{u}^k_{nrr} + \rho^k_n \bar{u}^k_{ntt} + \left(\frac{m-1}{r}\rho^k_n + \sum_{i=1}^{m} a^k_{in}\right)\bar{u}^k_{nr} + \widetilde{b}^k_n \bar{u}^k_{nt} + \right. \\ \left. + \left[\widetilde{c}^k_n - \lambda_n \frac{\rho^k_n}{r^2} + \sum_{i=1}^{m}(\widetilde{a}^k_{in-1} - n a^k_{in})\right]\bar{u}^k_n\right\} = 0.\end{gathered} \tag{6}$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\rho^1_0 \bar{u}^1_{0rr} + \rho^1_0 \bar{u}^1_{0tt} + \frac{m-1}{r}\rho^1_0 \bar{u}^1_{0r} = 0, \tag{7}$$

$$\begin{gathered}\rho^k_1 \bar{u}^k_{1rr} + \rho^k_1 \bar{u}^k_{1tt} + \frac{m-1}{r}\rho^k_1 \bar{u}^k_{1r} - \frac{\lambda_1}{r^2}\rho^k_1 \bar{u}^k_1 = \\ = -\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^{m} a^1_{i0}\bar{u}^1_{0r} + \widetilde{b}^1_0 \bar{u}^1_{0t} + \widetilde{c}^1_0 \bar{u}^1_0\right), \quad n = 1, \quad k = \overline{1, k_1},\end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered}\rho^k_n \bar{u}^k_{nrr} + \rho^k_n \bar{u}^k_{ntt} + \frac{m-1}{r}\rho^k_n \bar{u}^k_{nr} - \frac{\lambda_n}{r^2}\rho^k_n \bar{u}^k_n = \\ = -\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\left\{\sum_{i=1}^{m} a^k_{in-1}\,\bar{u}^k_{n-1r} + \widetilde{b}^k_{n-1}\bar{u}^k_{n-1t} + [\widetilde{c}^k_{n-1} + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{m}(\widetilde{a}^k_{in-2} - (n-1)a^k_{in-1})]\bar{u}^k_{n-1}\right\}, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 2, 3, \ldots .\end{gathered} \tag{9}$$

Суммируя уравнение (8) от 1 до k_1, а уравнение (9) — от 1 до k_n, затем сложив полученные выражения с (7), приходим к уравнению (6).

Отсюда следует, что если $\left\{\bar{u}_n^k\right\}$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,....$ — решение системы (7)–(9), то оно является и решением уравнения (6).

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (7)–(9) можно представить в виде

$$\bar{u}_{nrr}^k+\bar{u}_{ntt}^k+\frac{m-1}{r}\bar{u}_{nr}^k+\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k=\bar{f}_n^k(r,t), \tag{10}$$

где $\bar{f}_n^k(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $\bar{f}_0^1(r,t)\equiv 0$.

Далее, из краевого условия (2) в силу (5) будем иметь

$$\bar{u}_n^k(r,\alpha)=\overline{\varphi}_n^k(r),\quad \bar{u}_n^k(1,t)=\psi_{1n}^k(t),\quad k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,\dots. \tag{11}$$

В (10), (11) произведя замену $\bar{v}_n^k(r,t)=\bar{u}_n^k(r,t)-\psi_{1n}^k(t)$ получим

$$\bar{v}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\bar{v}_{nr}^k+\bar{v}_{ntt}^k+\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{v}_n^k=f_n^k(r,t), \tag{12}$$

$$\bar{v}_n^k(r,\alpha)=\varphi_n^k(r),\quad \bar{v}_n^k(1,t)=0,\ k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,\dots, \tag{13}$$

$$f_n^k(r,t)=\bar{f}_n^k(r,t)-\psi_{1ntt}^k+\frac{\lambda_n}{r^2}\psi_{1n}^k,\ \varphi_n^k(r)=\bar{\varphi}_n^k(r)-\psi_{1n}^k(\alpha). \tag{14}$$

$$\upsilon_n^k(r,\alpha)=\widetilde{\varphi}_n^k(r),\quad \upsilon_n^k(1,t)=0,\ k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,\dots, \tag{15}$$

$$\overline{\lambda}_n=\frac{[(m-1)(3-m)-4\lambda_n]}{4},$$

$$\widetilde{f}_n^k(r,t)=r^{\frac{(m-1)}{2}}f_n^k(r,t),\ \widetilde{\varphi}_n^k(r)=r^{\frac{(m-1)}{2}}\varphi_n^k(r),$$

Решение задачи (14), (15) ищем в виде

$$\upsilon_n^k(r,t)=\upsilon_{1n}^k(r,t)+\upsilon_{2n}^k(r,t), \tag{16}$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$L_1\upsilon_{1n}^k=\widetilde{f}_n^k(r,t), \tag{17}$$

$$\upsilon_{1n}^k(r,\alpha)=0,\ \upsilon_{1n}^k(1,t)=0, \tag{18}$$

а $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$L_1\upsilon_{2n}^k=0, \tag{19}$$

$$\upsilon_{2n}^k(r,\alpha)=\widetilde{\varphi}_n^k(r),\ \upsilon_{1n}^k(1,t)=0. \tag{20}$$

Решение вышеуказанных задач, рассмотрим в виде

$$\upsilon_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}R_s(r)T_s(t), \tag{21}$$

при этом пусть

$$\widetilde{f}_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}a_{ns}^k(t)R_s(r),\ \tilde{\varphi}_n^k(r)=\sum_{s=1}^{\infty}b_{ns}^kR_s(r). \tag{22}$$

Подставляя (21) в (17), (18), с учетом (22), получим

$$R_{srr}+\frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}R_s+\mu R_s=0,\ 0<r<1, \tag{23}$$

$$R_s(1)=0,\ |R_s(0)|<\infty, \tag{24}$$

$$T_{stt}-\mu T_s(t)=a^k_{ns}(t),\ \ 0<t<\alpha, \tag{25}$$

$$T_s(\alpha)=0. \tag{26}$$

Ограниченным решением задачи (23), (24) является [10]

$$R_s(r)=\sqrt{r}J_\nu(\mu_{s,n}r), \tag{27}$$

где $\nu=\frac{n+(m-2)}{2}$, $\mu_{s,n}$ — нули функций Бесселя первого рода $J_\nu(z)$, $\mu=\mu^2_{s,n}$.

Общее решение уравнения (25) представимо в виде

$$T_{s,n}(t)=c_{1s}\operatorname{ch}\mu_{s,n}t+c_{2s}\operatorname{sh}\mu_{s,n}t+\frac{\operatorname{ch}\mu_{s,n}t}{\mu_{s,n}}\int\limits_0^t a^k_{ns}(\xi)\operatorname{sh}\mu_{s,n}\xi d\xi-$$
$$-\frac{\operatorname{sh}\mu_{s,n}t}{\mu_{s,n}}\int\limits_0^t a^k_{ns}(\xi)\operatorname{ch}\mu_{s,n}\xi d\xi,$$

где c_{1s}, c_{2s} — произвольные постоянные. Удовлетворив условию (26) будем иметь

$$T_{s,n}(t)=c_{2s}[\operatorname{sh}\mu_{s,n}t-(th\mu_{s,n}\alpha)\operatorname{ch}\mu_{s,n}t]+\frac{\operatorname{ch}\mu_{s,n}t}{\mu_{s,n}}\left(\int\limits_0^t a^k_{ns}(\xi)\operatorname{sh}\mu_{s,n}\xi d\xi-\right.$$
$$\left.-\int\limits_0^\alpha a^k_{ns}(\xi)\operatorname{sh}\mu_{s,n}\xi d\xi\right)+\frac{(th\mu_{s,n}\alpha)\operatorname{ch}\mu_{s,n}t}{\mu_{s,n}}\int\limits_0^\alpha a^k_{ns}(\xi)\operatorname{ch}\mu_{s,n}\xi d\xi-$$
$$-\frac{\operatorname{sh}\mu_{s,n}t}{\mu_{s,n}}\int\limits_0^t a^k_{ns}(\xi)\operatorname{ch}\mu_{s,n}\xi d\xi. \tag{28}$$

Подставляя (27) в (22) получим

$$r^{-\frac{1}{2}}\tilde{f}^k_n(r,t)=\sum_{s=1}^\infty a^k_{ns}(t)J_\nu(\mu_{s,n}r),\ r^{-\frac{1}{2}}\widetilde{\varphi}^k_n(r)=\sum_{s=1}^\infty b^k_{ns}J_\nu(\mu_{s,n}r),\ 0<r<1. \tag{29}$$

Ряды (28) — разложение в ряды Фурье-Бесселя [11], если

$$\begin{aligned} a^k_{ns}(t)&=2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int\limits_0^1\sqrt{\xi}\tilde{f}^k_n(\xi,t)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi,\\ b^k_{ns}&=2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int\limits_0^1\sqrt{\xi}\widetilde{\varphi}^k_n(\xi)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi, \end{aligned} \tag{30}$$

$\mu_{s,n}, s=1,2,...$ — положительные нули функций Бесселя $J_\nu(z)$, расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (27), (28) получим решение задачи (17), (18) в виде

$$\upsilon_{1n}^{k}(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}\sqrt{r}T_{s,n}(t)J_{\nu}(\mu_{s,n}r), \tag{31}$$

где $a_{ns}^{k}(t)$ определяется из(30).

Далее, подставляя (21) в (19), (20), с учетом (22), будем иметь

$$T_{stt}-\mu_{s,n}^{2}T_{s}(t)=0,\ 0<t<\alpha, \tag{32}$$

$$T_{s}(\alpha)=b_{ns}^{k}. \tag{33}$$

Общее решение уравнения (32) имеет вид

$$T_{s,n}(t)=c_{1s}'\operatorname{ch}\mu_{s,n}t+c_{2s}'\operatorname{sh}\mu_{s,n}t,$$

удовлетворив которого условию (33) получим

$$T_{s,n}(t)=c_{2s}'[\operatorname{sh}\mu_{s,n}t(th\mu_{s,n}\alpha)\operatorname{ch}\mu_{s,n}t]+\frac{b_{ns}^{k}\operatorname{ch}\mu_{s,n}t}{\operatorname{ch}\mu_{s,n}\alpha}. \tag{34}$$

Из (27), (34) найдем решение задачи (19), (20)

$$\upsilon_{2n}^{k}(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}\sqrt{r}T_{s,n}(t)J_{\nu}(\mu_{s,n}r), \tag{35}$$

где b_{ns}^{k} находится из (30).

Следовательно, сначала решив задачу (7), (11) ($n=0$), а затем (8), (11) ($n=1$) и т. д. найдем последовательно все $\upsilon_{n}^{k}(r,t)$ из (16), где $\upsilon_{1n}^{k}(r,t)$, $\upsilon_{2n}^{k}(r,t)$ определяются из (31), (35), $k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\dots$.

Итак, в области Ω_α имеет место

$$\int_{H}\rho(\theta)L_{1}udH=0. \tag{36}$$

Пусть $f(r,\theta,t)=R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r)\in V_0,\ V_0$ — плотна в $L_2((0,1))$, $\rho(\theta)\in C^{\infty}(H)$ — плотна в $L_2(H)$, $T(t)\in V_1,\ V_1$ — плотна в $L_2((0,\alpha))$.

Тогда $f(r,\theta,t)\in V$, $V==V_0\otimes H\otimes V_1$ — плотна в $L_2(\Omega_\alpha)$ [12].

Отсюда и из (36), следует, что

$$\int_{\Omega_\alpha}f(r,\theta,t)L_{1}ud\Omega_{\alpha}=0$$

и

$$L_{1}u=0,\ \forall(r,\theta,t)\in\Omega_{\alpha}.$$

Далее, из (5), (16), (28), (31), (34), (35) при $t\to+0$ имеем

$$u(r,\theta,0)=\tau(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\tau_{n}^{k}(r)Y_{n,m}^{k}(\theta),$$

$$\tau_n^k(r) = \psi_{1n}^k(0) + \sum_{s=1}^{\infty} r^{\frac{(2-m)}{2}} \left[-c_{2s} th\mu_{s,n}\alpha + \frac{th\mu_{s,n}\alpha}{\mu_{s,n}} \int_0^\alpha a_{ns}^k(\xi) \operatorname{ch}\mu_{s,n}\xi d\xi - \right.$$
$$\left. - c'_{2s} th\mu_{s,n}\alpha + \frac{b_{ns}^k}{\operatorname{ch}\mu_{s,n}\alpha} \right] J_{\nu+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n} r). \quad (37)$$

Таким образом, мы пришли в области Ω_β к первой краевой задаче для уравнения

$$L_2 u \equiv u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2}\delta u - u_t + \sum_{i=1}^m d_i(r,\theta,t) u_{x_i} + e(r,\theta,t) u = 0, \quad (38)$$

с условиями

$$u\big|_S = \tau(r,\theta), \ u\big|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t,\theta). \quad (39)$$

Решение задачи (38), (39) будем искать в виде (5).

Подставляя (5) в (38) будем иметь

$$\rho_0^1 \bar u_{0rr}^1 - \rho_0^1 \bar u_{0t}^1 + \left(\frac{m-1}{r}\rho_0^1 + \sum_{i=1}^m d_{i0}^1 \right) \bar u_{0r}^1 + \widetilde e_0^1 \bar u_0^1 +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \rho_n^k \bar u_{nrr}^k - \rho_n^k \bar u_{nt}^k + + \left(\frac{m-1}{r}\rho_n^k + \sum_{i=1}^m d_{in}^k \right) \bar u_{nr}^k + \right.$$
$$\left. + \left[\widetilde e_n^k - \lambda_n \frac{\rho_n^k}{r^2} + \sum_{i=1}^m (\widetilde d_{in-1}^k - n d_n^k) \right] \bar u_n^k \right\} = 0. \quad (40)$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\rho_0^1 \bar u_{0rr}^1 - \rho_0^1 \bar u_{0t}^1 + \frac{(m-1)}{r}\rho_0^1 \bar u_{0r}^1 = 0, \quad (41)$$

$$\rho_1^k \bar u_{1rr}^k - \rho_1^k \bar u_{1t}^k + \frac{(m-1)}{r}\rho_1^k \bar u_{1r}^k - \frac{\lambda_1}{r^2}\rho_1^k \bar u_1^k = -\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^m d_{i0}^1 \bar u_{0r}^1 + \widetilde e_0^1 \bar u_0^1 \right),$$
$$n = 1, \quad k = \overline{1, k_1}, \quad (42)$$

$$\rho_n^k \bar u_{nrr}^k - \rho_n^k \bar u_{nt}^k + \frac{(m-1)}{r}\rho_n^k \bar u_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\rho_n^k \bar u_n^k = -\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}} \left\{ \sum_{i=1}^m d_{in-1}^k \bar u_{n-1r}^k + \right.$$
$$\left. + [\widetilde e_{n-1}^k + \sum_{i=1}^m (\widetilde d_{in-2}^k - (n-1) d_{in-1}^k)] \bar u_{n-1}^k \right\}, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 2, 3, \ldots. \quad (43)$$

Суммируя уравнение (42) от 1 до k_1, а уравнение (43) — от 1 до k_n, затем сложив полученные выражения с (41), приходим к уравнению (40).

Отсюда следует, что если $\left\{ \bar u_n^k \right\}$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \ldots$ — решение системы (41)–(43), то оно является решением уравнения (40).

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (41)–(43) можно представить в виде

$$\bar{u}_{nrr}^k - \bar{u}_{nt}^k + \frac{m-1}{r}\bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k = \bar{g}_n^k(r,t), \tag{44}$$

где $\bar{g}_n^k(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $\bar{g}_0^1(r,t) \equiv 0$.

Краевое условие (39)запишется в виде

$$u_n^k(r,0) = \tau_n^k(r),\ u_n^k(1,t) = \psi_{2n}^k(t),\ k = \overline{1,k_n},\ n = 0,1,\dots. \tag{45}$$

В (44), (45) произведя замену $\bar{\omega}_n^k(r,t) = \bar{u}_n^k(r,t) - \psi_{2n}^k(t)$, получим

$$\bar{\omega}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\bar{\omega}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\omega_n^k - \bar{\omega}_{nt}^k = g_n^k(r,t), \tag{46}$$

$$\bar{\omega}_n^k(r,0) = \bar{\tau}_n^k(r),\ \bar{\omega}_n^k(1,t) = 0,\ k = \overline{1,k_n},\ n = 0,1,\dots, \tag{47}$$

$$g_n^k(r,t) = \bar{g}_n^k(r,t) + \psi_{2nt}^k + \frac{\lambda_n}{r^2}\psi_{2n}^k,\ \bar{\tau}_n^k(r) = \tau_n^k(r) - \psi_{2n}^k(0).$$

Произведя замену $\bar{\omega}_n^k(r,t) = r^{\frac{1-m}{2}}\omega_n^k(r,t)$ задачу (46), (47) приведем к следующей задаче

$$L_2\omega_n^k \equiv \omega_{nrr}^k - \omega_{nt}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\omega_n^k\tilde{g}_n^k(r,t), \tag{48}$$

$$\omega_n^k(r,0) = \tilde{\tau}_n^k(r),\ \omega_n^k(1,t) = 0,\ k = \overline{1,k_n},\ n = 0,1,\dots. \tag{49}$$

$$\tilde{g}_n^k(r,t) = r^{\frac{(m-1)}{2}}g_n^k(r,t),\ \tilde{\tau}_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{\tau}_n^k(r).$$

Решение задачи (48), (49) ищем в виде

$$\omega_n^k(r,t) = \omega_{1n}^k(r,t) + \omega_{2n}^k(r,t), \tag{50}$$

где $\omega_{1n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$L_2\omega_{1n}^k = \widetilde{g}_n^k(r,t), \tag{51}$$

$$\omega_{1n}^k(r,0) = 0,\ \upsilon_{1n}^k(1,t) = 0, \tag{52}$$

а $\omega_{2n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$L_2\omega_{2n}^k = 0, \tag{53}$$

$$\omega_{2n}^k(r,0) = \widetilde{\tau}_n^k(r),\ \omega_{2n}^k(1,t) = 0. \tag{54}$$

Решение вышеуказанных задач, рассмотрим в виде

$$\omega_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r)V_s(t), \tag{21'}$$

при этом пусть

$$\widetilde{g}_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} d_{ns}^k(t)R_s(r),\ \tilde{\tau}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} e_{ns}^k R_s(r). \tag{55}$$

Подставляя $(21')$ в (51), (52), с учетом (55), получим задачу (23), (24) решение которой имеет вид (27) и уравнение

$$V_{st} + \mu_{s,n}^2 V_s = -d_{s,n}(t), \tag{56}$$

с условием

$$V_s(0) = 0. \tag{57}$$

Решением задачи (56), (57)является [10]

$$V_{s,n}(t) = -\int\limits_0^t d_{ns}^k(\xi)\exp[-\mu_{s,n}^2(t-\xi)]d\xi. \tag{58}$$

Подставляя (26) в (43) получим

$$\begin{gathered} d_{ns}^k(t) = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int\limits_0^1 \sqrt{\xi}\tilde{g}_n^k(\xi,t)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi, \\ e_{ns}^k = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int\limits_0^1 \sqrt{\xi}\tilde{\tau}_n^k(\xi)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi,\ 0<r<1. \end{gathered} \tag{59}$$

Таким образом, из (21′), (27), (58) следует, что решением задачи (51), (52) является функция

$$\omega_{1n}^k(r,t) = -\sum_{s=1}^{\infty}\sqrt{r}\{\int\limits_0^t d_{ns}^k(\xi)\exp[-\mu_{s,n}^2(t-\xi)]d\xi\}J_\nu(\mu_{s,n}r), \tag{60}$$

где $d_{ns}^k(t)$ определяется из (59).

Далее, подставляя (21′) в (53), (54) будем иметь уравнение

$$V_{st} + \mu_{s,n}^2 V_s = 0,$$

с условием

$$V_s(0) = e_{ns}^k,$$

решением которого является

$$V_{s,n}(t) = e_{ns}^k\exp(-\mu_{s,n}^2 t). \tag{61}$$

Из (21′), (27), (60) получим

$$\omega_{2n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty}\sqrt{r}e_{ns}^k J_\nu(\mu_{s,n}r)\exp(-\mu_{s,n}^2 t), \tag{62}$$

где e_{ns}^k находится из (59).

Следовательно, сначала решив задачу (41), (45) $(n=0)$, а затем (42), (45) $(n=1)$ и т.д. найдем последовательно все $\omega_n^k(r,t)$ из (50), где $\omega_{1n}^k(r,t)$, $\omega_{2n}^k(r,t)$ определяются из (60),(62), $k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,\ldots$.

Итак, в области Ω_β имеет место

$$\int\limits_H \rho(\theta)L_2 u dH = 0. \tag{63}$$

Пусть $f(r,\theta,t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r)\in V_0,\ V_0$ — плотна в $L_2((0,1))$, $\rho(\theta)\in C^\infty(H)$ — плотна в $L_2(H)$, $T(t)\in V_1,\ V_1$ — плотна в $L_2((\beta,0))$. Тогда $f(r,\theta,t)\in V$, $V = V_0\otimes H\otimes V_1$ — плотна в $L_2(\Omega_\beta)$.

Отсюда и из (63), следует, что

$$\int\limits_{\Omega_\beta} f(r,\theta,t) L_2 u d\Omega_\beta = 0$$

и

$$L_2 u = 0, \ \forall (r,\theta,t) \in \Omega_\beta.$$

Таким образом, решением задачи 1 в областях Ω_α и Ω_β являются функции

$$\begin{cases} u(r,\theta,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{k_n} \{[\psi_{1n}^k(t) + r^{\frac{(1-m)}{2}}[\upsilon_{1n}^k(r,t) + \upsilon_{2n}^k(r,t)]\} Y_{n,m}^k(\theta), \ t > 0, \\ u(r,\theta,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{k_n} \{[\psi_{2n}^k(t) + r^{\frac{(1-m)}{2}}[\omega_{1n}^k(r,t) + \omega_{2n}^k(r,t)]\} Y_{n,m}^k(\theta), \ t < 0, \end{cases} \tag{64}$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$, $\upsilon_{2n}^k(r,t)$, определяются из (31), (35), а $\omega_{1n}^k(r,t)$, $\omega_{2n}^k(r,t)$ — из (60), (62).

Из (31), (35), (60), (62), (64) следует, что однородная задача, соответствующая задаче 1 имеет нетривиальные решения вида

$$\begin{cases} u(r,\theta,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{k_n} n^{-p} r^{\frac{(1-m)}{2}} \{\upsilon_{1n}^k(r,t) + \\ + \sum\limits_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} c_{2s}' [\operatorname{sh}\mu_{s,n} t - (th \mu_{s,n}\alpha) \operatorname{ch}\mu_{s,n} t] J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n} r)\}, \\ Y_{n,m}^k(\theta), \ t > 0, \\ u(r,\theta,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{k_n} n^{-p} r^{\frac{(1-m)}{2}} [\omega_{1n}^k(r,t) - \\ - \sum\limits_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} (c_{2s} + c_{2s}') (th \mu_{s,n}\alpha)(\exp(-\mu_{s,n}^2 t)) J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n} r)], \\ Y_{n,m}^k(\theta), \ t < 0. \end{cases} \tag{65}$$

Учитывая формулу [11] $2J_\nu'(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)$, оценки ([13, 7])

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + 0\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right), \ \nu \geq 0,$$

$$|k_n| \leq c_1 n^{m-2}, \ \left|\frac{\partial^q}{\partial\theta_j^q} Y_{n,m}^k(\theta)\right| \leq c_2 n^{\frac{m}{2}-1+q}, \ j = \overline{1, m-1}, \ q = 0, 1, \ldots,$$

а также леммы, ограничения на заданные функций $\varphi(r,\theta)$, $\psi_1(t,\theta)$, $\psi_2(t,\theta)$, аналогично [8], можно показать, что полученные решения (64), (65) принадлежат искомому классу $C(\bar{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$, если $p > \dfrac{3m}{2}$.

Теоремы доказаны.

Литература

1. Фикера Г. К единой теории краевых задач для эллиптико-параболических уравнений второго порядка: Сб. переводов. Математика. — 1963. — Т. 7, №6, — С. 99–121.

2. Врагов В. Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики — Новосибирск: НГУ, 1983. — 84 с.
3. Олейник О. А. Радкевич Е. В. Уравнения с неотрицательной характеристической формой — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2010. — 360 с.
4. Алдашев С. А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для вырождающихся многомерных эллиптических уравнений // Мат. заметки. — 2013. — Т. 94, вып. 6 — С. 936–939. DOI: 10. 4213/mzm9134.
5. Алдашев С. А. Неединственность решения задачи Трикоми для многомерного гиперболо-параболического уравнения // Дифференциальные уравнения. — 2014. — Т. 50, №4. — С. 544–548. DOI: 10. 1134/S0374064114040128.
6. Алдашев С. А. Корректность локальой краевой задачи в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2015. — Т. 15, вып. 4 — С. 365–371. DOI: 10. 18500/1816-9791-2015-15-4-365-371.
7. Михлин С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения — М.: Физматгиз, 1962. — 254 с.
8. Алдашев С. А. Некорректность смешанной задачи для многомерного эллиптико-параболического уравнения // Мат. заметки ЯГУ, Якутск. — 2011. — Т. 18, вып. 2 — С. 11–20.
9. Алдашев С. А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений — Алматы: Гылым, 1994. — 170 с.
10. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям — М.: Наука, 1965. — 703 с.
11. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2, — М.: Наука, 1974. — 295 с.
12. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа — М.: Наука, 1976. — 543 с.
13. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики — М.: Наука, 1977. — 659 с.

Поступила 20.01.2016