УДК 517.929.4
MSC 93D05

ESTIMATES OF CONVERGENCE OF SOLUTIONS OF NONLINEAR SYSTEMS OBTAINED VIA THE SECOND METHOD OF LYAPUNOV"

Irada Dzhalladova[1], Sergey Kamratov[2], 3. Denys Khusainov[3]

[1]Vadim Getman National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, E-mail: dzhalladova@gmail.com.
[2]Faculty of Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, E-mail: sergey.kamratov@gmail.com.
[3]Faculty of Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, E-mail: dkh@mail.unicyb.kiev.ua.

ОЦЕНКИ СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ, ПОЛУЧЕННЫЕ ВТОРЫМ МЕТОДОМ ЛЯПУНОВА"

И. А. Джалладова[1], С. В.Камратов[2], Д. Я. Хусаинов [3]

[1]Киевский национальный экономический университет имени Вадима Гетьмана, Киев, Украина, E-mail: dzhalladova@gmail.com.
[2]Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина, E-mail: sergey.kamratov@gmail.com.
[3]Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина, E-mail: dkh@mail.unicyb.kiev.ua.

Abstract. One of the main requirements for the mathematical models of dynamic systems, stability is studied trajectories. At the same time, the establishment only one fact of stability often happens insufficiently. So for linear time-invariant systems with all upper triangular matrix eigenvalues are the diagonal elements and asymptotic stability depends on them. But for large off-diagonal elements there are «strong emissions» solutions and can move away from its equilibrium position is strong enough.

Thus, at research of systems is important not so much the finding of stability, how to obtain quantitative estimates of the behavior of solutions, in particular, to obtain estimates of convergence solutions to the equilibrium position.

In the article linear stationary systems are considered. Evaluation of convergence of decisions to zero position of balance is received with use of a method of square-law functions of Lyapunov, symmetric positively certain which matrix is received at the decision of the matrix equation of Lyapunov. Systems with square-law nonlinearity of a general view are considered. In the assumption of asymptotic stability of a matrix of a linear part the assessment of area of stability and convergence of decisions with initial data from this area is received. Finally, we consider linear systems are asymptotically stable linear part and a uniform nonlinearity general form. As for systems

with quadratic right-hand side, estimate of the area of stability and convergence solutions with initial data from this area.
KEYWORDS: differential equations, stability, Lyapunov function method, convergence, solutions, matrix equation.

РЕЗЮМЕ. Одним из основных требований, предъявляемых к математическим моделям динамических систем, является устойчивость исследуемых траекторий движения. В то же время установление лишь одного факта устойчивости часто бывает недостаточно. Так для линейных стационарных систем с верхнетреугольной матрицей все собственные числа равны диагональным элементам и асимптотическая устойчивость зависит только от них. Но при больших внедиагональных элементах имеют место «сильные выбросы» и решения могут уходить от положения равновесия достаточно сильно.

Таким образом, при исследовании систем важным является не столько установление факта устойчивости, сколько получение количественных оценок поведения решений, в частности, получение оценок сходимости решений к положению равновесия.

В статье рассмотрены линейные стационарные системы. Оценка сходимости решений к нулевому положению равновесия получена с использованием метода квадратичных функций Ляпунова, симметричная положительно определенная матрица которых получена при решении матричного уравнения Ляпунова. Рассмотрены системы с квадратичной нелинейностью общего вида. В предположении асимптотической устойчивости матрицы линейной части получена оценка области устойчивости и сходимости решений с начальными данными из этой области. Наконец, рассмотрены линейные системы с асимптотически устойчивой линейной частью и однородной нелинейностью общего вида. Как и для систем с квадратичной правой частью, получена оценка области устойчивости и сходимости решений с начальными данными из этой области.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: дифференциальные уравнения, устойчивость, метод функций Ляпунова, сходимость, решения, матричное уравнение.

Введение

Одним из основных требований, предъявляемых к математическим моделям динамических систем, является устойчивость исследуемых траекторий движения. В то же время установление лишь одного факта устойчивости часто бывает недостаточно. Например, все решения линейной системы двух дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = -x + \alpha y, \ \dot{y} = -y$$

всегда устойчивы при произвольном значении параметра α. Они сходятся к нулевому положению равновесия по экспоненциальному закону. Однако их сходимость зависит от параметра α. Нетрудно видеть, что при $\alpha = 0$

решение имеет вид $x(t) = x(0)\,e^{-t}$, $y(t) = y(0)\,e^{-t}$. И все решения, независимо от начальных условий, монотонно стремятся к нулевому положению равновесия. При $\alpha \neq 0$ решение задачи Коши $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ имеет вид $x(t) = (x_0 + ay_0 t)\,e^{-t}$, $y(t) = y_0 e^{-t}$. При $\alpha > 2$ в момент времени

$$t_1 = \frac{x_0^2 + y_0^2 - ax_0 y_0}{2ax_0 y_0}$$

имеет место «выброс тректории» и его максимальное значение имеет вид

$$x(t_1) = x(0)\,e^{-t_1}, \;\; y(t_1) = (x_0 + dy_0 + t_1)\,e^{-t_1}.$$

Таким образом, при исследовании систем важным является не столько установление факта устойчивости, сколько получение количественных оценок поведения решений, в частности, получение оценок сходимости решений к положению равновесия.

1. Линейные стационарные системы

Для линейных стационарных систем

$$\dot{x} = Ax \tag{1}$$

оценку сходимости решений можно получить с использованием метода квадратичных функций Ляпунова [1–2]. Функция Ляпунова берется в виде квадратичной формы $V(x) = x^T H x$, где H — симметричная положительно определенная матрица [3]. Для квадратичной формы имеет место двусторонняя оценка [4,5]

$$\lambda_{\min}(H)\,|x|^2 \leq V(x) \leq \lambda_{\max}(H)\,|x|^2 . \tag{2}$$

Здесь $\lambda_{\min}(H)$, $\lambda_{\max}(H)$ — экстремальные собственные числа симметричной, положительно определенной матрицы H, под векторной и матричной нормами понимаются

$$|x(t)| = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i^2(t) \right\}^{1/2}, \;\; |B| = \left\{ \lambda_{\max}\left(B^T B\right) \right\}^{1/2}.$$

Полная производная функции Ляпунова в силу системы (1) имеет вид

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = x^T(t)\left(A^T H + HA\right) x(t) .$$

Известно [4,5], если матрица A асимптотически устойчива, т.е. все ее собственные числа имеют отрицательные действительные части $Re\lambda_i(A) < 0$, $i = \overline{1,n}$, то матричное уравнение Ляпунова

$$A^T H + HA = -C \tag{3}$$

имеет единственное решение — положительно определенную матрицу H при произвольной положительно определенной матрице C. Используя матричное уравнение (3) для оценки полной производной функции Ляпунова, получаем линейное неравенство

$$\frac{d}{dt}V\left(x\left(t\right)\right) \le -\frac{\lambda_{\min}\left(C\right)}{\lambda_{\max}\left(H\right)}V\left(x\left(t\right)\right).$$

Его решением будет

$$V\left(x\left(t\right)\right) \le V\left(x\left(0\right)\right)\exp\left\{-\frac{\lambda_{\min}\left(C\right)}{\lambda_{\max}\left(H\right)}t\right\}.$$

И, вновь используя двусторонние неравенства (2), для произвольного решения $x\left(t\right)$ системы (1) получаем следующую оценку сходимости

$$\begin{gathered}\left|x\left(t\right)\right| \le \left|x\left(0\right)\right|\varphi\left(H\right)\exp\left\{-\frac{1}{2}\psi\left(H\right)t\right\},\\ \varphi\left(H\right)=\sqrt{\tfrac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}},\ \ \psi\left(H\right)=\tfrac{\lambda_{\min}\left(-A^TH-HA\right)}{\lambda_{\max}(H)}.\end{gathered} \tag{4}$$

Возможен иной подход. Функция Ляпунова берется в неавтономном виде

$$V\left(x,t\right)=e^{\gamma t}x^THx, \quad \gamma \ge 0.$$

Для нее двусторонние оценки имеют вид

$$e^{\gamma t}\lambda_{\min}\left(H\right)\left|x\right|^2 \le V\left(x,t\right) \le e^{\gamma t}\lambda_{\max}\left(H\right)\left|x\right|^2. \tag{5}$$

Ее полная производная имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V\left(x\left(t\right),t\right) &= \gamma e^{\gamma t}x^T\left(t\right)Hx\left(t\right)+e^{\gamma t}x^T\left(t\right)\left(A^TH+HA\right)x\left(t\right)=\\ &= \gamma e^{\gamma t}x^T\left(t\right)Hx\left(t\right)-e^{\gamma t}x^T\left(t\right)Cx\left(t\right).\end{aligned}$$

Используя неравенство (5), получаем

$$\frac{d}{dt}V\left(x\left(t\right),t\right) \le \gamma V\left(x\left(t\right),t\right)-e^{\gamma t}\lambda_{\min}\left(C\right)\left|x\left(t\right)\right|^2 \le \left[\gamma-\frac{\lambda_{\min}\left(C\right)}{\lambda_{\max}\left(H\right)}\right]V\left(x\left(t\right),t\right).$$

Решая полученное дифференциальное неравенство, имеем

$$V\left(x\left(t\right),t\right) \le V\left(x\left(0\right),0\right)\exp\left\{-\left[\frac{\lambda_{\min}\left(C\right)}{\lambda_{\max}\left(H\right)}-\gamma\right]t\right\}.$$

Вновь используя неравенство (5), имеем

$$e^{-\gamma t}\lambda_{\min}\left(H\right)\left|x\left(t\right)\right|^2 \le \lambda_{\max}\left(H\right)\left|x\left(0\right)\right|\exp\left\{-\left[\frac{\lambda_{\min}\left(C\right)}{\lambda_{\max}\left(H\right)}-\gamma\right]t\right\}.$$

Отсюда вновь получаем неравенство (4)

$$\left|x\left(t\right)\right| \le \left|x\left(0\right)\right|\varphi\left(H\right)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\psi\left(H\right)-\gamma\right]t\right\}, \ \ \gamma \ge 0. \tag{6}$$

При $\gamma=0$ оценка сходимости (6) совпадает с неравенством (5).

В частности, если матрица A не является асимптотически устойчивой, то в качестве H можно брать любую положительно определенную матрицу. А выбрав $\gamma<0$ таким образом, чтобы $C\left(\gamma\right)=\gamma H-A^TH-HA$ была отрицательно определенной, получим оценку «расходимости» решений системы (1.1).

2. Квадратичные системы

Рассмотрим систему с квадратичной правой частью, записанную «в универсальной векторно-матричной форме» [6,7].

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + X^T(t)\,Bx(t)\,. \tag{7}$$

Здесь $B = [B_1, B_2, ..., B_n]^T$ — прямоугольная $n^2 \times n$-матрица, состоящая из симметричных квадратных $n \times n$-матриц B_i, $i = \overline{1,n}$,

$$B_i = \begin{bmatrix} b_{11}^i & b_{12}^i & \dots & b_{1n}^i \\ b_{12}^i & b_{22}^i & \dots & b_{2n}^i \\ . & . & \dots & . \\ b_{1n}^i & b_{2n}^i & \dots & b_{nn}^i \end{bmatrix}, \quad i = \overline{1,n},$$

$X^T(t) = [X_1(t)\,, X_2(t)\,, ..., X_n(t)]$ — прямоугольная $n \times n^2$ — матрица, состоящая из квадратных $n \times n$-матриц $X_i(t)$, у которых на $i - x$ строках стоят векторы $x(t)$, остальные элементы нулевые, т.е.

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

$$X_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

$$\dots,$$

$$X_n(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \end{bmatrix}.$$

Отдельные результаты по асимптотической устойчивости с использованием второго метода Ляпунова были получены в работах [8,9]. В [10] рассматривались проблемы сходимости решений систем с запаздыванием, в работах [11, 12] — вопросы устойчивости и неустойчивости квадратичных систем специального вида.

Пусть матрица A линейной части системы (7) асимптотически устойчивая. Тогда, как следует из теории про устойчивость по линейному приближению, нулевое решение нелинейной системы будет локально асимптотически устойчивым, т.е. существует область $U_\delta(x)$, содержащая начало координат, такая, что все решения $x(t)$ системы (7) с условиями $x(0) \in U_\delta(x)$ при $t \to +\infty$ будут стремиться к нулевому положению равновесия. Если брать в качестве функции Ляпунова квадратичную форму $V(x) = x^T Hx$, то ее полная производная в силу системы (7) имеет вид

$$\frac{d}{dt}V\left(x\left(t\right)\right)=\left[Ax\left(t\right)+X^{T}\left(t\right)Bx\left(t\right)\right]^{T}Hx\left(t\right)+$$
$$+x^{T}\left(t\right)H\left[Ax\left(t\right)+X^{T}\left(t\right)Bx\left(t\right)\right]=$$
$$=x^{T}\left(t\right)\left[\left(A^{T}H+HA\right)+\left(B^{T}X\left(t\right)H+HX^{T}\left(t\right)B\right)\right]x\left(t\right).$$

Если матрица A является асимптотически устойчивой, то для произвольной положительно определенной матрицы C матричное уравнение Ляпунова (3) имеет единственное решение — положительно определенную матрицу H. Учитывая это, получаем

$$\frac{d}{dt}V\left(x\left(t\right)\right)=-x^{T}\left(t\right)\left[C-\left(B^{T}X\left(t\right)H+HX^{T}\left(t\right)B\right)\right]x\left(t\right). \qquad (8)$$

Областью устойчивости нулевого положения равновесия является внутренность поверхности уровня функции Ляпунова $V\left(x\right)=r>0$, лежащая внутри области

$$G_{0}=\left\{x\in R^{n}:C-B^{T}XH-HX^{T}B>\Theta\right\},$$

где под символом

$$C-B^{T}XH-HX^{T}B>\Theta \qquad (9)$$

понимается положительная определенность матрицы. Заменим условие (9) более «грубым». Поскольку в силу выбранных матричных и векторных норм будет выполняться

$$\left|X\left(t\right)\right|=\left|x\left(t\right)\right|,$$

то для полной производной функции Ляпунова будет справедливым

$$\frac{d}{dt}V\left(x\left(t\right)\right)\leq-\left[\lambda_{\min}\left(C\right)-2\left|H\right|\left|B\right|\left|x\left(t\right)\right|\right]\left|x\left(t\right)\right|^{2}. \qquad (10)$$

Обозначим

$$G_{0}=\left\{x\in R^{n}:\left|x\right|<\frac{\lambda_{\min}\left(C\right)}{2\left|H\right|\left|B\right|}\right\}. \qquad (11)$$

Для симметричных положительно определенных матриц H справедливо

$$\left|H\right|=\lambda_{\max}\left(H\right).$$

Поэтому

$$G_{0}=\left\{x\in R^{n}:\left|x\right|<\frac{1}{2}\frac{\psi\left(H\right)}{\left|B\right|}\right\}.$$

Тогда область «гарантированной» устойчивости имеет вид

$$G_{r_{0}}=\max_{r>0}\left\{G_{r}:G_{r}\subset G_{0}\right\},\ \ G_{r}=\left\{x\in R^{n}:x^{T}Hx<r^{2}\right\}. \qquad (12)$$

Как следует из этой зависимости, для определения «максимальной» области устойчивости следует поместить эллисоид $x^{T}Hx=r^{2}$ внутрь сферы радиуса $R=\psi\left(H\right)/2\left|B\right|$ и «растягивать» $r\to\infty$ до тех пор, пока эллипс не коснется сферы.

Получим оценки сходимости решений в этой области.

Теорема 1. *Пусть матрица линейной части системы (7) асимптотически устойчива. Тогда нулевое решение системы также асимптотически устойчиво и для ее решений, удовлетворяющих начальным условиям* $x(0) \in G_{r_0}$, *справедлива следующая оценка сходимости*

$$|x(t)| \le \frac{\psi(H)\,|x(0)|}{\left[\psi(H) - 2\,|B|\,\varphi(H)\,|x(0)|\right] e^{\frac{1}{2}\psi(H)t} + 2\,|B|\,\varphi(H)\,|x(0)|}. \tag{13}$$

Доказательство. Оценку сходимости решений, находящихся в области устойчивости, будем получать с использованием квадратичной функции Ляпунова

$V(x) = x^T H x$. Ее полная производная в силу системы имеет вид (10). Поскольку для квадратичной функции $V(x) = x^T H x$ имеет место двустороннее неравенство (2), то неравенство (10) можно переписать в виде

$$\frac{dV(x(t))}{dt} \le -\frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)} V(x(t)) + 2\lambda_{\max}(H)\,|B|\,\frac{V^{\frac{3}{2}}(x(t))}{\lambda_{\min}^{\frac{3}{2}}(H)}. \tag{14}$$

Перепишем полученное выражение в виде

$$\frac{dV(x(t))}{dt} + \psi(H)\,V(x(t)) \le 2\frac{|B|\,\varphi(H)}{\sqrt{\lambda_{\min}(H)}} V^{\frac{3}{2}}(x(t)).$$

Разделим его на $V^{\frac{3}{2}}(x)$ и получим

$$V^{-\frac{3}{2}}(x(t))\,\frac{dV(x(t))}{dt} + \psi(H)\,V^{-\frac{1}{2}}(x(t)) \le 2\frac{|B|\,\varphi(H)}{\sqrt{\lambda_{\min}(H)}}.$$

Обозначив $V^{-\frac{1}{2}}(x(t)) = z(t)$, получим

$$-2\frac{dz(t)}{dt} \le -\psi(H)\,z(t) + 2\frac{|B|\,\varphi(H)}{\sqrt{\lambda_{\min}(H)}}.$$

Отсюда

$$\frac{dz(t)}{dt} - \frac{1}{2}\psi(H)\,z(t) \ge -\frac{|B|\,\varphi(H)}{\sqrt{\lambda_{\min}(H)}}.$$

Решая полученное неравенство (по аналогии с линейным неоднородным уравнением Бернулли), получим

$$z(t) \ge \left[z(0) - 2\frac{|B|\,\varphi(H)}{\psi(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}}\right] e^{\frac{1}{2}\psi(H)t} + 2\frac{|B|\,\varphi(H)}{\psi(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}}.$$

Подставив $V^{-\frac{1}{2}}(x(t)) = z(t)$, получим

$$V^{-\frac{1}{2}}(x(t)) \ge \left[V^{-\frac{1}{2}}(x(0)) - 2\frac{|B|\,\varphi(H)}{\psi(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}}\right] e^{\frac{1}{2}\psi(H)t} + $$
$$+ 2\frac{|B|\,\varphi(H)}{\psi(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}}.$$

Отсюда

$$V^{-\frac{1}{2}}(x(t)) \leq$$

$$\leq \left\{ \left[V^{-\frac{1}{2}}(x(0)) - 2\frac{|B|\,\varphi(H)}{\psi(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}} \right] e^{\frac{1}{2}\psi(H)t} + 2\frac{|B|\,\varphi(H)}{\psi(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}} \right\}^{-1}.$$

Вновь используя двусторонние неравенства квадратичных форм, получаем

$$\sqrt{\lambda_{\min}(H)}\,|x(t)| \leq$$

$$\leq \left\{ \left[\frac{1}{\sqrt{V(x(0))}} - 2\frac{|B|\,\varphi(H)}{\psi(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}} \right] e^{\dfrac{1}{2}\psi(H)t} + 2\frac{|B|\,\varphi(H)}{\psi(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}} \right\}^{-1} \leq$$

$$\leq \left\{ \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}(H)}\,|x(0)|} - 2\frac{|B|\,\varphi(H)}{\psi(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}} \right] e^{\frac{1}{2}\psi(H)t} + 2\frac{|B|\,\varphi(H)}{\psi(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}} \right\}^{-1} =$$

$$= \frac{\psi(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}\,|x(0)|}{\left[\psi(H) - 2\,|B|\,\varphi(H)\,|x(0)|\right] e^{\frac{1}{2}\psi(H)t} + 2\,|B|\,\varphi(H)\,|x(0)|}.$$

Таким образом, для решений $x(t)$ системы (7) с начальными условиями, находящимися в области (2.6), т. е. $x_0 \in G_0$, будет справедлива оценка сходимости (14). □

Замечание 1. Рассмотрим скалярное уравнение

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + bx^2(t)\,, a > 0.$$

Это уравнение является уравнением первого порядка с разделяющимися переменными. Его непосредственным решением является

$$x(t) = \frac{ax(0)\,e^{-at}}{a - bx(0)\left[1 - e^{-at}\right]}.$$

Рассмотрим использование метода функций Ляпунова с $V(x) = x^2$. Для нее $\lambda_{\max}(H) = \lambda_{\min}(H) = 1$. Полная производная в силу линейной части имеет вид

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = -2ax^2(t)\,.$$

Поэтому $\varphi(H) = 1$, $\psi(H) = 2a$. Оценка сходимости (9) для решений с начальными условиями $|x(0)| < a/b$ имеет вид

$$|x(t)| \leq \frac{a\,|x(0)|}{\left[a - |b|\,|x(0)|\right] e^{at} + |b|\,|x(0)|} = \frac{a\,|x(0)|\,e^{-at}}{a - |b|\,|x(0)|\left[1 - e^{-at}\right]} \to 0.$$

Таким образом, для скалярного уравнения точное решение совпадает с оценкой, данной квадратичной функцией Ляпунова.

3. Нелинейные системы общего вида

Рассмотрим нелинейные системы общего вида

$$\dot{x} = Ax + R(x). \tag{15}$$

Полная производная квадратичной функции Ляпунова в силу системы (15) имеет вид

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = x^T(t)\left(A^T H + HA\right)x(t) + 2x^T(t)\,HR(x(t)).$$

Пусть векторная функция $R(x)$ более высокого порядка, чем первый, и удовлетворяет условию $|R(x)| \le N|x|^{1+\alpha}$, $N > 0$, $\alpha > 1$. Тогда получаем

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \le -\lambda_{\min}(C)|x(t)|^2 + 2\lambda_{\max}(H)\,N\,|x(t)|^{2+\alpha}.$$

Предварительно получим оценку области устойчивости. Как и для систем с квадратичной правой частью, запишем

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \le -\left[\lambda_{\min}(C) - 2\lambda_{\max}(H)\,N\,|x(t)|^{\alpha}\right]|x(t)|^2.$$

И в шаре

$$G_\alpha = \left\{x \in R^n : |x| < \left(\frac{\lambda_{\min}(C)}{2\lambda_{\max}(H)\,N}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}$$

полная производная будет отрицательно определенной. А гарантированная область асимптотической устойчивости имеет вид

$$G_{r_\alpha} = \max_{r>0}\{G_r : G_r \subset G_\alpha\},\, G_r = \left\{x \in R^n : x^T Hx < r^2\right\}.$$

Получим оценку сходимости решений, начальные условия которых находятся в области устойчивости. Вновь используя неравенства квадратичных форм (2), получаем

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \le -\frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)}V(x(t)) + 2\lambda_{\max}(H)\,N\left(\frac{V(x(t))}{\lambda_{\min}(H)}\right)^{1+\frac{1}{2}\alpha}.$$

Таким образом, получаем неравенство «типа уравнения Бернулли»

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) + \psi(H)\,V(x(t)) \le 2\frac{N\varphi(H)}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}\alpha}(H)}V^{1+\frac{\alpha}{2}}(x(t)).$$

Разделив на $V^{\frac{1}{2}+\alpha}(x(t))$, получим

$$V^{-\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)}(x(t))\frac{d}{dt}V(x(t)) + \psi(H)\,V^{-\frac{\alpha}{2}}(x(t)) \le 2\frac{N\varphi(H)}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}\alpha}(H)}.$$

Сделав замену $V^{-\frac{\alpha}{2}}(x(t)) = z(t)$, получим дифференциальное неравенство

$$-\frac{2}{\alpha}\frac{d}{dt}z(t) + \psi(H)\,z(t) \le 2\frac{N\varphi(H)}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}\alpha}(H)}.$$

Перепишем его в виде

$$\frac{d}{dt}z(t) - \frac{\alpha}{2}\psi(H)\,z(t) \geq -\frac{\alpha N\varphi(H)}{\lambda_{\min}^{\frac{\alpha}{2}}} - \alpha\lambda_{\min}^{-\frac{\alpha}{2}}(H)\,N\varphi(H)\,.$$

Его решение будет

$$z(t) \geq \left[z(0) - 2\frac{N\varphi(H)}{\psi(H)\,\lambda_{\min}^{\frac{\alpha}{2}}(H)}\right]e^{\frac{\alpha}{2}\psi(H)\varepsilon} + 2\frac{N\varphi(H)}{\psi(H)\,\lambda_{\min}^{\frac{\alpha}{2}}(H)}.$$

Подставив $z(t) = V^{-\frac{\alpha}{2}}(x(t))$, получим

$$V^{-\frac{\alpha}{2}}(x(t)) \geq \left[V^{-\frac{\alpha}{2}}(x(0)) - 2\frac{N\varphi(H)}{\psi(H)\,\lambda_{\min}^{\frac{\alpha}{2}}(H)}\right]e^{\frac{\alpha}{2}\psi(H)t} + 2\frac{N\varphi(H)}{\psi(H)\,\lambda_{\min}^{\frac{\alpha}{2}}(H)}.$$

Отсюда

$$V^{\frac{\alpha}{2}}(x(t)) \leq$$
$$\leq \left\{\left[V^{-\frac{\alpha}{2}}(x(0)) - 2\frac{N\varphi(H)}{\psi(H)\,\lambda_{\min}^{\frac{\alpha}{2}}(H)}\right]e^{\frac{\alpha}{2}\psi(H)t} + 2\frac{N\varphi(H)}{\psi(H)\,\lambda_{\min}^{\frac{\alpha}{2}}(H)}\right\}^{-1}.$$

Вновь используя двусторонние неравенства квадратичных форм, получаем

$$\left\{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(H)\,|x(t)|\right\}^{\alpha} \leq$$
$$\leq \left\{\left[\frac{1}{V^{\frac{\alpha}{2}}(x(0))} - 2\frac{N\varphi(H)}{\psi(H)\,\lambda_{\min}^{\frac{\alpha}{2}}(H)}\right]e^{\frac{\alpha}{2}\psi(H)t} + 2\frac{N\varphi(H)}{\psi(H)\,\lambda_{\min}^{\frac{\alpha}{2}}(H)}\right\}^{-1} \leq$$
$$\leq \left\{\left[\frac{1}{\lambda_{\min}^{\frac{\alpha}{2}}(H)\,|x(0)|^{\alpha}} - 2\frac{N\varphi(H)}{\psi(H)\,\lambda_{\min}^{\frac{\alpha}{2}}(H)}\right]e^{\frac{\alpha}{2}\psi(H)t} + 2\frac{N\varphi(H)}{\psi(H)\,\lambda_{\min}^{\frac{\alpha}{2}}(H)}\right\}^{-1} =$$
$$= \frac{\psi(H)\,\lambda_{\min}^{\frac{\alpha}{2}}(H)\,|x(0)|}{[\psi(H) - 2N\varphi(H)\,|x(0)|]\,e^{\frac{\alpha}{2}\psi(H)t} + 2N\varphi(H)\,|x(0)|}.$$

Отсюда, для решений $x(t)$ системы (15) с начальными условиями, находящимися в $x_0 \in G_0$, будет справедлива оценка сходимости (14)

$$|x(t)| \leq \left\{\frac{\psi(H)\,|x(0)|}{[\psi(H) - 2N\varphi(H)\,|x(0)|]\,e^{\frac{\alpha}{2}\psi(H)t} + 2N\varphi(H)\,|x(0)|}\right\}^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Замечание 2. При $\alpha = 1$ получаем оценки систем с квадратичной правой частью.

Литература

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения — Москва: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950. — 472 с.
2. Барбашин Е. А. Функции Ляпунова — Москва: Наука, 1970. — 240 с.
3. Валеев К. Г. Валеев К. Г., Финин Г. С. Построение функций Ляпунова — К.: Наукова думка, 1981. — 412 с.
4. Гантмахер Ф. Р. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц — Москва: Наука, 1966. — 576 с.
5. Беллман Р. Беллман Р. Введение в теорию матриц — Москва, 1976. — 351 с.
6. Хусаінов Д. Я., Джалладова І. А., Шатирко О. А. Оцінка області стійкості диференціальної системи з квадратичною правою частиною // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки. — 2011. — В. 3. — С. 227–230.
7. Джалладова И. А., Хусаинов Д. Я. Квадратичные системы с запаздыванием // Проблемы управления и информатики. — 2013. — № 1. — С. 5–13.
8. Khusainov D., Agarwal R. P., Davidov V. Stability and Estimates for the Convergence of Solutions for Systems Involving Quadratic Terms with Constant Deviating Arguments // Computers and Mathematics with Applications. — 1999. — V. 38. — P. 141–149.
9. Davidov V., Khusainov D. Stability Investigation of Quadratic Systems with Delay // Journal of Applied Mathematic and Analysis. — 2000. — 13:1. — P. 85–92.
10. Diblik J., Khusainov D. Ya., Smarda Z. Construction of the General Solution of Planar Linear Discrete Systems with Constant Coefficients and Weak Delay // Hindawi Publishing Comporation. Advances in Difference Equations. — V. 2009. — Article ID 784935. — 18 pages. — doi: 10.1155/2009/784935.
11. Diblik J., Khusainov D. Ya., Grytsay I. V., Zmarda Z. Stability of Nonlinear Autonomous Quadratic Discrete Systems in the Critical Case // Hindawi Publishing Corporation. Discrete Dynamics in Nature and Science. — V. 2010. — Article ID 539087. — 23 pages. — doi: 10.1155/2010/539087.
12. Khusainov D. Ya., Diblik J., Svoboda Z., Smarda Z. Instable Trivial Solution of Autonomous Differential Systems with Quadratic Right-Hand Sides in a Cone // Hindawi Publishing Comporation. Abstract and Applied Analysis. — V. 2011. — Article ID 154916. — 23 pages. — doi: 10.1155/2011/151916.
13. Martinyuk A. A., Khusainov D. Y., Chernienko A. N. Integral Estimates of Solutions to Nonlinear Systemsand their Applications // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. — 2016. — V. 16 (1). — P. 1–11.

Надійшла 02.03.2016