Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2016, №1(121) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.6
MSC 65M22

APPLICATION DS-ALGORITHM TO THE SOLUTION OF INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF TRANSFER

Ganna Zagorodnia

Faculty of Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, E-mail: anna.zagorodnia@gmail.com.

ЗАСТОСУВАННЯ ДС-АЛГОРИТМУ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ПЕРЕНОСУ

Г. О. Загородня

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна, E-mail: anna.zagorodnia@gmail.com.

Abstract. We consider a modification of DS-algorithm for constructing numerical solution of parabolic equations without mixed second order derivatives. Investigated the existence of a single solution system of difference equations. Established that the approximation error has the second order. The advantage of the algorithm to the implicit differences scheme is that at each time step is not required to solve large systems of algebraic equations.
Keywords: parabolic equation, DS-algorithm, approximation error, the existence of solution.

Резюме. У роботі запропоновано модифікацію ДС - алгоритму для побудови чисельного розв'язку систем параболічних рівнянь другого порядку без мішаних похідних. Досліджено існування єдиного розв'язку системи різницевих рівнянь. Встановлено, що похибка апроксимації має другий порядок. Перевагою алгоритму перед неявними різницевими схемами є те, що на кожному часовому кроці не потрібно розв'язувати великі системи алгебраїчних рівнянь.
Ключові слова: параболічні рівняння, ДС-алгоритм, похибка апроксимації.

Вступ

Використання методів математичного моделювання в нових областях науки і технологій ставить задачу розробки ефективних методів дослідження нових моделей. Зокрема, виникають нові постановки задач в галузі нелінійної оптики [1], біоінформатики [2], перенесення теплового випромінювання та енергії [3] тощо, які приводять до систем рівнянь конвекції дифузії. Незважаючи на великий вклад, внесений провідними вченими-математиками

О.А. Самарським [4], Г.І.Марчуком [5], М.М. Яненком [6] та їх учнями, проблеми побудови розв'язків таких задач ще існують. У даній роботі запропоновано модифікацію ДС-алгоритму [7] для побудови розв'язку початково-крайових задач переносу. Цей алгоритм, як і всі неявні, безумовно стійкий. Але при його використанні не виникає потреби на кожному часовому кроці розв'язувати систему алгебраїчних рівнянь високого порядку, рівного кількості усіх вузлових точок області.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ

В області $\Omega = \Omega_{h\tau} \times [0, T]$ при заданих початкових та крайових умовах розглянемо систему рівнянь переносу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = L^{(1)}(u, v), \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t} = L^{(2)}(u, v), \end{cases} \tag{1}$$

де

$$L^{(1)}(u, v) = -k_{11}\frac{\partial u}{\partial x} - k_{12}\frac{\partial u}{\partial y} - k_{13}\frac{\partial v}{\partial x} - k_{14}\frac{\partial v}{\partial y} + \alpha_{11}\Delta u + \alpha_{12}\Delta v,$$

$$L^{(2)}(u, v) = -k_{21}\frac{\partial u}{\partial x} - k_{22}\frac{\partial u}{\partial y} - k_{23}\frac{\partial v}{\partial x} - k_{24}\frac{\partial v}{\partial y} + \alpha_{21}\Delta u + \alpha_{22}\Delta v$$

та $k_{ij}^n = k(x_i, y_j, t_n)$.
На області $\Omega = \Omega_{h\tau} \times [0, T]$ вводиться рівномірна сітка

$$\Omega_{h\tau} = \left\{(x_i, y_j, t_n)\,,\ i = \overline{0, N_x}, j = \overline{0, N_y}, n = \overline{0, N_t}\right\},$$

яка розбивається на підмножини $\Omega_1 = \{(x_i, y_j, t_n)\,|\,(i + j + n)\, mod\, 2 = 0\}$ та $\Omega_2 = \{(x_i, y_j, t_n)\,|\,(i + j + n)\, mod\, 2 = 1\}$. Розв'язок задачі спочатку знаходимо в точках сітки ${\Omega_1}^{2n+1}$ за явними різницевими схемами ДС-алгоритму:

$$\begin{cases} u^{2n+1} = u^{2n} + \tau L_h^{(1)}(u^{2n}, v^{2n}), \\ v^{2n+1} = v^{2n} + \tau L_h^{(2)}(u^{2n}, v^{2n}), \end{cases}$$

де $L_h^{(1)}$ та $L_h^{(2)}$ — 5-точкові різницеві оператори, що апроксимують $L^{(1)}$ та $L^{(2)}$ відповідно

$$L_h^{(1)}(u^{2n}, v^{2n}) = -k_{11}\frac{u_{i+1j}^{2n} - u_{i-1j}^{2n}}{2h_x} - k_{12}\frac{u_{ij+1}^{2n} - u_{ij-1}^{2n}}{2h_y} - k_{13}\frac{v_{i+1j}^{2n} - v_{i-1j}^{2n}}{2h_x} -$$

$$-k_{14}\frac{v_{ij+1}^{2n} - v_{ij-1}^{2n}}{2h_y} + \alpha_{11}\left(\frac{u_{i+1j}^{2n} - 2u_{ij}^{2n} + u_{i-1j}^{2n}}{h_x^2} + \frac{u_{ij+1}^{2n} - 2u_{ij}^{2n} + u_{ij-1}^{2n}}{h_y^2}\right) +$$

$$+\alpha_{12}\left(\frac{v_{i+1j}^{2n} - 2v_{ij}^{2n} + v_{i-1j}^{2n}}{h_x^2} + \frac{v_{ij+1}^{2n} - 2v_{ij}^{2n} + v_{ij-1}^{2n}}{h_y^2}\right),$$

$$L_h^{(2)}(u^{2n}, v^{2n}) = -k_{21}\frac{u_{i+1j}^{2n} - u_{i-1j}^{2n}}{2h_x} - k_{22}\frac{u_{ij+1}^{2n} - u_{ij-1}^{2n}}{2h_y} - k_{23}\frac{v_{i+1j}^{2n} - v_{i-1j}^{2n}}{2h_x} -$$

$$-k_{24}\frac{v_{ij+1}^{2n}-v_{ij-1}^{2n}}{2h_y}+\alpha_{21}\left(\frac{u_{i+1j}^{2n}-2u_{ij}^{2n}+u_{i-1j}^{2n}}{h_x^2}+\frac{u_{ij+1}^{2n}-2u_{ij}^{2n}+u_{ij-1}^{2n}}{h_y^2}\right)+$$

$$+\alpha_{22}\left(\frac{v_{i+1j}^{2n}-2v_{ij}^{2n}+v_{i-1j}^{2n}}{h_x^2}+\frac{v_{ij+1}^{2n}-2v_{ij}^{2n}+v_{ij-1}^{2n}}{h_y^2}\right).$$

Потім в точках множини ${\Omega_2}^{2n+1}$ решта значень u^{2n+1}, v^{2n+1} знаходяться за допомогою неявних різницевих схем ДС-алгоритму:

$$\begin{cases} u^{2n+1}=u^{2n}+\tau L_h^{(1)}(u^{2n+1},v^{2n+1}),\\ v^{2n+1}=v^{2n}+\tau L_h^{(2)}(u^{2n+1},v^{2n+1}). \end{cases} \tag{2}$$

Тут і далі коефіцієнти k_{ij}, α_{ij} є відомими функціями координат x та y, взяті в момент часу t^{2n+1}.

Проблема неявних схем полягає в тому, що на кожному часовому кроці доводиться розв'язувати великі системи лінійних алгебраїчних рівнянь. У даному випадку цього робити не потрібно, оскільки в чотирьох точках 5-точкового шаблону різницевого оператора значення уже знайдено на попередньому кроці на множині ${\Omega_1}^{2n+1}$.

Позначимо

$A=\frac{1}{\tau}+2\alpha_{11}\left(\frac{1}{h_x^2}+\frac{1}{h_y^2}\right)$, $B=2\alpha_{12}\left(\frac{1}{h_x^2}+\frac{1}{h_y^2}\right)$,

$C_{ij}=u_{ij}^{2n}\cdot\frac{1}{\tau}-k_{11}\frac{u_{i+1j}^{2n+1}-u_{i-1j}^{2n+1}}{2h_x}-k_{12}\frac{u_{ij+1}^{2n+1}-u_{ij-1}^{2n+1}}{2h_y}-k_{13}\frac{v_{i+1j}^{2n}-v_{i-1j}^{2n}}{2h_x}-k_{14}\frac{v_{ij+1}^{2n}-v_{ij-1}^{2n}}{2h_y}+$
$+\alpha_{11}\left(\frac{u_{i+1j}^{2n}+u_{i-1j}^{2n}}{h_x^2}+\frac{u_{ij+1}^{2n}+u_{ij-1}^{2n}}{h_y^2}\right)+\alpha_{12}\left(\frac{v_{i+1j}^{2n}+v_{i-1j}^{2n}}{h_x^2}+\frac{v_{ij+1}^{2n}+v_{ij-1}^{2n}}{h_y^2}\right)$,

$D=2\alpha_{21}\left(\frac{1}{h_x^2}+\frac{1}{h_y^2}\right)$, $E=\frac{1}{\tau}+2\alpha_{22}\left(\frac{1}{h_x^2}+\frac{1}{h_y^2}\right)$,

$F_j=v_{ij}^{2n}\cdot\frac{1}{\tau}-k_{21}\frac{u_{i+1j}^{2n+1}-u_{i-1j}^{2n+1}}{2h_x}-k_{22}\frac{u_{ij+1}^{2n+1}-u_{ij-1}^{2n+1}}{2h_y}-k_{23}\frac{v_{i+1j}^{2n}-v_{i-1j}^{2n}}{2h_x}-k_{24}\frac{v_{ij+1}^{2n}-v_{ij-1}^{2n}}{2h_y}+$
$+\alpha_{21}\left(\frac{u_{i+1j}^{2n}+u_{i-1j}^{2n}}{h_x^2}+\frac{u_{ij+1}^{2n}+u_{ij-1}^{2n}}{h_y^2}\right)+\alpha_{22}\left(\frac{v_{i+1j}^{2n}+v_{i-1j}^{2n}}{h_x^2}+\frac{v_{ij+1}^{2n}+v_{ij-1}^{2n}}{h_y^2}\right)$.

Тоді систему (2) можна подати у вигляді

$$\begin{cases} Au_{ij}^{2n+1}+Bv_{ij}^{2n+1}=C_{ij},\\ Du_{ij}^{2n+1}+Ev_{ij}^{2n+1}=F_{ij}. \end{cases} \tag{3}$$

Отже, система диференціальних рівнянь (1), записана в околі точки (x,y,t) на сітковій множині за допомогою нашого алгоритму, в околі кожної точки області $\Omega_{h\tau}$ трансформується в систему двох лінійних рівнянь (3) з двома невідомими. Тобто, замість розв'язування системи з $2(N_x-1)(N_y-1)$ лінійних алгебраїчних рівнянь з $2(N_x-1)(N_y-1)$ невідомими, що притаманно для неявних схем, ми знаходимо розв'язок фактично у явному вигляді $u_{ij}^{2n+1}=\frac{\begin{vmatrix} C_{ij} & B\\ F_{ij} & E\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B\\ D & E\end{vmatrix}}$ та $v_{ij}^{2n+1}=\frac{\begin{vmatrix} A & C_{ij}\\ D & F_{ij}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B\\ D & E\end{vmatrix}}$.

Теорема 1. *Система (3) має єдиний розв'язок за умови* $\det A \geq 0$, *де* $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$.

Доведення. Підрахуємо значення визначника знаменника системи

$$AE - BD = \left(\frac{1}{\tau} + 2\alpha_{11}\left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}\right)\right)\left(\frac{1}{\tau} + 2\alpha_{22}\left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}\right)\right) -$$

$$-2\alpha_{12}\left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}\right) \cdot 2\alpha_{21}\left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}\right) = \frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{\tau} \cdot \alpha_{22}\left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}\right) +$$

$$+\frac{1}{\tau} \cdot 2\alpha_{11}\left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}\right) + 2\alpha_{11}\left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}\right) \cdot 2\alpha_{22}\left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}\right) -$$

$$-2\alpha_{12}\left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}\right) \cdot 2\alpha_{21}\left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}\right) = \frac{1}{\tau^2} + \frac{2}{\tau}\left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}\right)(\alpha_{11} + \alpha_{22}) +$$

$$+4\left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}\right)(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}).$$

Отже, достатньою умовою того, що визначник буде більшим за нуль, є $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} \geq, 0$ тобто, $\det A \geq 0$. □

Отримані значення є проміжним розв'язком, а за розв'язок приймаємо значення, знайдені на парних часових кроках. Значення шуканих функцій на парних часових кроках обчислюються за формулами, аналогічними формулам для непарних часових кроків.

Теорема 2. *ДС-алгоритм має похибку апроксимації* $O\left(\tau^2 + h_x^2 + h_y^2\right)$.

Доведення. Запишемо апроксимацію першого рівняння системи (1) у довільній фіксованій точці (x_i, y_j) в момент часу $2n+1$ (явна схема):

$$\frac{u_{ij}^{2n+1} - u_{ij}^{2n}}{\tau} = -k_{11}\frac{u_{i+1j}^{2n} - u_{i-1j}^{2n}}{2h_x} - k_{12}\frac{u_{ij+1}^{2n} - u_{ij-1}^{2n}}{2h_y} - k_{13}\frac{v_{i+1j}^{2n} - v_{i-1j}^{2n}}{2h_x} -$$

$$-k_{14}\frac{v_{ij+1}^{2n} - v_{ij-1}^{2n}}{2h_y} + \alpha_{11}\left(\frac{u_{i+1j}^{2n} - 2u_{ij}^{2n} + u_{i-1j}^{2n}}{h_x^2} + \frac{u_{ij+1}^{2n} - 2u_{ij}^{2n} + u_{ij-1}^{2n}}{h_y^2}\right) +$$

$$+\alpha_{12}\left(\frac{v_{i+1j}^{2n} - 2v_{ij}^{2n} + v_{i-1j}^{2n}}{h_x^2} + \frac{v_{ij+1}^{2n} - 2v_{ij}^{2n} + v_{ij-1}^{2n}}{h_y^2}\right)$$

та у момент часу $2n+2$ (неявна схема):

$$\frac{u_{ij}^{2n+2} - u_{ij}^{2n+1}}{\tau} = -k_{11}\frac{u_{i+1j}^{2n+2} - u_{i-1j}^{2n+2}}{2h_x} - k_{12}\frac{u_{ij+1}^{2n+2} - u_{ij-1}^{2n+2}}{2h_y} - k_{13}\frac{v_{i+1j}^{2n+2} - v_{i-1j}^{2n+2}}{2h_x} -$$

$$-k_{14}\frac{v_{ij+1}^{2n+2} - v_{ij-1}^{2n+2}}{2h_y} + \alpha_{11}\left(\frac{u_{i+1j}^{2n+2} - 2u_{ij}^{2n+2} + u_{i-1j}^{2n+2}}{h_x^2} + \frac{u_{ij+1}^{2n+2} - 2u_{ij}^{2n+2} + u_{ij-1}^{2n+2}}{h_y^2}\right) +$$

$$+\alpha_{12}\left(\frac{v_{i+1j}^{2n+2}-2v_{ij}^{2n+2}+v_{i-1j}^{2n+2}}{h_x^2}+\frac{v_{ij+1}^{2n+2}-2v_{ij}^{2n+2}+v_{ij-1}^{2n+2}}{h_y^2}\right).$$

Додамо ці два рівняння та зведемо подібні доданки

$$\frac{u_{ij}^{2n+1}-u_{ij}^{2n}}{\tau}+\frac{u_{ij}^{2n+2}-u_{ij}^{2n+1}}{\tau}=-k_{11}\left(\frac{u_{i+1j}^{2n}-u_{i-1j}^{2n}}{2h_x}+\frac{u_{i+1j}^{2n+2}-u_{i-1j}^{2n+2}}{2h_x}\right)-$$

$$-k_{12}\left(\frac{u_{ij+1}^{2n}-u_{ij-1}^{2n}}{2h_y}+\frac{u_{ij+1}^{2n+2}-u_{ij-1}^{2n+2}}{2h_y}\right)-k_{13}\left(\frac{v_{i+1j}^{2n}-v_{i-1j}^{2n}}{2h_x}+\frac{v_{i+1j}^{2n+2}-v_{i-1j}^{2n+2}}{2h_x}\right)-$$

$$-k_{14}\left(\frac{v_{ij+1}^{2n}-v_{ij-1}^{2n}}{2h_y}+\frac{v_{ij+1}^{2n+2}-v_{ij-1}^{2n+2}}{2h_y}\right)+$$

$$+\alpha_{11}\left(\frac{u_{i+1j}^{2n}-2u_{ij}^{2n}+u_{i-1j}^{2n}}{h_x^2}+\frac{u_{ij+1}^{2n}-2u_{ij}^{2n}+u_{ij-1}^{2n}}{h_y^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{u_{i+1j}^{2n+2}-2u_{ij}^{2n+2}+u_{i-1j}^{2n+2}}{h_x^2}+\frac{u_{ij+1}^{2n+2}-2u_{ij}^{2n+2}+u_{ij-1}^{2n+2}}{h_y^2}\right)+$$

$$\alpha_{12}\left(\frac{v_{i+1j}^{2n}-2v_{ij}^{2n}+v_{i-1j}^{2n}}{h_x^2}+\frac{v_{ij+1}^{2n}-2v_{ij}^{2n}+v_{ij-1}^{2n}}{h_y^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{v_{i+1j}^{2n+2}-2v_{ij}^{2n+2}+v_{i-1j}^{2n+2}}{h_x^2}+\frac{v_{ij+1}^{2n+2}-2v_{ij}^{2n+2}+v_{ij-1}^{2n+2}}{h_y^2}\right).$$

Розкладемо кожну сіткову функцію в околі точки (x_i, y_j, t_n) у ряд Тейлора, наприклад, $u_{i\pm1}=u_i\pm hu'_i+\frac{h^2}{2}u''_i\pm\frac{h^3}{3!}u'''_i+O(h^4)$, де h — крок за відповідною змінною. Підставивши ці розвинення в останнє рівняння і скориставшись тим, що для гладких функцій $F\left(u^{2n}+u^{2n+2}\right)=2F\left(u^{2n+1}\right)+$ $+O\left(\tau^2\right)$, отримаємо залишковий член похибки апроксимації у вигляді

$$\left(\frac{\tau^2}{3}u'''_t\right)^{2n+1}+2k_{11}\left(\frac{h_x^2}{3}u'''_x\right)^{2n+1}+2k_{12}\left(\frac{h_y^2}{3}u'''_y\right)^{2n+1}+2k_{13}\left(\frac{h_x^2}{3}v'''_x\right)^{2n+1}+$$

$$+2k_{14}\left(\frac{h_y^2}{3}v'''_y\right)^{2n+1}+O(\tau^3)+O(h_x^3)+O(h_y^3).$$

В силу довільності точки (x_i, y_j, t_n) стверджуємо, що похибка апроксимації розв'язку нашої задачі буде $O\left(\tau^2+h_x^2+h_y^2\right)$. Аналогічні результати одержуємо для другого рівняння системи. □

Висновки

У роботі запропоновано модифікацію ДС-алгоритму для побудови чисельного розв'язку систем параболічних рівнянь другого порядку без мішаних похідних. Досліджено існування єдиного розв'язку системи різницевих рівнянь. Встановлено, що похибка апроксимації має другий порядок. Перевагою алгоритму перед неявними різницевими схемами є те, що на кожному часовому кроці не потрібно розв'язувати великі системи алгебраїчних рівнянь. Це свідчить про ефективність даного алгоритму.

Література

1. Канев Ф. Ю., Лукин В. П. Адаптивная оптика. Численные и экспериментальные исследования — Томск.: Изд-во Института оптики атмосферы СО РАН, 2005. — 250 с.
2. Павленко А. В., Троеглазова Т. С., Зубаирова У. С., Байнибаева Д. Ж., Николаев С. В. Применение технологий CUDA для моделирования процессов реакции-дифузии на двомерном клеточном ансамбле // Математическая биология и биоинформатика. — 2014. — Т. 9, №2. — С.491–503. DOI: 10.17537/2014.9.491
3. Моисеев Н. Я. Явно-неявная разностная схема для совместного решения уравнений переноса теплового излучения и энергии методом расщепления // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2013. — Т. 53, №3. — С. 442–458. DOI:10.7868/S0044466913030113
4. Самарский А. А., Вабищевич П. Н., Самарская Е. А. Задачи и упражнения по численным методам. — URSS, 2007 (3-е изд).
5. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1977. — 356с.
6. Яненко Н. Н. Избранные труды. Математика, механика. — М.: Наука, 1991. — 415 с.
7. Грищенко О. Ю. ДС-різницевий алгоритм розв'язання крайових задач для параболічних рівнянь другого порядку//Вісник Київського університету. Серія фіз.-мат. науки. — 2000. — Вип. 1. — С.227–231.

Надійшла 31.01.2016