Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2016, №1(121) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.6
MSC 65N06

NUMERICAL SIMULATION OF 3D WATER TRANSPORT UNDER MICROIRRIGATION

Dmitry Klyushin, Viacheslav Onotskyi[1], Natalia Lyashko[2]

[1]Faculty of Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, E-mail: dokmed5@gmail.com, vingar@ukr.net.
[2]Glushkov Institute of Cybernetics of NASU, Kyiv, Ukraine, E-mail: silsil1@gmail.com.

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТРИВИМІРНОГО ВОЛОГОПЕРЕНЕСЕННЯ ПРИ МІКРОЗРОШЕННІ

Д. А. Клюшин[1], В. В. Оноцький[1], Н. І. Ляшко[2]

[1]Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна, E-mail: dokmed5@gmail.com, vingar@ukr.net.
[2]Інститут кібернетики імені Глушкова НАНУ, Київ, Україна, E-mail: silsil1@gmail.com.

Abstract. In the paper an efficient method of numerical simulation of water transport using of two-step simmetrizable difference algorithm (DS-algorithm) in combination with the Newton method for the non-linear equations is described. Results of simulation of three-dimensional water transport from several buried point sources which are described by means of a Dirac delta function are shown. The offered method allows to solve problems of identification of optimal coordinates and capacities of sources for ensuring the given level of humidification of a soil.
Keywords: finite Difference Scheme, numerical Simulation, water transport, Richards-Klute equation.

Резюме. У статті описано ефективний метод чисельного моделювання вологоперенесення з використанням двокрокового симетризованого різницевого алгоритму (ДС-алгоритму) в поєднанні з методом Ньютона для нелінійних рівнянь. Продемонстровано результати моделювання тривимірного вологоперенесення з декількох заглиблених точкових джерел, що описуються за допомогою дельта-функції Дірака. Запропонований метод дозволяє розв'язувати задачі ідентифікації оптимальних координат і потужностей джерел для забезпечення заданого рівня зволоженості ґрунту.
Ключові слова: скінченно-різницева схема, чисельне моделювання, вологоперенесення, рівняння Річардса-Клюта

1. Вступ

Мікрозрошення — сучасна технологія поливу ґрунту, для якої характерним є невеликий об'єм води та зони зволоження порівняно із традиційними методами іррігації. Зокрема, до мікрозрошення належать крапельне зрошення, мікродощування і дрібнодисперсне зрошення. Найбільш ефективним та перспективним вважається крапельне зрошення, коли воду у невеликих об'ємах повільно подають через крапельниці на локальні ділянки ґрунту, що забезпечує економний та контрольований режим поливу.

Для побудови оптимальної системи мікрозрошення необхідно комплексно розв'язати ряд гідравлічних (для оптимального вибору діаметрів труб магістральної та поливної систем) та гідродинамічних задач (для прогнозування розподілу води залежно від потужності крапельниць та відстані між ними, а також властивостей ґрунту). Однією з важливих складових цієї задачі є прогнозування розподілу води в ґрунті на основі математичного моделювання вологоперенесення. Воно вимагає урахування багатьох чинників, зокрема, вологопроникненості ґрунту, евапотранспірації, режиму поливу, відстані між джерелами води тощо. Вологоперенесення в ґрунті при крапельному зрошенні має яскраво виражений багатовимірний характер і, в ідеалі, вимагає розв'язання тривимірної початково-крайової задачі для моделювання розподілу води та ідентифікації координат і потужності джерел. У вісесиметричних випадках тривимірну задачу можна звести до двовимірної задачі плосковертикального вологоперенесення із поверхневими або внутрішніми джерелами.

Існує два підходи до математичного моделювання вологоперенесення в ґрунті при крапельному зрошенні. Перший підхід — аналітичний. При його застосуванні зазвичай приймають ряд ідеалізованих припущень щодо властивостей ґрунту та характеру розподілу, як от однорідність ґрунту, конкретна форма джерела (сферична, напівсферична, циліндрична), лінійність рівняння вологоперенесення тощо. Дво- та тривимірні задачі такого типу задачі розв'язано у роботах R. J. Philip [1, 2, 3, 4, 5], A. W. Warrick [6, 7, 8, 9, 10, 11], С. Н. Новосельского [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19] та багатьох інших. Втім, аналітичний розв'язок задачі вологоперенесення в ненасиченому ґрунті можна знайти лише за ідеалізованих припущень. З цієї причини широкий розмах отримав альтернативний, більш універсальний підхід, який передбачає комп'ютерне моделювання вологоперенесення, виходячи із заданих властивостей ґрунту та поливної системи на основі квазілінійного рівняння Річардса-Клюта. Перші роботи в цьому напрямку належать A. Bresler [20, 21, 22, 23, 24]. Згодом аналогічні ідеї розвивали C.Armstrong [25], C. W. Healy [26], Д. А. Клюшин Д. А. [27] та інші. Незважаючи на велику кількість публікацій, присвячених моделюванню вологопереносення в грунті при мікрозрошенні, дві основних задачі в цій області ще очікують свого повного розв'язку — це задача тривимірного моделювання та задача ідентифікації оптимальних параметрів системи мікрозрошення.

2. Постановка задачі.

Робота є продовженням досліджень [27] з чисельного моделювання процесу вологопереносу при крапельному зрошенні, де для математичного моделювання використовувалось квазілінійне рівняння Річардса-Клюта [28]. Це рівняння допускає подвійне формулювання: якщо воно формулюється відносно гідравлічного напору, то називається рівнянням Річардса, якщо ж відносно вологості — рівнянням Клюта. Ми пропонуємо чисельний метод, що дозволяє ефективно розв'язувати нелінійне рівняння Річардса в умовах кількох заглиблених точкових джерел і легко поширюється на тривимірний випадок.

Зробимо кілька фізичних припущень. Вважаємо, що у воді відсутні розчинені солі, процес розповсюдження вологи є ізотермічним, скелет ґрунту не деформується, тиск повітря ґрунту дорівнює атмосферному тиску, волога у ґрунті нестисла, вологоперенос відбувається під дією капілярних, гравітаційних сил, градієнтів вологості, випаровування та сили всмоктування кореневою системою рослин.

У прямокутній області $G = \{(x, y, z)|\ 0 < x < a_1,\ 0 < y < a_2,\ -b < z < 0\}$ (Рис. 1) при $0 < t < T_1$ розглядається нелінійне диференціальне рівняння

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K(W)\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K(W)\frac{\partial U}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K(W)\frac{\partial U}{\partial z}\right) + f. \quad (1)$$

Тут невідомі W — об'ємна вологість, $U = P + z$ — п'єзометричний напір, P — гідродинамічний потенціал, що залежить від W, де $P = \varphi(W)$, φ — відома функція, що залежить від типу ґрунту і може бути побудована достатньо точно з використанням тензометричного методу (Рис. 2)[29].

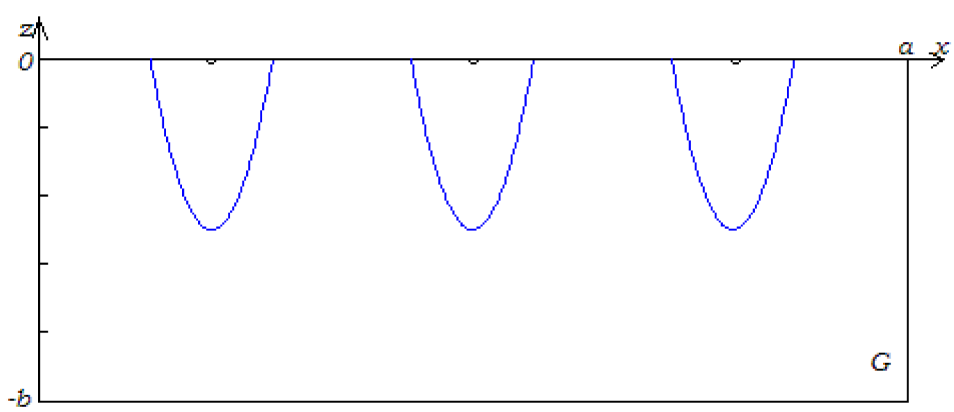

Рис 1. Область G

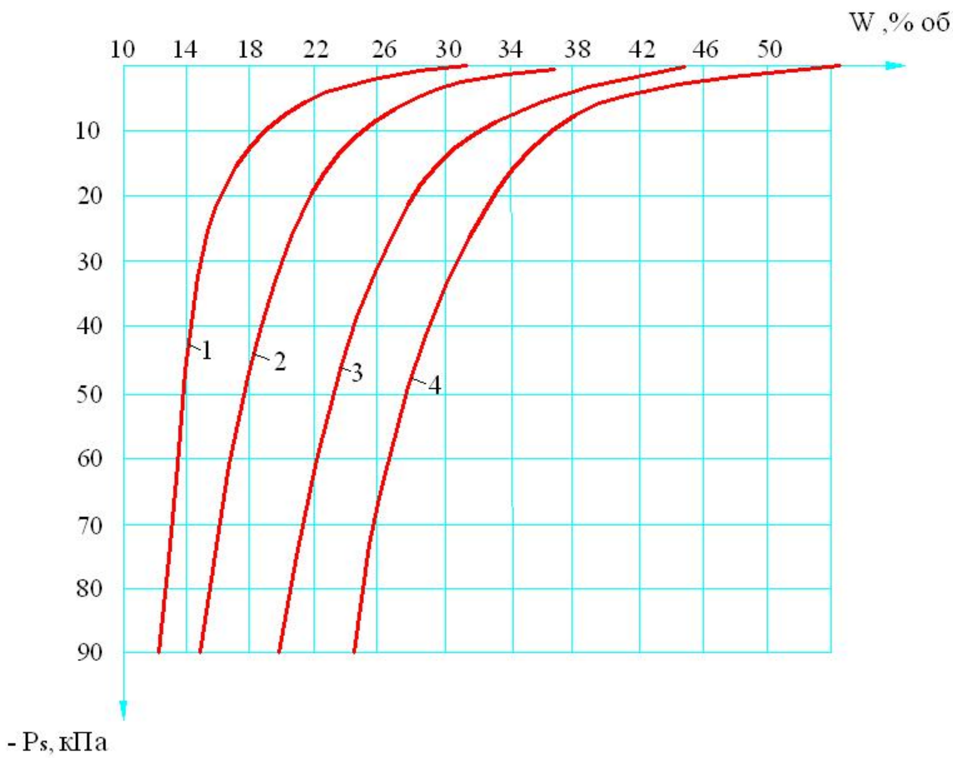

Рис 2. Узагальнені залежності PS $= \varphi$(W) для різних типів грунтів
1 — супіщані; 2 — легкосуглинкові;
3 — середньосуглинкові; 4 — важкосуглинкові

Тут $K(W)$ — коефіцієнт вологопереносу, заданий формулою Аверьянова [30]

$$K\left(W\right)=K{\left(\frac{W-W^{*}}{m-W^{*}}\right)}^{3.5}, \tag{2}$$

де K — коефіцієнт фільтрації, W — об'ємна вологість ґрунту; W^* — зв'язана вологість або максимальна молекулярна вологоємність (ММВ) за А. Ф. Лебедєвим, m — пористість ґрунту або повна вологомісткість, $f(x,y,z,t) = f_K(x,y,z,t) - f_T(x,y,z,t)$ — функція джерел (крапельниці) та стоків (відбір вологи коренями рослин). При використанні точкових джерел функція $f_K(x,y,z,t)$ є лінійною комбінацією δ-функцій Дірака.

Початкова умова має вигляд

$$W|_{t=0} = W_0, \tag{3}$$

де $W_0(x,y,z)$ — задана функція.

Крайові умови задаються так:

– на поверхні $z = 0$

$$U = 0 \text{ (джерела заглиблені і на поверхні відсутні), або } U = h_k, \tag{4}$$

де h_k — висота капілярного підняття;
– на нижній межі $z = -b$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = 0; \tag{5}$$

– на бічних межах

$$\left.\frac{\partial W}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial W}{\partial x}\right|_{x=a_1} = 0, \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial W}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial W}{\partial y}\right|_{y=a_2} = 0. \tag{6'}$$

3. Аналіз моделі

Ураховуючи формулу (2), рівняння (1) перепишемо в недивергентній формі

$$\frac{\partial W}{\partial t} = K'(W)\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial z}\right) + $$
$$+K(W)\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) + f, \tag{1'}$$

де $K'(W) = 3.5K\left(\frac{W-W^*}{m-W^*}\right)^{2.5}\frac{1}{m-W^*}$.

Функцію $P_S(W)$ у наведеній математичній моделі вважаємо відомою [31]

$$P_S(W) = \mu h_k\left(-\ln\left|\frac{W-W^*}{m-W^*}\right|\right)^{1/n}, \tag{7}$$

де μ та n — емпіричні параметри, що підбираються експериментально або за методом Ньютона. Формула (7) узгоджується з кривими, отриманими експериментально (рис. 2). Тоді

$$U(W) = \mu h_k\left(-\ln\left|\frac{W-W^*}{m-W^*}\right|\right)^{1/n} + z \equiv \varphi(W,z). \tag{8}$$

3. Чисельна дискретна модель

Для чисельного розв'язання наведеної початково-крайової задачі ефективним виявився метод скінченних різниць, а саме, двокроковий симетризований алгоритм (ДС-алгоритм) [32] у поєднанні з методом Ньютона для нелінійних рівнянь.

На області G вводиться рівномірна сітка

$$\Omega_{h\tau} = \{(x_i, y_j, z_k, t_n) \mid x_i = ih_x,\ y_j = jh_y,\ z_k = -b + kh_z, t_n = n\tau,$$
$$i = \overline{0, M_1}, j = \overline{0, M_2},\ k = \overline{0, M_3}, n = \overline{0, N}\},$$

яка розбивається на дві підмножини (Рис. 3):

$$\Omega^{(1)}_{h\tau} = \{(x_i, y_j, z_k, t_n) \,|\, i+j+k+n \text{ - парне }\}\ (\times)$$

та

$$\Omega^{(2)}_{h\tau} = \{(x_i, y_j, z_k, t_n) \,|\, i+j+k+n \text{ - непарне }\}\,(\odot).$$

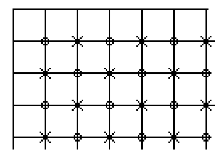

Рис 3. Сітка $\Omega_{h\tau}$.

Задамо на сітці початкову

$$W_{ijk}^{0} = W_0\left(ih_x, jh_y, -b + kh_z\right), \; i = \overline{0, M_1}, \; j = \overline{0, M_2}, \; k = \overline{0, M_3} \qquad (9)$$

та крайові умови

$$\lambda_z^{+} W_{ij0}^{n+1} = 0, \;\; \lambda_z^{-} W_{ijM_2}^{n+1} = 0, \qquad (10)$$

$$\lambda_x^{+} W_{0jk}^{n+1} = 0, \;\; \lambda_x^{-} W_{M_1jk}^{n+1} = 0, \qquad (11)$$

$$\lambda_y^{+} W_{i0k}^{n+1} = 0, \;\; \lambda_y^{-} W_{iM_2k}^{n+1} = 0. \qquad (12)$$

Для знаходження розв'язку W_{ijk}^{n+1} на кожному наступному $(n+1)$-му часовому кроці у внутрішніх вузлах використовуємо схеми з центральними різницями. Спочатку знаходимо розв'язок W_{ijk}^{n+1} у вузлах $(x_i, y_j, z_k, t_{n+1}) \in \Omega_{h\tau}^{(1)}$ за явною різницевою схемою

$$W_{ijk}^{n+1} = W_{ijk}^{n} + \tau L_{h\tau}\left(W_{ijk}^{n}\right), \; i = \overline{1, M_1 - 1}, \qquad (13)$$
$$j = \overline{1, M_2 - 1}, \; k = \overline{1, M_3 - 1},$$

де

$$L_{h\tau}\left(W_{ij}^{n}\right) = K'_{W}\left(W_{ij}^{n}\right)\left(\lambda_x^0 U_{ijk}^{n} \lambda_x^0 W_{ijk}^{n} + \lambda_y^0 U_{ijk}^{n} \lambda_y^0 W_{ijk}^{n} + \lambda_z^0 U_{ijk}^{n} \lambda_z^0 W_{ijk}^{n}\right) +$$
$$+ K\left(W_{ijk}^{n}\right)\left(\lambda_{xx}^0 U_{ijk}^{n} + \lambda_{yy}^0 U_{ijk}^{n} + \lambda_{zz}^0 U_{ijk}^{n}\right) + f_{ijk}^{n},$$

а потім у вузлах $(x_i, y_j, z_k, t_{n+1}) \in \Omega_{h\tau}^{(2)}$ — за неявною різницевою схемою

$$W_{ijk}^{n+1} = W_{ijk}^{n} + \tau L_{h\tau}\left(W_{ijk}^{n+1}\right). \qquad (14)$$

Тут λ^{+}, λ^{-}, λ^{0} — відповідно права, ліва та центральна різницеві апроксимації частинних похідних першого та другого порядку

$$\lambda_x^{+} W_{ijk} = \frac{W_{i+1jk} - W_{ijk}}{h_x},$$
$$\lambda_x^{-} W_{ijk} = \frac{W_{ijk} - W_{i-1jk}}{h_x},$$
$$\lambda_x^{0} W_{ijk} = \frac{W_{i+1jk} - W_{i-1jk}}{2h_x},$$
$$\lambda_{xx}^{0} W_{ijk} = \frac{W_{i+1jk} - 2W_{ijk} + W_{i-1jk}}{h_x^2}.$$

Ураховуючи те, що значення у сусідніх вузлах знаходяться явно за схемою (13), система $M_1 \times M_2 \times M_3$ нелінійних алгебраїчних рівнянь (9)–(14)

з $M_1 \times M_2 \times M_3$ невідомими розщеплюється на $M_1 M_2 M_3/2$ незалежних нелінійних рівнянь з одним невідомим

$$F_{ijk}^{n+1}\left(W_{ijk}^{n+1}\right) = 0, \tag{15}$$

де

$$\begin{gathered} F_{ijk}^{n+1}(w) = w - W_{ijk}^{n} - \tau K'_W(w) * \\ * \left(\lambda_x^0 U_{ijk}^{n+1} \lambda_x^0 W_{ijk}^{n+1} + \lambda_y^0 U_{ijk}^{n+1} \lambda_y^0 W_{ijk}^{n+1} + \lambda_z^0 U_{ijk}^{n+1} \lambda_z^0 W_{ijk}^{n+1}\right) - \\ -\tau K(w)\left(\frac{U_{i+1jk}^{n+1} + U_{i-1jk}^{n+1}}{h_x^2} + \frac{U_{ij+1k}^{n+1} + U_{ij-1k}^{n+1}}{h_y^2} + \frac{U_{ijk+1}^{n+1} + U_{ijk+1}^{n+1}}{h_z^2}\right) + \\ +2\tau K(w)\varphi(w, z_j)\left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} + \frac{1}{h_z^2}\right) - f_{ij}^{n+1},\ z_j = -b + j * hz. \end{gathered}$$

Отримані нелінійні рівняння розв'язуються методом Ньютона

$$w_{s+1} = w_s - \frac{F(w_s)}{F'(w_s)},\ s = 0, 1, 2, ..., \tag{16}$$

$$\begin{gathered} \left(F_{ij}^{n+1}\right)'(w) = 1 - \tau K'' * \\ *(w)\left(\lambda_x^0 U_{ijk}^{n+1} \lambda_x^0 W_{ijk}^{n+1} + \lambda_y^0 U_{ijk}^{n+1} \lambda_y^0 W_{ijk}^{n+1} + \lambda_z^0 U_{ijk}^{n+1} \lambda_z^0 W_{ijk}^{n+1}\right) + \\ +2\tau K'(w)\varphi(w, z_j)\left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} + \frac{1}{h_z^2}\right) + 2\tau K(w)\varphi'_W(w, z_j)\left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} + \frac{1}{h_z^2}\right) - \\ -\tau K'(w)\left(\frac{U_{i+1jk}^{n+1} + U_{i-1jk}^{n+1}}{h_x^2} + \frac{U_{ij+1k}^{n+1} + U_{ij-1k}^{n+1}}{h_y^2} + \frac{U_{ijk+1}^{n+1} + U_{ijk-1}^{n+1}}{h_z^2}\right), \end{gathered}$$

$$\varphi'_W(w, z_j) = \frac{\mu h_k}{n}\left(-\ln\left|\frac{W - W^*}{m - W^*}\right|\right)^{\frac{1}{n} - 1} \frac{1}{|W - W^*|}.$$

Умовою завершення ітераційного процесу вважаємо $|w_{s+1} - w_s| \leq \varepsilon$, де ε — задана точність. Алгоритм локально стійкий за початковими даними [32]. Проведено обчислювальні експерименти, що підтверджують ефективність запропонованого методу.

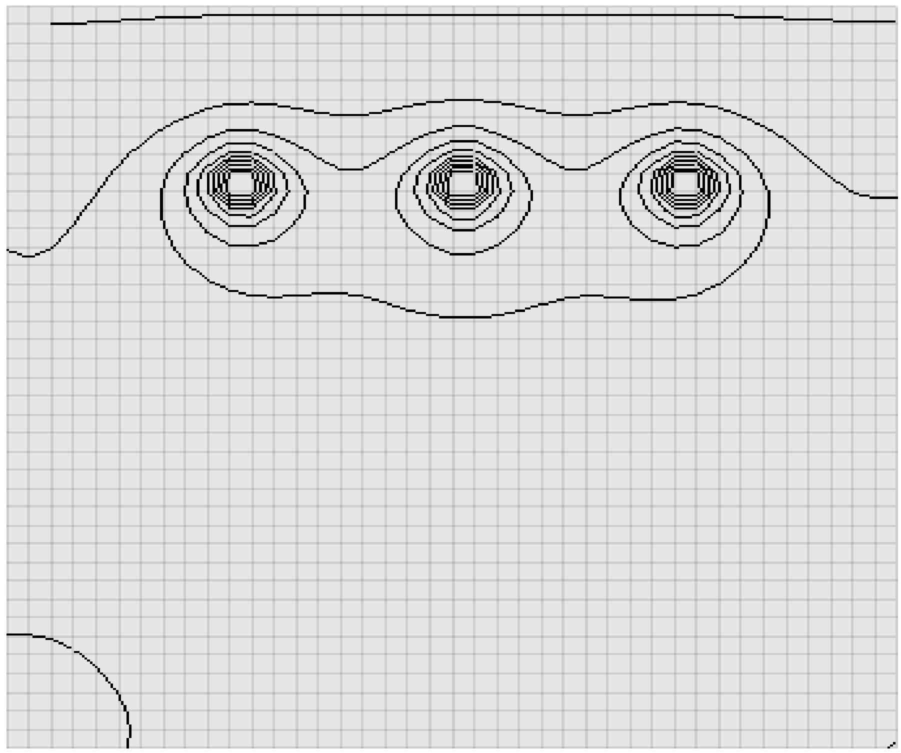

Рис 4. Ізолінії розрізу (y=0.5) розв'язку в момент часу $t = 1$ у випадку 3-х заглиблених джерел.

5. Висновки

Проведені експерименти продемонстрували ефективність запропонованого методу чисельного моделювання вологоперенесення з використанням двокрокового симетризованого різницевого алгоритму (ДС-алгоритму) в поєднанні з методом Ньютона для нелінійних рівнянь. Результати моделювання тривимірного вологоперенесення з декількох заглиблених точкових джерел, що описуються за допомогою дельта-функції Дірака, не суперечать спостереженням. Запропонований метод дозволяє розв'язувати задачі ідентифікації оптимальних координат і потужностей джерел для забезпечення заданого рівня зволоженості ґрунту.

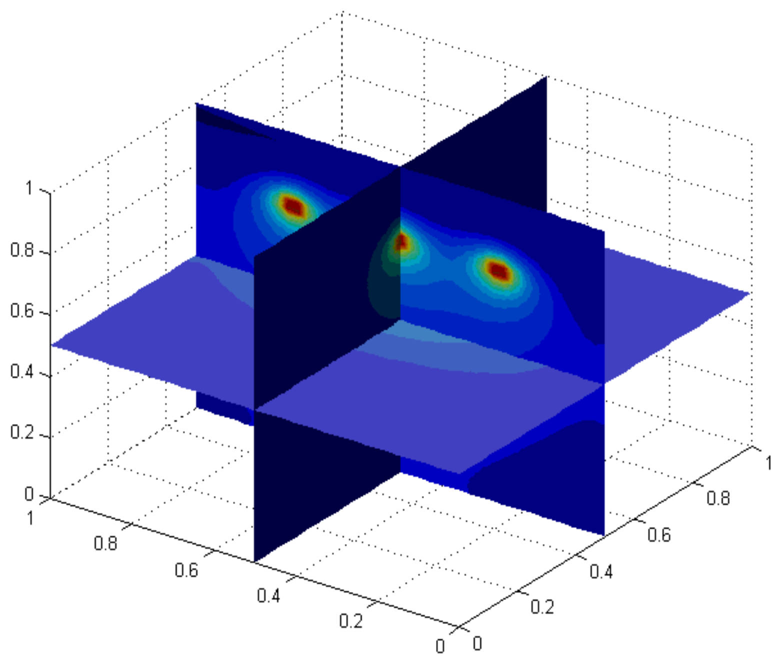

Рис 5. Розрізи розв'язку в момент часу $t = 1$ у випадку 3-х заглиблених джерел.

Література

1. Philip J. R. General theorem on steady infiltration from surface sources with application to point and line sources // Soil Science Society of America Proceedings. — 1971. — 35. — P. 567–571.
2. Philip J. R. Steady infiltration from buried, surface and perched point and line sources in heterogeneous soils, I: Analysis // Soil Science Society of America Proceedings. — 1972. — 36. — P. 268–273.
3. Philip J. R. On solving the unsaturated flow equation: 1. The flux concentration relation // Soil Science. — 1973. — 116. — P. 328–335.
4. Philip J. R. Steady infiltration from spherical cavities // Soil Science Society of America Journal. — 1984. — 48. — P. 724–729.
5. Philip J. R., Forrester R. I. Steady infiltration from buried, surface and perched point and line sources in heterogeneous soil, II: Flow details and discussion // Soil Science Society of America Proceedings. — 1975. — 9. — P. 408–414.
6. Warrick A. W. Time-dependent linearized infiltration, I: Point-sources // Soil Science Society of America Proceedings. — 1974. — 38(3). — P. 383–386.
7. Warrick A. W. Point and line infiltration calculation of the wetted soil surface // Soil Science Society of America Journal. — 1985. — 49. — P. 1581–1583.
8. Warrick A. W., Ammozegar-Fard A. Infiltration and drainage calculations using spatially scaled hydraulic properties // Water Resources Research. — 1979. — 13. — P. 355–362.

9. Warrick A. W., Lomen D. O. Time-dependent linearized infiltration, III: Strip and disc sources // Soil Science Society of American Journal. — 1976. — 40. — P. 639–643.
10. Warrick A. W., Lomen D. O, Amoozegar-Fard A. Linearlized moisture flow with root extraction for three dimensional steady conditions // Soil Science Society of America Journal. — 1980. — 44(5). — P. 911–914.
11. Warrick A. W.; Lomen D. O, Yates S. R. A generalized solution to infiltration // Soil Science Society of America Journal. — 1985. — 49. — P. 34–38.
12. Шульгин Д. Ф., Новосельский С. Н. Математические модели и методы расчета влагопереноса при внутри почвенном орошении // В сб. науч. тр.: Математика и проблемы водного хозяйства. — Киев: Наукова Думка, 1986. — С. 73–89.
13. Новосельский С. Н. Теорема Филиппа и ее обобщение на нестационарные задачи влагопереноса при капельном орошении // В кн.: Гидравлика и инженерная гидрология. — Калинин, 1981. — С. 114–120.
14. Новосельский С. Н. Решение некоторых краевых задач влагопереноса при наличии источников орошения: Автореферат дис. на соискание уч. степени канд. физ.-мат. наук. — Киев, 1979. — 23 с.
15. Новосельский С. Н. Решение некоторых краевых задач нестационарного влагопереноса при капельном орошении // В кн.: Гидравлика сооружений и русловые процессы. — Калинин, 1982. — С. 54–59.
16. Новосельский С. Н. Внутрипочвенное орошение из плоских и линейных источников в условиях глубокого залегания грунтовых вод // В кн.: Гидравлика русловых и подземных потоков. — Калинин, 1984. — С. 101–106.
17. Новосельский С. Н., Шульгин Д. Ф. Расчет нестационарного влагопереноса при капельном и внутрипочвенном орошении // Изв. АН СССР, МЖГ. — 1981. — №4. — С. 74–81.
18. Крамаровская И. И., Новосельский С. Н. Две задачи внутрипочвенного орошения // Доклады АН УзССР. — 1977. — №6. — С. 28–30.
19. Крамаровская И. И., Новосельский С. Н. Некоторые автомодельные задачи теории фильтрации при неполном насыщении грунта // Изв. АН УзССР, сер. техн. наук. — 1980. — №1. — С. 68–73.
20. Brandt A., Bresler E, Diner N., Ben-Asher I. K., Heller J,. Goldberg D. Infiltration from a trickle source: I. Mathematical models // Soil Science Society of America. — 1971. — 35. — P. 683–689.
21. Bresler E., Heller J., Dinner N., Ben-Asher I., Brandt A., Goldberg D. Infiltration theoretical predictions // Soil Science Society of America Proceedings. — 1971. — 35. — P. 683–689.
22. Bresler E. Two-dimensional transport of solutes during non-steady infiltration from a trickle source // Soil Science Society of America Proceedings. — 1975. — 39. — P. 604–613.
23. Bresler E. Trickle-drip irrigation: Principles and application to soil-water management // Advances in Agronomy. — 1977. — 29. — P. 343–393.
24. Bresler E. Analysis of trickle-irrigation with application to design problems // Irrigation Science. — 1978. — 1. — P. 3–17.
25. Armstrong C. F., Wilson T V. Computer model for moisture distribution in stratified soils under trickle source // Transactions of American Society of Agricultural Engineers. — 1983. — 26. — P. 1704–1709.

26. Healy R.W. Simulation of trickle-irrigation, an extension to U.S. Geological Survey's computer program Vs 2D / U.S. Geological Survey Water Resources Investigation 87-4086, 1987, U.S. Govt, Washington, DC.
27. Ромащенко М. І., Мистецкий Г. Е., Клюшин Д. А. Математическая модель внутрипочвенного влаго-, соле- и теплопереноса при микроорошении // Мелиорация и водное хозяйство. — 1992. — №7. — С.51–53.
28. Мироненко В. А. Динамика подземных вод. — М.: МГГУ, 2001. — 519 с.
29. Ромащенко М. І., Корюненко В. М., Муромцев М. М. Рекомендації з оперативного контролю та управління режимом зрошення сільськогосподарських культур із застосуванням тензометричного методу. — Мін. АП та продовольства України, НААН України, Інститут водних проблем і меліорації, 2012. — 72 с.
30. Ахмедов А. Д. Аналитический подход к определению некоторых водно-физических характеристик почвоґрунтов // Материалы Международной научно-практической конференции "Роль мелиорации и водного хозяйства в реализации национальных проектов", Часть 1. — Москва, 2008. — С. 21–27.
31. Голованов А. И., Новиков О.С. Математическая модель переноса влаги и растворов солей в почвах на орошаемых землях. Тр. МГМИ. — М., 1974. — 34. — С. 10–21.
32. Ляшко І. І., Грищенко О. Ю., Склеповий В. М., Оноцький В. В. Економічний чисельний алгоритм для одного класу рівнянь // Доповіді НАН України. — 2003. — № 3. — С. 68–72.

Надійшла 11.01.2016