УДК 517.956

MSC 517.956

THE UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF DIRICHLET PROBLEM IN A CYLINDRICAL DOMAIN FOR THREE-DIMENSIONAL HYPERBOLIC EQUATIONS WITH TYPE AND ORDER DEGENERATION

E.T. Kitaybekov.

Institute of Mathematics, Physics and Computer science, Kazakh National Pedagogical University, Abai. (Kazakhstan, Almaty) E-mail: Er-kaz_89@mail.ru

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЕМ ТИПА И ПОРЯДКА

Е.Т. Китайбеков

Институт математики, физики и информатики КазНПУ им. Абая, Алматы, Казахстан, E-mail: Er-kaz_89@mail.ru

Abstract. A. B. Bitzadze has drawn the attention to the importance of investigating hyperbolic equations with type and order degeneration. It is known that for partial differential equations of the hyperbolic type, boundary value problems with data given on the whole domain boundary, are examples of incorrectly defined problems.

The correctness of Dirichlet problem in a cylindrical domain for degenerating multi-dimensional hyperbolic equations has been proved before.

The work shows the uniqueness of the solution of Dirichlet problem in a cylindrical domain for three-dimensional hyperbolic equations with type and order degeneration.

Keywords: Solvability, Dirichlet problem, domain, hyperbolic equation, type and order degeneration, system of functions.

Резюме. На важность исследования гиперболических уравнений с вырождением типа и порядка обратил внимание А.В. Бицадзе. Известно, что для уравнений в частных производных гиперболического типа краевые задачи с данными на всей границе области служат примером некорректно поставленных задач.

Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений ранее доказана.

В данной работе показана единственность решения задачи Дирихле в цилиндрической области для трехмерных гиперболических уравнений с вырождением типа и порядка.

Ключевые слова: Разрешимость, задача Дирихле, область, гиперболическое уравнение, вырождение типа и порядка, система функций.

1. Введение

На важность исследования гиперболических уравнений с вырождением типа и порядка обратил внимание А. В. Бицадзе [1].

В теории уравнений в частных производных гиперболического типа краевые задачи с данными на всей границе области служат примером некорректности поставленных задач [1, 2]. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений доказана в [3, 4]. Однозначная разрешимость этой задачи для вырождающихся трехмерных гиперболических уравнений установлены в [5, 6].

Разрешимость задачи Дирихле в цилиндрической области для трехмерных гиперболических уравнений с вырождением типа и порядка показана [7], а в данной работе доказывается единственность ее решения.

2. Постановка задачи и результат.

Пусть D_β — цилиндрическая область евклидова пространства E_3 точек (x_1, x_2, t), ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t) : |x \ |= 1\}$, плоскостями $t = \beta > 0$ и $t = 0$, где $|x \ |$ — длина вектора $x = (x_1, x_2)$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_β области D_β, обозначим через $\Gamma_\beta, S_\beta, S_o$ соответственно.

В области D_β рассмотрим взаимосопряженные трехмерные гиперболические уравнения

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^{2} k_i(t) u_{x_i x_i} - k_3(t) u_{tt} + \sum_{i=1}^{2} a_i(x,t) u_{x_i} + b(x,t) u_t + c(x,t) u = 0, \quad (1)$$

$$L^* \upsilon \equiv \sum_{i=1}^{2} k_i \upsilon_{x_i x_i} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}(k_3 \upsilon) - \sum_{i=1}^{2} a_i \upsilon_{x_i} - b\upsilon_t + d\upsilon = 0, \quad (2)$$

где $k_i(t) > 0$ при $t > 0$ и обращаются в ноль при $t = 0$, $k_i(t) \in C([0,\beta]) \cap C^2((0,\beta)),\ i = 1,2,3,\ d(x,t) = c - \sum\limits_{i=1}^{2} a_{i\,x_i} - b_t$.

В дальнейшем нам понадобится связь декартовых координат x_1, x_2, t с полярными $r, \theta, t : x_1 = r\cos\theta,\ x_2 = r\sin\theta,\ r \geq 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi$.

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области D_β из класса $C(\bar{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{S_\beta} = 0, u|_{\Gamma_\beta} = 0, u|_{S_o} = 0. \quad (3)$$

Пусть $\dfrac{a_i(r,\theta,t)}{k_3(t)}, \dfrac{b(r,\theta,t)}{k_3(t)}, \dfrac{c(r,\theta,t)}{k_3(t)} \in C(\bar{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta), i = 1,2.$

Тогда справедлива

Теорема 1. *Если выполняется условие*

$$\cos \mu_{s,n}\beta' \neq 0, \;\; s = 1, 2, ..., \tag{4}$$

то решение задачи 1 в классе $C^1(\bar{D}_\beta) \cap C^2(\bar{D}_\beta)$ *тривиальное, где* $\mu_{s,n}$ — *положительные нули функций Бесселя первого рода* $J_n(z)$, $\beta' = \int\limits_0^\beta \sqrt{\frac{k_1(\xi)+k_2(\xi)}{2k_3(\xi)}} d\xi, \;\; n = 0, 1....$

3. Доказательство теоремы

Расмотрим задачу (1), (3) и докажем, что ее решение нулевое. Для этого сначала построим решение задачи Дирихле для уравнения (2) с данными

$$\upsilon|_{S_\beta \cup \Gamma_\beta} = 0, \upsilon|_{S_o} = \tau(r, \theta) = \tau_{10}(r), \tag{5}$$

$\tau_{10}(r) \in G$, где G — множество функций $\tau(r)$ из класса $C^1([0, 1]) \cap C^2((0, 1))$. Очевидно, что G плотно всюду в $L_2([0, 1])$ [8].

Решение задачи (2), (4) в полярных координатах будем искать в виде ряда

$$\upsilon(r, \theta, t) = \upsilon_{10}(r, t) + \sum_{n=1}^{\infty} (\upsilon_{1n}(r, t) \cos n\theta + \upsilon_{2n}(r, t) \sin n\theta), \tag{6}$$

где $\upsilon_{10}(r, t)$, $\upsilon_{1n}(r, t)$, $\upsilon_{2n}(r, t)$ — функции, которые будут определены ниже.

Подставляя (6) в (1), в полярных координатах будем иметь

$$\begin{aligned}
L\upsilon \equiv k_1(t) \left(\cos^2 \theta \upsilon_{10rr} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \upsilon_{10r} \right) + \\
+ k_2(t) \left(\sin^2 \theta \upsilon_{10rr} + \frac{\cos^2 \theta}{r} \upsilon_{10r} \right) - k_3(t) \upsilon_{10tt} - \\
- a_1(r, \theta, t) \cos \theta \upsilon_{10r} - a_2(r, \theta, t) \sin \theta \upsilon_{10r} - b(r, \theta, t) \upsilon_{10t} + d(r, \theta, t) \upsilon_{10} + \\
+ \sum_{i=1}^{2} \Bigg\{ k_1(t) \Bigg[\cos^2 \theta (\cos n\theta \upsilon_{1nrr} + \sin n\theta \upsilon_{2nrr}) + \\
+ \frac{\sin^2 \theta}{r} (\cos n\theta \upsilon_{1nr} + \sin n\theta \upsilon_{2nr}) + \frac{n \sin 2\theta}{r} (\sin n\theta \upsilon_{1nr} - \cos n\theta \upsilon_{2nr}) + \\
+ \frac{n \sin 2\theta}{2r^2} (\cos n\theta \upsilon_{2n} - \sin n\theta \upsilon_{1n}) - \frac{n^2 \sin^2 \theta}{r^2} (\cos n\theta \upsilon_{1n} + \sin n\theta \upsilon_{2n}) \Bigg] + \\
+ k_2(t) \Bigg[\sin^2 \theta (\cos n\theta \upsilon_{1nrr} + \sin n\theta \upsilon_{2nrr}) + \\
+ \frac{n \sin 2\theta}{r} (\cos n\theta \upsilon_{2nr} - \sin n\theta \upsilon_{1nr}) + \frac{\cos^2 \theta}{r} (\cos n\theta \upsilon_{1nr} + \sin n\theta \upsilon_{2nr}) +
\end{aligned}$$

$$+\frac{n\sin 2\theta}{2r^2}(\sin n\theta\upsilon_{1n}-\cos n\theta\upsilon_{2n})-\frac{n^2}{r^2}\cos^2\theta(\cos n\theta\upsilon_{1n}+\sin n\theta\upsilon_{2n})\Bigg]-$$

$$-k_3(t)\upsilon_{1ntt}\cos n\theta-\upsilon_{2nt}\sin n\theta-$$

$$-a_1\left[\cos\theta(\cos n\theta\upsilon_{1nr}+\sin n\theta\upsilon_{2nr})+\frac{n\sin\theta}{r}(\sin n\theta\upsilon_{1n}-\cos n\theta\upsilon_{2n})\right]-$$

$$-a_2\left[\sin\theta(\cos n\theta\upsilon_{1nr}+\sin n\theta\upsilon_{2nr})+\frac{n\cos\theta}{r}(\cos n\theta\upsilon_{2n}-\sin n\theta\upsilon_{1n})\right]-$$

$$-b(\cos n\theta\upsilon_{1nt}+\sin n\theta\upsilon_{2nt})+d(\cos n\theta\upsilon_{1n}+\sin n\theta\upsilon_{2n})\Bigg\}=0. \quad (7)$$

Теперь полученное выражение (6) сначала умножим на $\rho(\theta)\neq 0$, а затем проинтегрируем от 0 до 2π. После несложных преобразований получим ряд

$$\frac{(k_1+k_2)}{2}\rho_{10}\left(\upsilon_{10rr}+\frac{1}{r}\upsilon_{10r}\right)-k_3(t)\rho_{10}\upsilon_{10tt}+\frac{(k_1-k_2)}{2}d_{10}\left(\upsilon_{10rr}-\frac{1}{r}\upsilon_{10}\right)+$$

$$+a_{10}(r,t)\upsilon_{10r}+c_{10}(r,t)\upsilon_{10}+\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg\{\sum_{i=1}^{2}\Bigg[\frac{(k_1+k_2)}{2}\rho_{jn}(\upsilon_{jnrr}+$$

$$+\frac{1}{r}\upsilon_{jnr}-\frac{n^2}{r^2}\upsilon_{jn})-k_3(t)\rho_{jn}\upsilon_{jntt}+\frac{(k_1-k_2)}{2}d_{jn}\left(\upsilon_{jnrr}-\frac{1}{r}\upsilon_{jnr}+\frac{n^2}{r^2}\upsilon_{jn}\right)+$$

$$+\frac{(k_2-k_1)n}{2}e_{jn}\left(\upsilon_{jnr}-\frac{\upsilon_{jn}}{2r}\right)+a_{jn}(r,t)\upsilon_{jnr}+b_{jn}(r,t)\upsilon_{jnr}+$$

$$+c_{jn}(r,t)\upsilon_{jn}\Bigg]\Bigg\}=0, \quad (8)$$

$$\rho_{1n}=\int_0^{2\pi}\rho(\theta)\cos n\theta d\theta,\ \rho_{2n}=\int_0^{2\pi}\rho\sin n\theta d\theta,\ d_{1n}=\int_0^{2\pi}\rho\cos 2\theta\cos n\theta d\theta,$$

$$d_{2n}=\int_0^{2\pi}\rho\cos 2\theta\sin n\theta d\theta,\ e_{1n}=-\int_0^{2\pi}\rho\sin 2\theta\sin n\theta d\theta,\ e_{2n}=\int_0^{2\pi}\rho\sin 2\theta\cos n\theta d\theta,$$

$$a_{1n}=-\int_0^{2\pi}\rho(a_1\cos\theta+a_2\sin\theta)\cos n\theta d\theta,\ a_{2n}=-\int_0^{2\pi}\rho(a_1\cos\theta+a_2\sin\theta)\sin n\theta d\theta,$$

$$b_{1n}=-\int_0^{2\pi}\rho b\cos n\theta d\theta, b_{2n}=-\int_0^{2\pi}\rho b\sin n\theta d\theta,$$

$$c_{1n}=\int_0^{2\pi}\rho\left[(-a_1\sin\theta+a_2\cos\theta)\frac{n\sin n\theta}{r}+d\cos n\theta\right]d\theta,$$

$$c_{2n} = \int\limits_0^{2\pi} \rho \left[(-a_2 \cos\theta + a_1 \sin\theta) \frac{n \cos n\theta}{r} + d \sin n\theta \right] d\theta, \; n = 0, 1, \ldots .$$

Далее, рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$k(t)\rho_{10} \left(\upsilon_{10rr} + \frac{1}{r} \upsilon_{10r} \right) - \rho_{10} \upsilon_{10tt} = 0, \; k(t) = \frac{k_1(t) + k_2(t)}{2}, \tag{9}$$

$$k(t)\rho_{j1} \left(\upsilon_{j1rr} + \frac{1}{r} \upsilon_{j1r} - \frac{\upsilon_{j1}}{r^2} \right) - \rho_{10} \upsilon_{j1tt} =$$
$$= \frac{(k_1 - k_2) d_{10}}{2} \left(\upsilon_{10rr} - \frac{\upsilon_{10r}}{r} \right) - a_{10} \upsilon_{10r} - b_{10} \upsilon_{10t} - c_{10} \upsilon_{10}, \tag{10}$$

$$k(t)\rho_{jn} \left(\upsilon_{jnrr} + \frac{1}{r} \upsilon_{jnr} - \frac{n^2}{r^2} \upsilon_{jn} \right) - \rho_{jn} \upsilon_{jntt} =$$
$$= -\frac{(k_1 - k_2) d_{jn-1}}{2} \left(\upsilon_{jn-1rr} - \frac{1}{r} \upsilon_{jn-1r} + \frac{(n-1)^2}{r^2} \upsilon_{jn-1} \right) -$$
$$- \frac{(k_2 - k_1)(n-1)}{r} d_{jn-1} \left(\upsilon_{jn-1r} - \frac{\upsilon_{jn-1}}{r} \right) -$$
$$- a_{jn-1} \upsilon_{jn-1r} - b_{jn-1t} \upsilon_{jn-1t} - c_{jn-1} \upsilon_{jn-1}, \; j = 1, 2, \; n = 2, 3, \ldots . \tag{11}$$

Нетрудно показать, что если $\{\upsilon_{10}, \, \upsilon_{jn}\}, \; j = 1, 2, \; n = 1, 2, \ldots$ — решение системы (9), (11), то оно является и решением уравнения (8).

Далее, учитывая ортогональность [8] систем тригонометрических функций $\{\frac{1}{2}, \, \cos n\theta, \sin n\theta, \; n = 1, 2, \ldots\}$ на отрезке $[0, 2\pi]$, из краевого условия (5) в силу (6) будем иметь

$$\upsilon_{10}(r, \beta) = 0, \;\; \upsilon_{10}(1, t) = 0, \;\; \upsilon_{10}(r, 0) = \tau_{10}(r), \tag{12}$$

$$\upsilon_{jn}(r, \beta) = 0, \;\; \upsilon_{jn}(1, t) = 0, \;\; \upsilon_{jn}(r, 0) = 0, \;\; j = 1, 2, \;\; n = 1, 2, \ldots . \tag{13}$$

Таким образом, задача (2), (5) сведена к системе задач для уравнений (9)–(11) с данными (12), (13). Теперь будем находить решения этих задач. Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (9)–(11) можно представить в виде

$$\bar{k}(t) \left(\upsilon^k_{nrr} + \frac{1}{r} \upsilon^k_{nr} - \frac{n^2}{r^2} \upsilon_n \right) - \upsilon_{ntt} = f^k_n(r, t), \; n = 0, 1, \ldots, \tag{14}$$

где $\bar{k}(t) = \dfrac{k(t)}{k_3(t)}$, $f_n(r, t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $f_0(r, t) \equiv 0$.

В [3, 4] показано, что при выполнений условии (4) задачи для уравнения (14) с краевыми условиями (12), (13) имеют единственные решения.

Таким образом, решение задач (2), (5) в виде (6) построено.

Аналогичним образом строится решение этой задачи, если

$$\tau(r, \theta) = \tau_{1n}(r) \cos n\theta + \tau_{2n} \sin n\theta, \; n = 1, 2, \ldots .$$

Для взаимносопряженных операторов $\bar{L}$, $\bar{L}^*$

$$\bar{L} \equiv \sum_{i=1}^{2} g_i(t)\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^{2} \bar{a}_i \frac{\partial^2}{\partial x_i} + \bar{b}\frac{\partial}{\partial t} + \bar{c},$$

$$\bar{L}^* \equiv \sum_{i=1}^{2} g_i(t)\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{2} \bar{a}_i \frac{\partial^2}{\partial x_i} - \bar{b}\frac{\partial}{\partial t} - \bar{d},$$

$$\bar{L} = k_3(t)L,\ \bar{L}^* = k_3(t)L^*,\ g_i(t) = \frac{k_i(t)}{k_3(t)},$$

где $\dfrac{a_i(r,\theta,t)}{k_3(t)} = \bar{a_i}(r,\theta,t)$, $\dfrac{b(r,\theta,t)}{k_3(t)} = \bar{b}(r,\theta,t)$, $\dfrac{c(r,\theta,t)}{k_3(t)} = \bar{c}(r,\theta,t)$, $\dfrac{d(r,\theta,t)}{k_3(t)} = \bar{d}(r,\theta,t)$, $i = 1,2$, имеет место формула Грина [9]

$$\int\limits_{\partial D_\beta} k_3(t)(\upsilon Lu - uL\upsilon)dD_\beta = \int\limits_{\partial D_\beta} (\upsilon\bar{L}u - u\bar{L}^*\upsilon)dD_\beta = \int\limits_{\partial D_\beta} [(\upsilon\frac{\partial u}{\partial N} - u\frac{\partial \upsilon}{\partial N}) + u\upsilon Q]ds, \tag{15}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial N} = \sum_{i=1}^{2} g_i(t) cos(N^\perp, x_i)\frac{\partial}{\partial x_i} + cos(N^\perp, t)\frac{\partial}{\partial t},$$

$$Q = \sum_{i=1}^{2} \bar{a}_i cos(N^\perp, x_i) + \bar{b} cos(N^\perp, t),$$

а $N^\perp$ — внутренняя нормаль к границе ∂D_β.

Принимая во внимание однородные граничные условия (2) и условия (4), из (15) получим

$$\int\limits_{S_0} \tau(r,\theta)u_t(r,\theta,0)ds = 0. \tag{16}$$

Следовательно, в силу единственности решения задачи Коши [9]: $\bar{L}u = 0, u(x,0) = u_t(x,0) = 0$ вытекает, что $u(x,t) \equiv 0, \forall(x,t) \in D_\beta$.

Так как $k_3(t)Lu = \bar{L}u = 0$ и $k_3(t) > 0$ при $t > 0$, то будем иметь $Lu = 0$ и $u(x,t) \equiv 0$ в D_β. Таким образом, теорема доказана.

Література

1. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных — Москва: Наука, 1981. — 448 с.
2. Нахушев А. Москва Задачи со смещением для уравнения в частных производных — Москва: Наука, 2006. — 287 с.
3. Алдашев С. А. Корректность задачи Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для многомерного уравнения Чаплыгина // Владикавказский матем. журнал. — 1998. — Т. 15, вып. 2. — С. 3–10

4. Алдашев С. А. Корректность задач Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для вырождающихся многомерных гиперболических уравнения с оператором Чаплыгина // Научные ведомости БелГУ, серия: Математика, физика. —2012. — №5(124), вып.26. — С. 12–25
5. Алдашев С. А. Задача Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для вырождающихся трехмерных гиперболических уравнений // Тезисы докладов научной конференции „Современные проблемы дифференциальных уравнений и их применения“ — Ташкент: Нац. университет Узбекистана. — 2013. — С.29–30.
6. Алдашев С. А. Задача Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для вырождающихся трехмерных гиперболических уравнений // Тезисы докладов IV межд. конференции „Математическая физика и ее приложения“. — Самара: СамГТУ, 2014. — С. 46.
7. Китайбеков Е. Т. Задача Дирихле в цилиндрической области для трехмерных гиперболических уравнений с вырождением типа и порядка // Вестник КазНПУ им. Абая, серия физ.-мат. науки. — 2015. — №4(52). — С. 27–31.
8. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — Москва: Наука, 1976. — 543 с.
9. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 4. — Москва: Наука, 1981. — 550 с.

Поступила 20.01.2016