Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2016, №3(123) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.233.2+681.5

MSC 62H12, 93E24

RECURRENT NON-STATIONARY PARAMETER ESTIMATION BY THE LEAST SQUARES METHOD WITH VARIABLE FORGETTING FACTOR AND LEAST DEVIATION NORM FROM „ATTRACTION“ POINTS FOR LINEAR DYNAMIC SYSTEMS UNDER NON-CLASSICAL ASSUMPTIONS

Alexander S. Slabospitsky

Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, E-mail: sl@univ.kiev.ua.

РЕКУРЕНТНЕ ОЦІНЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ПАРАМЕТРІВ МЕТОДОМ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ ЗІ ЗМІННИМ ФАКТОРОМ ЗАБУВАННЯ ТА НАЙМЕНШОЮ НОРМОЮ ВІДХИЛЕННЯ ВІД ТОЧОК „ТЯЖІННЯ“ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ПРИ НЕКЛАСИЧНИХ ПРИПУЩЕННЯХ

О. С. Слабоспицький

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна, E-mail: sl@univ.kiev.ua.

Abstract. The estimation problem of non-stationary parameters is considered for linear discrete dynamic system in the case when for parameter matrix its 'attraction' point is known at any moment. Explicit and recurrent forms of representation are obtained for parameter estimate by the least squares method with variable forgetting factor and minimal deviation norm from „attraction“ points for above-mentioned object under non-classical assumptions. The recurrent algorithm is proposed for corresponding weighted residual sum of squares too.
Keywords: non-stationary parameter estimation, pseudo-inverse operator, linear discrete dynamic system, least squares method, variable forgetting factor, recurrent algorithm, weighted residual sum of squares, „attraction“ points.

Резюме. Для лінійної дискретної динамічної системи розглядається задача оцінювання нестаціонарних параметрів у випадку, коли в кожен момент для матриці параметрів відома її точка „тяжіння“. Для оцінки параметрів методом найменших квадратів зі змінним фактором забування та мінімальною нормою відхилення від точок „тяжіння“ отримано явну та рекурентну форми представлення для вищезгаданого об'єкту при некласичних припущеннях. Також запропоновано рекурентний алгоритм для відповідної зваженої залишкової суми квадратів.

Ключові слова: оцінювання нестаціонарних параметрів, оператор псевдообернення, лінійна дискретна динамічна система, метод найменших квадратів, змінний фактор забування, рекурентний алгоритм, зважена залишкова сума квадратів, точки „тяжіння“.

Вступ

Дослідження складних об'єктів важко уявити без побудови для них якісних математичних моделей. Одна з першочергових проблем, яка виникає при цьому, полягає у знаходженні оптимальних у деякому розумінні оцінок невідомих параметрів обраної моделі. У залежності від об'єму апріорної інформації про наявні невизначеності в об'єкті можна скористатися відповідним підходом при розв'язанні останньої задачі [1, 2]. Один з них, який не втрачає своєї актуальності, базується на методі найменших квадратів (МНК) [3].

Використання оцінки МНК, коли можливе порушення класичних припущень, які гарантують її єдиність, потребує окремої уваги. У цій ситуації складно обійтися без використання оператора псевдообернення за Муром-Пенроузом [4, 5]. При таких припущеннях у роботі [6] оцінку МНК з найменшою нормою для стаціонарних параметрів регресійної моделі було досліджено, а для цієї оцінки та відповідної залишкової суми квадратів було отримано відповідні рекурентні процедури. Потім у публікаціях [7, 8] останні результати було перенесено на випадок оцінювання нестаціонарних параметрів регресійної моделі. Це стало можливим завдяки використанню МНК зі змінним фактором забування.

Припустимо, що додатково до останніх припущень про можливе порушення класичних припущень, які гарантують єдиність оцінки МНК, доступна інформація про точки "тяжіння" невідомих параметрів об'єкту. Тоді логічно замість оцінки МНК з найменшою нормою використовувати оцінку МНК з найменшою нормою відхилення від відповідної точки „тяжіння“ у кожен момент часу. Для цієї оцінки стаціонарних параметрів регресійної моделі та відповідної залишкової суми квадратів у роботі [9] було отримано рекурентні алгоритми. Потім останні результати було перенесено на задачу оцінювання нестаціонарних параметрів регресійної моделі за допомогою МНК зі змінним фактором забування [10, 11].

Дану роботу присвячено поширенню останніх результатів на випадок оцінювання нестаціонарних параметрів лінійної дискретної динамічної системи за допомогою методу найменших квадратів зі змінним фактором забування та найменшою нормою відхилення від відомих точок „тяжіння“ у кожен момент часу.

1. Постановка задачі

Розглянемо задачу оцінювання матриці невідомих параметрів A для лінійної дискретної динамічної системи

$$x(k+1) = Ax(k) + \xi(k), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

де $x(k) = \Big(x_1(k), x_2(k), \ \dots \ , \ x_n(k)\Big)^T$, $\xi(k) = \Big(\xi_1(k), \xi_2(k), \ \dots \ , \ \xi_n(k)\Big)^T$ — вектори фазового стану та похибок моделі відповідно, $A \in M_n(\mathbb{R})$, $x(k)$ — відомі, $M_n(\mathbb{R})$ — множина квадратних матриць порядку n з дійсними елементами.

Припустимо, що матриця невідомих параметрів A може повільно змінюватися з часом та для неї в кожен момент N задано точку „тяжіння“ $A_*(N) = \Big(a_{1*}(N), a_{2*}(N), \ \dots \ , \ a_{n*}(N)\Big)^T$, $a_{i*}(N) \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{1,n}$, $N = 0, 1, 2, \ \dots$.

Введемо позначення

$$Q(A,N) = \sum_{k=1}^{N} w(k,N)\, \|\xi(k)\|^2, \tag{2}$$

де

$$w(k,N) = \left[\begin{array}{ll} \prod\limits_{i=k}^{N-1} \lambda(i), & \text{якщо } k = \overline{1, N-1}, \\ 1, & \text{якщо } k = N, \end{array} \right.$$

а $\lambda(i)$ — заданий фактор забування ($\lambda(i) \in (0,1], \ i \in \mathbb{N}$).

Оцінка матриці параметрів A методом найменших квадратів зі змінним фактором забування $\{\lambda(k)\}_{k=1}^{\infty}$ у припущенні можливого порушення класичних припущень, які гарантують її єдиність, може бути не єдиною і множина усіх цих оцінок матриць визначається як

$$\operatorname{Arg}\min_{A} Q(A,N).$$

Необхідно у кожен момент N знайти в якості єдиної оцінки на останній множині оцінок оцінку $\hat{A}(N)$ з найменшою нормою відхилення від матриці $A_*(N)$ і отримати для оцінки $\hat{A}(N)$ та відповідної зваженої залишкової суми квадратів $q(N) = Q(\hat{A}(N), N)$ рекурентні алгоритми.

2. Отримання явної форми представлення оцінки

Явний вигляд шуканої оцінки $\hat{A}(N)$ задає нижченаведене твердження.

Теорема 1. *Оцінка $\hat{A}(N)$ методу найменших квадратів зі змінним фактором забування та з найменшою нормою відхилення від точки "тяжіння" $A_*(N)$ у довільний момент часу N для лінійної дискретної динамічної системи* (1) *при некласичних припущеннях, що не гарантують єдиність оцінки, визначається так:*

$$\hat{A}(N) = \left[\tilde{X}_{1,N}^{+} \tilde{X}_{2,N+1}\right]^T + A_*(N)\left[E_n - \tilde{X}_{1,N}^{+} \tilde{X}_{1,N}\right], \quad N \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

де $(^+)$ *— символ псевдообернення за Муром-Пенроузом,* E_n *— одинична матриця порядку* n*,*

$$\tilde{X}_{1+i,N+i} = \begin{pmatrix} w^{\frac{1}{2}}(1,N)\,x^T(1+i) \\ w^{\frac{1}{2}}(2,N)\,x^T(2+i) \\ \vdots \\ w^{\frac{1}{2}}(N,N)\,x^T(N+i) \end{pmatrix}, \quad i=\overline{0,1}.$$

Доведення. Представимо систему рівнянь (1) у такому вигляді:

$$\tilde{X}^T_{2,N+1} = A\tilde{X}^T_{1,N} + \tilde{\Xi}^T_N, \quad N \in \mathbb{N},$$

де

$$\tilde{\Xi}_N = \begin{pmatrix} w^{\frac{1}{2}}(1,N)\,\xi^T(1) \\ w^{\frac{1}{2}}(2,N)\,\xi^T(2) \\ \vdots \\ w^{\frac{1}{2}}(N,N)\,\xi^T(N) \end{pmatrix}.$$

А оскільки справедливо

$$\operatorname{Arg}\min_A Q(A,N) = \operatorname{Arg}\min_A \|\tilde{\Xi}_N\|^2,$$

тоді на цій множині оцінок шукана оцінка згідно роботи [12] буде мати вигляд

$$\hat{A}(N) = \tilde{X}^T_{2,N+1}\left(\tilde{X}^T_{1,N}\right)^+ + A_*(N)\left[E_n - \tilde{X}^T_{1,N}\left(\tilde{X}^T_{1,N}\right)^+\right] =$$
$$= \left[\tilde{X}^+_{1,N}\tilde{X}_{2,N+1}\right]^T + A_*(N)\left[E_n - \tilde{X}^+_{1,N}\tilde{X}_{1,N}\right], \quad N \in \mathbb{N}.$$

Теорему доведено. □

3. Побудова рекурентних алгоритмів

Перейдемо до побудови рекуренту для оцінки $\hat{A}(N)$ матриці невідомих параметрів A об'єкта (1).

Теорема 2. *Рекурентний алгоритм для оцінки* (3) *матриці параметрів* A *методом найменших квадратів зі змінним фактором забування та найменшою нормою відхилення від відомих точок „тяжіння“* $A_*(N)$ *у кожен момент часу* N *для лінійної дискретної динамічної системи* (1) *при некласичних припущеннях, що не гарантують єдиність оцінки, має такий вигляд:*

якщо $\delta(N+1) > 0$, *то*

$$\begin{cases} \hat{A}(N+1) = \hat{A}(N) + \\ \qquad + \dfrac{1}{\delta(N+1)} \Big[x(N+2) - \hat{A}(N)x(N+1) \Big] \, x^T(N+1)P(N) + \\ \qquad + \left[A_*(N+1) - A_*(N) \right] \times \\ \qquad \times \left[P(N) - \dfrac{1}{\delta(N+1)} P(N)x(N+1)x^T(N+1)P(N) \right], \\ R(N+1) = \dfrac{1}{\lambda(N)} \Big\{ R(N) - \\ \qquad - \dfrac{1}{\delta(N+1)} \Big[R(N)x(N+1)x^T(N+1)P(N) + \\ \qquad + P(N)x(N+1)x^T(N+1)R(N) \Big] + \\ \qquad + \dfrac{\gamma(N+1)}{\delta^2(N+1)} P(N)x(N+1)x^T(N+1)P(N) \Big\}, \\ P(N+1) = P(N) - \dfrac{1}{\delta(N+1)} P(N)x(N+1)x^T(N+1)P(N), \end{cases} \tag{4}$$

а у протилежному випадку

$$\begin{cases} \hat{A}(N+1) = \hat{A}(N) + \\ \qquad + \dfrac{1}{\gamma(N+1)} \Big[x(N+2) - \hat{A}(N)x(N+1) \Big] \, x^T(N+1)R(N) + \\ \qquad + \left[A_*(N+1) - A_*(N) \right] P(N), \\ R(N+1) = \dfrac{1}{\lambda(N)} \Big\{ R(N) - \\ \qquad - \dfrac{1}{\gamma(N+1)} R(N)x(N+1)x^T(N+1)R(N) \Big\}, \\ P(N+1) = P(N) \end{cases} \tag{5}$$

з початковими умовами

$$\hat{A}(0) = A_*(0), \ R(0) = \Theta_n, \ P(0) = E_n,$$

де Θ_n *— нульова матриця порядку* n, $\delta(N+1) = x^T(N+1)P(N)x(N+1)$, $\gamma(N+1) = \lambda(N) + x^T(N+1)R(N)x(N+1)$.

Доведення. Легко бачити, що $Q(A,N) = \sum\limits_{i=1}^{n} Q_i(a_i,N)$, де

$$Q_i(a_i,N) = \sum_{k=1}^{N} w(k,N)\, \xi_i^2(k), \quad i = \overline{1,n}. \tag{6}$$

Тоді задача знаходження оцінки (3) для матриці $A = \Big(a_1, a_2, \ \ldots \ , a_n\Big)^T$ для лінійної дискретної динамічної системи (1) з функціоналом якості (2) розщеплюється на n задач пошуку оцінок $\hat{a}_i(N)$ для a_i методом найменших квадратів зі змінним фактором забування та найменшою нормою відхилення від відомих точок „тяжіння“ $a_{i*}(N)$ у кожен момент часу N при некласичних припущеннях, що не гарантують єдиність оцінки, для систем

$$x_i(k+1) = x^T(k)a_i + \xi_i(k), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

з функціоналом якості (6), $i = \overline{1,n}$.

Але для оцінок $\hat{a}_i(N)(i = \overline{1,n})$ рекурентні форми представлення згідно [10] мають вигляд:

якщо $\delta(N+1) > 0$, то

$$\begin{cases} \hat{a}_i(N+1) = \hat{a}_i(N) + \\ \qquad + \dfrac{1}{\delta(N+1)} P(N)x(N+1)\left[x_i(N+2) - \hat{a}_i^T(N)x(N+1)\right] + \\ \qquad + \left[P(N) - \dfrac{1}{\delta(N+1)} P(N)x(N+1)x^T(N+1)P(N)\right] \times \\ \qquad \times \left[a_{i*}(N+1) - a_{i*}(N)\right], \\ R(N+1) = \dfrac{1}{\lambda(N)}\left\{R(N) - \right. \\ \qquad - \dfrac{1}{\delta(N+1)}\left[R(N)x(N+1)x^T(N+1)P(N) + \right. \\ \qquad \left. + P(N)x(N+1)x^T(N+1)R(N)\right] + \\ \qquad \left. + \dfrac{\gamma(N+1)}{\delta^2(N+1)} P(N)x(N+1)x^T(N+1)P(N)\right\}, \\ P(N+1) = P(N) - \dfrac{1}{\delta(N+1)} P(N)x(N+1)x^T(N+1)P(N), \end{cases}$$

а у протилежному випадку

$$\begin{cases} \hat{a}_i(N+1) = \hat{a}_i(N) + \\ \qquad + \dfrac{1}{\gamma(N+1)} R(N)x(N+1)\left[x_i(N+2) - \hat{a}_i^T(N)x(N+1)\right] + \\ \qquad + P(N)\left[a_{i*}(N+1) - a_{i*}(N)\right], \\ R(N+1) = \dfrac{1}{\lambda(N)}\left\{R(N) - \right. \\ \qquad \left. - \dfrac{1}{\gamma(N+1)} R(N)x(N+1)x^T(N+1)R(N)\right\}, \\ P(N+1) = P(N) \end{cases}$$

з початковими умовами

$$\hat{a}_i(0) = a_{i*}(0), \; R(0) = \Theta_n, \; P(0) = E_n.$$

Після об'єднання рекурентних співвідношень для оцінок $\hat{a}_i(N)$ $(i = \overline{1,n})$ отримаємо такі алгоритми для рекурентного перерахунку оцінок $\hat{A}^T(N)$:

якщо $\delta(N+1) > 0$, то

$$\begin{aligned}\hat{A}^T(N+1) = {} & \hat{A}^T(N) + \\ & + \frac{1}{\delta(N+1)} P(N)x(N+1)\left[x(N+2) - \hat{A}(N)x(N+1)\right]^T + \\ & + \left[P(N) - \frac{1}{\delta(N+1)} P(N)x(N+1)x^T(N+1)P(N)\right] \times \\ & \times \left[A_*(N+1) - A_*(N)\right]^T,\end{aligned}$$

а у протилежному випадку

$$\begin{aligned}\hat{A}^T(N+1) = {} & \hat{A}^T(N) + \\ & + \frac{1}{\gamma(N+1)} R(N)x(N+1)\left[x(N+2) - \hat{A}(N)x(N+1)\right]^T + \\ & + P(N)\left[A_*(N+1) - A_*(N)\right]^T.\end{aligned}$$

Після транспонування останніх співвідношень отримаємо потрібний рекурентний алгоритм (4–5). □

Теорема 3. *Рекурентний алгоритм для зваженої залишкової суми квадратів $q(N) = Q(\hat{A}(N), N)$ для системи (1) з функціоналом якості (2) має вигляд*

$$q(N+1) = \left[\begin{array}{l} \lambda(N)q(N), \ \textit{якщо}\ \delta(N+1) > 0, \\ \lambda(N)\left\{q(N) + \dfrac{1}{\gamma(N+1)}\|x(N+2) - \hat{A}(N)x(N+1)\|^2\right\} \\ \qquad\qquad \textit{у протилежному випадку} \end{array}\right. \tag{8}$$

з початковою умовою $q(0) = 0$.

Доведення. Для систем (7) з функціоналами якості (6) введемо позначення для відповідних зважених залишкових сум квадратів $q_i(N) = Q_i(\hat{a}_i(N), N), \quad i = \overline{1, n}$.

Але для $q_i(N)$ згідно роботи [11] справедливе рекурентне співвідношення

$$q_i(N+1) = \left[\begin{array}{l} \lambda(N)q_i(N), \ \text{якщо}\ \delta(N+1) > 0, \\ \lambda(N)\left\{q_i(N) + \dfrac{1}{\gamma(N+1)}\left[x_i(N+2) - \hat{a}_i^T(N)\,x(N+1)\right]^2\right\} \\ \qquad\qquad \text{у протилежному випадку} \end{array}\right.$$

з початковою умовою $q_i(0) = 0, \quad i = \overline{1, n}$.

Остаточний результат легко отримати після врахування, що $q(N) = \sum_{i=1}^{n} q_i(N), \quad N = 0, 1, 2, \ \ldots$. □

Висновки

Для оцінки матриці нестаціонарних параметрів лінійної дискретної динамічної системи (1) методом найменших квадратів зі змінним фактором забування та з найменшою нормою відхилення від заданої точки "тяжіння" у кожен момент часу при некласичних припущеннях, що не гарантують її єдиність, отримано явну (3) та рекурентну (4–5) форми представлення. Запропоновано рекурентну процедуру (8) для перерахунку відповідної зваженої залишкової суми квадратів.

Література

1. Eykhoff P. System Identification: Parameter and State Estimation — Chichester, England: Wiley, 1974. — 555 p.
2. Ljung L. System Identification: Theory for the User — Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1987. — 544 p.
3. Hsia T. C. System Identification. Least-squares Methods — Toronto: Lexington Books, 1977. — 165 p.
4. Moore E. H. On the reciprocal of the general algebraic matrix // Bull. American Mathematical Society. — 1920. — V. 26, № 9. — P. 394–395.
5. Penrose R. A generalized inverse for matrices // Proc. Cambridge Philoc. Soc. — 1955. — V. 51, № 3. — P. 406–413.
6. Albert A. Regression and the Moore-Penrose Pseudoinverse — New York: Academic Press, 1972. — 180 p.
7. Слабоспицький О. С. Рекурентний алгоритм оцінювання методом найменших квадратів зі змінним фактором забування при некласичних припущеннях // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. — 1999. — №4. — С. 237–240.
8. Слабоспицький О. С. Рекурентне оцінювання нестаціонарних параметрів методом найменших квадратів зі змінним фактором забування при некласичних припущеннях // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. — 2000. — №1. — С. 282–285.
9. Слабоспицький О. С. Використання додаткової інформації в рекурентному оцінюванні параметрів систем з дискретним часом методом найменших квадратів при некласичних припущеннях // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. — 2008. — №4. — С. 179–182.
10. Слабоспицький О. С. Оцінювання нестаціонарних параметрів методом найменших квадратів зі змінним фактором забування та мінімальною нормою відхилення від точок „тяжіння" для систем при некласичних припущеннях // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фіз.-мат. науки. — 2012. — №4. — С. 199–202.
11. Слабоспицький О. С. Рекурентне оцінювання нестаціонарних параметрів систем при некласичних припущеннях методом найменших квадратів зі змінним фактором забування та найменшою нормою відхилення від точок „тяжіння" // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2012. — №2 (108). — С. 59–65.
12. Слабоспицький О. С. Оцінювання параметрів лінійних дискретних динамічних систем методом найменших квадратів з мінімальним відхиленням від точок „тяжіння" при некласичних припущеннях // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. — 2009. — №4. — С. 135–138.

Надійшла 05.10.2016