Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2016, №3(123) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.2
MSC 519.2

ASYMPTOTIC PROPERTIES OF THE MULTICHANNAL MODELS WITH BIVARIATE INPUT FLOWS

Alexander Chechelnitski, Olga Kucherenko
Faculty of Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, E-mail: che@unicyb.kiev.ua.

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ БАГАТОКАНАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ З ДВОВИМІРНИМИ ПОТОКАМИ ВИМОГ

О. А. Чечельницький, О. В. Кучеренко
Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна, E-mail:che@unicyb.kiev.ua.

Abstract. The present article is devoted to research the two multichannel networks with bivariate Poisson input flow. The first model consists of two Erlang queues and the second model consists of the two infinite-server queues. The service time has the exponential distribution. The stochastic dynamic of our model can be defined by bivariate Markov chain. As a result, analysis of such networks is much more difficult. Besides we assume that customers arrive to our model according a bivariate Poisson input flow. This input process is characterized by the fact that pairs of customers arrive simultaneously. We study the stochastic process of the number of customers in the systems at time. We find the stationary joint distribution of the number of customers in the nodes. In the case of heavy traffic we prove functional limit theorem about diffusion approximation of the service process.
Keywords: network model, bivariate input flow, stationary distribution, diffusion approximation.

Резюме. У статті вивчаються мережеві моделі, які складаються з багатоканальних систем з двовимірними пуассонівськими вхідними потоками вимог. Перша розглянута модель складається з двох систем Ерланга, а друга — з двох систем з нескінченною кількістю приладів. Час обслуговування в системах є показниковим. Вивчення моделей ускладнюється двовимірністю відповідних ланцюгів Маркова, які описують динаміку їх функціонування. Ми передбачуємо, що вимоги надходять до мережевої моделі згідно з двовимірним потоком Пуассона, тобто вимоги з нього можуть надходити парами одночасно. Вивчається стохастичний процесс числа вимог у вузлах моделі. Знайдено спільний стаціонарний розподіл числа вимог у вузлах. Для перевантаженого режиму доведено функціональну граничну теорему про дифузійну апроксимацію процесу обслуговування.

Ключові слова: мережева модель, двовимірний вхідний потік, стаціонарний розподіл, дифузійна апроксимація.

Вступ

Останнім часом багатоканальні мережеві моделі є об'єктом інтенсивних досліджень. Це пов'язано з їх широким застосуванням у реальних мережах зв'язку і мережах банкоматів [5], [6].

Сучасні комунікаційні та комп'ютерні мережі характеризуються все більш складними структурами, що вимагає створення і аналізу відповідних математичних моделей. Багатоканальні моделі систем обслуговування вже давно використовуються в різних сферах практичної діяльності. У цій статті ми розглянемо дві мережеві моделі. Перша модель складається з двох систем Ерланга типу $[M/M/m/0]$, а друга — з двох систем типу $[M/M/\infty]$. Обидві моделі мають зовнішній двовимірний пуассонівський потік вимог $(\nu_1(t), \nu_2(t))$ з параметрами $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $b > 0$.

1. Стаціонарні характеристики мережевої моделі з системами Ерланга

Позначимо через m_1 число обслуговуючих приладів в першій системі Ерланга, відповідно m_2 є числом облуговуючих приладів в другій системі. Вимоги з потоку $\nu_1(t)$ прибувають для обслуговування на першу систему, а вимоги з потоку $\nu_2(t)$ прибувають на другу систему. Будемо передбачати, що час обслуговування вимог з потоку $\nu_1(t)$ має показниковий розподіл з параметром $\mu_1 > 0$, а час обслуговування вимог з потоку $\nu_2(t)$ має показниковий розподіл з параметром $\mu_2 > 0$ відповідно. Кожна вимога обслуговується лише однією системою. Нехай $X_1(t)$ — число вимог, які знаходяться на обслуговуванні в першій системі Ерланга в момент часу t, а $X_2(t)$ — число вимог, які знаходяться на обслуговуванні в другій системі в момент часу t. Справедлива така теорема.

Теорема 1. *Процес обслуговування моделі з двох систем Ерланга* $(X_1(t), X_2(t))$ *має ергодичний розподіл такого виду*

$$\lim_{t\to+\infty} P\{X_1(t)=i, X_2(t)=j\} = \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \frac{a_1^{i-k}a_2^{j-k}a_3^k}{k!(i-k)!(j-k)!}\times$$

$$\times\Big(\sum_{i=0}^{m_1}\sum_{j=0}^{m_2}\Big(\sum_{k=0}^{\min(i,j)} \frac{a_1^{i-k}a_2^{j-k}a_3^k}{k!(i-k)!(j-k)!}\Big)\Big)^{-1},$$

де $a_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{b\mu_2}{\mu_1(\mu_1+\mu_2)}$, $a_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} + \frac{b\mu_1}{\mu_2(\mu_1+\mu_2)}$, $a_3 = \frac{b}{\mu_1+\mu_2}$, $i = 1,\dots,m_1$, $j = 1,\dots,m_2$.

Доведення. За умови зроблених нами припущень на вхідний потік і час обслуговування вимог у системах двовимірний випадковий процес $(X_1(t), X_2(t))$ є двовимірним ланцюгом Маркова з неперервним часом. Поведінка цього ланцюга Маркова на інтервалі $[t, t+h]$ виглядає так: якщо в момент

часу t процес прийняв значення $X_1(t) = i$, $X_2(t) = j$, тоді наш двовимірний процес на інтервалі $[t, t+h]$ може перейти в такі стани з відповідними ймовірностями незалежно від значень, які він приймав до цього моменту $(X_1(s), X_2(s))$, $s < t$

$$(i,j) \to \begin{cases} (i+1,j) \quad \text{з ймовірністю} \quad \lambda_1 h + o(h); \\ (i,j+1) \quad \text{з ймовірністю} \quad \lambda_2 h + o(h); \\ (i+1,j+1) \quad \text{з ймовірністю} \quad bh + o(h); \\ (i-1,j) \quad \text{з ймовірністю} \quad \mu_1 ih + o(h); \\ (i,j-1) \quad \text{з ймовірністю} \quad \mu_2 jh + o(h); \\ (i,j) \quad \text{з ймовірністю} \quad 1 - (\lambda_1 + \lambda_2 + b + i\mu_1 + j\mu_2)h + o(h), \end{cases}$$

де $i = \overline{1, m_1 - 1}$, $j = \overline{1, m_2 - 1}$. Аналогічно ми можемо записати ймовірності переходів на інтервалі $[t, t+h]$ зі станів $(0,0), (0,j), (i,0)$, $i = \overline{1, m_1 - 1}$, $j = \overline{1, m_2 - 1}$, (m_1, m_2).

Крім того, будемо передбачати, що вхідний потік реагує на ситуацію, яка складається на системах Ерланга, а саме, одна з систем є повністю зайнятою, змінюючи свої інтенсивності так

$$(i,m_2) \to \begin{cases} (i+1,m_2) \quad \text{з ймовірністю} \quad (\lambda_1 + b\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2})h + o(h); \\ (i-1,m_2) \quad \text{з ймовірністю} \quad \mu_1 ih + o(h); \\ (i,m_2-1) \quad \text{з ймовірністю} \quad m_2\mu_2 h + o(h); \\ (i,m_2)\text{з ймовірністю} \quad 1 - (\lambda_1 + b\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2} + \mu_1 i + \mu_2 m_2)h + o(h) \end{cases}$$

і

$$(m_1,j) \to \begin{cases} (m_1,j+1) \quad \text{з ймовірністю} \quad (\lambda_2 + b\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2})h + o(h); \\ (m_1,j-1) \quad \text{з ймовірністю} \quad \mu_2 jh + o(h); \\ (m_1-1,j) \quad \text{з ймовірністю} \quad m_1\mu_1 h + o(h); \\ (m_1,j)\text{з ймовірністю} \quad 1 - (\lambda_2 + b\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2} + \mu_2 j + \mu_1 m_1)h + o(h). \end{cases}$$

Ймовірності переходів зі станів $(0,m_2), (m_1,0)$ мають також аналогічний вигляд

$$(0,m_2) \to \begin{cases} (1,m_2) \quad \text{з ймовірністю} \quad (\lambda_1 + b\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2})h + o(h); \\ (0,m_2-1) \quad \text{з ймовірністю} \quad m_2\mu_2 h + o(h); \\ (0,m_2)\text{з ймовірністю} \quad 1 - (\lambda_1 + b\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2} + \mu_2 m_2)h + o(h) \end{cases}$$

і

$$(m_1,0) \to \begin{cases} (m_1,1) \quad \text{з ймовірністю} \quad (\lambda_2 + b\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2})h + o(h); \\ (m_1-1,0) \quad \text{з ймовірністю} \quad m_1\mu_1 h + o(h); \\ (m_1,0)\text{з ймовірністю} \quad 1 - (\lambda_2 + b\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2} + \mu_1 m_1)h + o(h). \end{cases}$$

Використовуючи виписану вище структуру переходів нашого процесу, ми можемо виписати відповідну систему алгебраїчних рівнянь для стаціонарних ймовірностей $p_{ij} = P\{X_1 = i, X_2 = j\}$. Через велику розмірність ми не будемо її наводити в цій статті. Розв'язок цієї системи рівнянь існує і є єдиним на підставі наших припущень. Безпосередньою підстановкою в

рівняння показується, що він має такий вигляд

$$P\{X_1 = i, X_2 = j\} = \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \frac{a_1^{i-k} a_2^{j-k} a_3^k}{k!(i-k)!(j-k)!} \times$$

$$\times \left(\sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} \left(\sum_{k=0}^{\min(i,j)} \frac{a_1^{i-k} a_2^{j-k} a_3^k}{k!(i-k)!(j-k)!} \right) \right)^{-1},$$

де $a_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{b\mu_2}{\mu_1(\mu_1+\mu_2)}$, $a_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} + \frac{b\mu_1}{\mu_2(\mu_1+\mu_2)}$, $a_3 = \frac{b}{\mu_1+\mu_2}$, $i = \overline{0, m_1}$, $j = \overline{0, m_2}$.

Зауважимо, що двовимірний пуассонівський потік має таке представлення [3]

$$\nu_1(t) = y_1(t) + y_3(t), \quad \nu_2(t) = y_2(t) + y_3(t),$$

де $y_1(t)$ — пуассонівський потік з параметром $\lambda_1 > 0$, $y_2(t)$ — пуассонівський потік з параметром $\lambda_2 > 0$ і $y_3(t)$ в свою чергу є пуассонівським потоком з параметром $b > 0$. □

2. Стаціонарний розподіл мережевої моделі типу $[M/M/\infty]$ з двовимірним пуассонівським потоком вимог

Розглянемо тепер нашу мережеву модель у випадку, коли її вузли функціонують як системи обслуговування з нескінченною кількістю приладів. Стаціонарний розподіл числа зайнятих приладів для такої моделі можна отримати шляхом граничного переходу з виразу стаціонарного розподілу процесу обслуговування, коли вузлами моделі є системи Ерланга

$$\lim_{m_1,m_2\to+\infty} P\{X_1 = i, X_2 = j\} = \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \frac{a_1^{i-k} a_2^{j-k} a_3^k}{k!(i-k)!(j-k)!} \times$$

$$\times \lim_{m_1,m_2\to+\infty} \left(\sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} \left(\sum_{k=0}^{\min(i,j)} \frac{a_1^{i-k} a_2^{j-k} a_3^k}{k!(i-k)!(j-k)!} \right) \right)^{-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \frac{a_1^{i-k} a_2^{j-k} a_3^k}{k!(i-k)!(j-k)!} e^{-a_1-a_2-a_3},$$

де $a_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{b\mu_2}{\mu_1(\mu_1+\mu_2)}$, $a_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} + \frac{b\mu_1}{\mu_2(\mu_1+\mu_2)}$, $a_3 = \frac{b}{\mu_1+\mu_2}$.

3. Дифузійна апроксимація багатоканальної мережевої моделі з двовимірним пуассонівським потоком вимог

Стаціонарні ймовірності процесу обслуговування $(X_1(t), X_2(t))$ у мережевій моделі типу $[M/M/\infty]$ є дуже важливими. Проте, це є лише одновимірний розподіл процесу обслуговування в стаціонарному режимі. Вивчення багатьох інших характеристик, які залежать від поведінки всієї траєкторії процесу, викликає значні труднощі. За певних умов на інші характеристики моделі можна довести, що поведінка траєкторій процесу обслуговування буде асимптотично близькою до поведінки траєкторій відповідного

дифузійного процесу. Іншими словами, якщо довести збіжність процесу обслуговування до відповідного дифузійного процесу в рівномірній топології, то дослідження характеристик нашої моделі можна наближенно проводити через дослідження відповідного дифузійного процесу.

Припустимо, що наша модель перебуває в стаціонарному режимі, тобто, початковий розподіл числа зайнятих приладів буде дорівнювати

$$P\{X_1(0)=i, X_2(0)=j\} = \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \frac{a_1^{i-k} a_2^{j-k} a_3^k}{k!(i-k)!(j-k)!} e^{-a_1-a_2-a_3},$$

$$\text{де} \quad a_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{b\mu_2}{\mu_1(\mu_1+\mu_2)}, \; a_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} + \frac{b\mu_1}{\mu_2(\mu_1+\mu_2)}, \; a_3 = \frac{b}{\mu_1+\mu_2}.$$

Крім того, будемо вважати, що параметри нашої моделі залежать від n (номера серії)

$$\mu_i^{(n)} = \frac{\mu_i}{n} + o(n^{-1}).$$

Розглянемо таку послідовність випадкових процесів

$$\xi_n(t) = (\xi_n^1(t), \xi_n^2(t)), \quad n \geq 1, \quad t \in [0,T],$$

$$\xi_n^i(t) = n^{-1/2}(X_1^{(n)}(nt) - \alpha_i n), \quad i = 1,2,$$

де $\quad \alpha_1 = (\lambda_1 + b)/\mu_1, \quad \alpha_2 = (\lambda_2 + b)/\mu_2.$

Справедлива така теорема.

Теорема 2. *Послідовність випадкових процесів* $(\xi_n^1(t), \xi_n^2(t))$ *збігається в рівномірній топології до дифузійного процесу з коефіцієнтом переносу* $a(x) = (a_1(x), a_2(x))$ *і матрицею дифузії* B, *де*

$$(a_1(x), a_2(x)) = (-\mu_1 x, -\mu_2 x)$$

$$B = \begin{pmatrix} 2(\lambda_1+b) & b \\ b & 2(\lambda_2+b) \end{pmatrix}.$$

Доведення. Розподіл послідовності випадкових процесів збігається до дифузійного процесу з вектором переносу $a(x)$ і дифузійною матрицею B, якщо виконано такі умови

$$\xi_n(0) \to \xi_0, \quad n \to \infty, \tag{1}$$

$$\delta(n) = \sum_{k=0}^{d_n-1} E\left|E\{\Delta\xi_{n_k}/F_{n_k}\} - a(\xi_{n_k})\Delta t_{n_k}\right| \to 0, \quad n \to \infty, \tag{2}$$

$$\sum_{k=0}^{d_n-1} E\left|E\{(\Delta\xi_{n_k}, z)^2/F_{n_k}\} - (Bz,z)\Delta t_{n_k}\right| \to 0, \quad n \to \infty, \tag{3}$$

$$\sum_{k=0}^{d_n-1} P\{|\Delta\xi_{n_k}| \geq \varepsilon\} \to 0, \quad n \to \infty, \quad \varepsilon > 0, \tag{4}$$

де $\Delta\xi_{n_k} = \xi_{n_{k+1}} - \xi_{n_k}$, $\xi_{n_k} = \xi_n(t_{n_k})$, $\{t_{n_k}, k = 0,1,\ldots,d_n\}$ – розбиття інтервалу $[0,T]$ точками $0 = t_{n_0} < t_{n_1} < \ldots < t_{n_{d_n}} = T$, $\max_k \Delta t_{n_k} \to 0$, $F_{n_k} = F_n(t_{n_k})$, $\{F_n(t), t \in [0,T]\}$ – послідовність зростаючих σ-алгебр.

Перевіримо для послідовності $(\xi_n^1(t), \xi_n^2(t))$ умови збіжності до дифузійного процесу. Нехай $t_{n_k} = \frac{k}{d_n}T$ для всіх $n = 1, 2, \ldots$; $k = 1, 2, \ldots, d_n$ і $\lim_{n\to\infty} d_n/n = 0$, σ-алгебра $F_n(t)$ утворюється випадковими величинами $\{\xi_n(\tau), \tau \le t\}$.

Використовуючи метод характеристичних функцій, для довільного дійсного вектора $u = (u_1, u_2)$ отримаємо вигляд початкового розподілу

$$\lim_{n\to\infty} Ee^{i(u,\xi_n(0))} = e^{-\frac{1}{2}u_1^2\alpha_1 - \frac{1}{2}u_2^2\alpha_2 - u_1u_2a_3}.$$

Отже, умова (1) виконується і граничний вектор (ξ_0^1, ξ_0^2) має нормальний розподіл з вектором середніх $(0, 0)$ і коваріаційною матрицею C, де

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_1 & a_3 \\ a_3 & \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Для перевірки виконання умов (2), (3) і (4) ми використаємо таке представлення процесу $X_i(t)$, $i = 1, 2$

$$X_i(t) = \sum_{k=1}^{X_i(0)} \chi_k^{(i)}(t) + \sum_{k=1}^{\nu_i(t)} \chi_k^{(i)}(t - t_k).$$

Випадкова величина $\chi_k^{(i)}(t)$ приймає значення 1 з ймовірністю $\exp(-\mu_i t)$ і 0 з ймовірністю $1 - \exp(-\mu_i t)$ для всіх $k = 0, 1, 2, \ldots$; $i = 1, 2$.

Тоді

$$E(\Delta\xi_{n_k}^i / \xi_{n_k}^i = x_i) =$$
$$= E\{n^{-1/2}(X_i^{(n)}(nt_{n_{k+1}}) - n\alpha_i) - x_i / X_i^{(n)}(nt_{n_k}) = n\alpha_i + \sqrt{n}x_i\} =$$
$$= n^{-1/2}E\{\sum_{k=1}^{\sqrt{n}x_i + \alpha_i n} \chi_k^{(i)}(\Delta t_{n_k}) + \sum_{k=1}^{\nu_i(n\Delta t_{n_k})} \chi_n^i(t_{n_k} - t_k) - n\alpha_i - \sqrt{n}x_i\}.$$

Після низки перетворень отримаємо

$$E\{\Delta\xi_{n_k}^i / \xi_{n_k}^i = x_i\} = -x_i(1 - e^{-\mu_i\Delta t_{n_k}}) + o(\Delta t_{n_k}).$$

Крім того, неважко показати, що

$$E|\xi_{n_k}^i| = E\sqrt{(\xi_n^i(t_{n_k}))^2} \le \sqrt{E(\xi_n^i(t_{n_k}))^2} < C.$$

Зрештою будемо мати

$$\delta(n) = \sum_{k=0}^{d_n - 1} E|\xi_{n_k}^i(e^{-\mu_i\Delta t_{n_k}} - 1) - \xi_{n_k}^i\mu_i\Delta t_{n_k} - o(\Delta t_{n_k})| \le$$
$$\le Cd_n|e^{-\mu_i T/d_n} - 1 - \mu_i T/d_n| + d_n o\left(\frac{T}{n}\right) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Виконання умови (2) перевірено. Аналогічно перевіряється виконання умови (3) і (4). Збіжність у рівномірній топології буде доведено, якщо для послідовності $\xi_n(t) = (\xi_n^1(t), \xi_n^2(t))$ виконується умова

$$P\{|\xi_n(t) - \xi_n(t_1)| \ge \varepsilon, |\xi_n(t) - \xi_n(t_2)| \ge \varepsilon\} \le \frac{1}{\varepsilon^2\gamma}[H(t_2) - H(t_1)]^{2\alpha} \qquad (5)$$

для $t_1 \leq t \leq t_2$ $(t_1, t, t_2 \in [0, T])$, $n \geq 1$, $\gamma \geq 0$, $\alpha > \frac{1}{2}$, $\varepsilon > 0$, де функція $H(t)$ є неспадною неперервною функцією на $[0, T]$.

Можна показати, що умова (5) виконується для послідовності процесів $\xi_n(t)$, якщо $\gamma = 2$, $\alpha = 3/4$ і $H(t) = ct$.

Теорему 2 доведено. □

Висновки

Отже, під час доведення теореми 1 для мережевої моделі систем Ерланга $[M/M/m]^2$ з двовимірним пуассонівським потоком вимог ми отримали цікавий факт. Для існування стаціонарного розподілу числа вимог зазначенного вище вигляду, які знаходяться на обслуговуванні в нашій моделі, ми повинні зменшувати інтенсивність b спільного потоку за допомогою коефіцієнта $\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}$, якщо зайняті всі m_1 приладів. Отже, інтенсивність потоку $y_3(t)$ повинна дорівнювати $b\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}$. Аналогічно, якщо $X_2(t) = m_2$, інтенсивність b спільного вхідного потоку $y_3(t)$ має дорівнювати $b\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}$.

Результат теореми 2 означає, що процес обслуговування $X^{(n)}(nt)$ можна наближено представити так

$$X^{(n)}(nt) \sim n\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} + \sqrt{n}\begin{pmatrix}\xi_1(t)\\ \xi_2(t)\end{pmatrix},$$

де вектор $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ має нормальний розподіл з середнім $(0, 0)$ і коваріаційною матрицею C.

Література

1. Dai J. G., Shuangchi He. Customer abandonment in many-server queues // Mathematics of Operations Research. — 2010. — №35(2). — P. 347–362.
2. Lebedev E., Livinska H. Gaussian approximation of multi-channel networks in heavy traffic // Communication in Computer and Information Science. Springer. — 2013. — №356. — P. 122–130.
3. Grifiths R. S., Milne R. K. A class of bivariate Poisson process// Journal Multivar. Anul. Issue 8. — 3. — 1978. — P. 380–396.
4. Анисимов В. В., Лебедев Е. А. Стохастические сети обслуживания. — Киев: Лыбидь, 1992. — 206 с.
5. Ward Whitt. Stochastic-Process Limits. — An Introduction to Stochastic-Process Limits and Their Application to Queues. Springer, 2002. — 256 p.
6. Ward Whitt. Fluid models for multiserver queues with abandonments // Operations Research. — 2006. — №54(1). — P. 7–54.
7. Wei Xiong and Tayfur Altiok. An approximation for multi-server queues with determin istic reneging times // Annals of Operations Research. — 2009. — №172(1). — P. 143–151.

Надійшла 31.10.2016